01

Получение и свойства неравновесных эффективных характеристик

Г.Е. Скворцов

С.-Петербургский государственный университет

Поступило в Редакцию 9 июля 1999 г.

Дается универсальный проекционный метод сокращения описания и демонстрируется его применение для всех уровней. Рассматриваются получающиеся в результате сокращения эффективные характеристики. Обсуждаются их свойства и поведение для широкого диапазона мер действия, а также обусловленные ими эффекты.

1. Изучение процессов возрастающей интенсивности неизбежно связано с учетом все более глубоких уровней структуры систем и увеличением числа вовлеченных в процесс величин. Аналогичное этому положение возникает для режимов структурных переходов, когда система "открывается" и реагирует на множество внешних факторов. В том и другом случае существенно увеличивается размерность "пространства действия".

Вместе с тем любое наблюдение ограничено конечным числом величин. В результате возникает несоответствие между возрастанием размерности процесса и ограниченными возможностями его наблюдения и описания.

Естественным и, по существу, единственным способом решения этой проблемы является целесообразное сокращение описания (СО). При этом лишь несколько увеличивается число определяющих величин с общим уменьшением размерности описания и одновременно осуществляется переход к эффективным характеристикам (ЭХ).

Основным признаком последних служит зависимость от меры действия, т. е. это — существенно неравновесные характеристики. Таковыми являются эффективная масса, квазиэнергия, неравновесные восприимчивости. В общем случае, как известно, ЭХ зависят от мер действия операторным образом [1,2].

В конкретных задачах из разных областей (теория ядра, динамика молекулы, кинетика, гидродинамика) переход к ЭХ осуществляется обычно посредством использования феноменологических моделей. Таковые, как правило, не позволяют произвести интерполяцию для режимов существенной неравновесности, т. е. не дают возможности решить основную проблему.

Следует отметить, что в ряде случаев приходится иметь дело изначально с неравновесными характеристиками, поскольку их пределы при стремлении меры действия к нулю не существуют. Примеры такого рода указаны в [3,4].

Заметим, что в общем плане, согласно постулату всеобщей связи, все используемые характеристики неравновесных систем являются эффективными.

2. Представим универсальный метод СО и перехода к эффективным характеристикам.

Метод проекции исходных величин и уравнений на подходящие подпространства и получения замкнутых уравнений для интересующих компонент является универсальным и весьма удобным. Он с успехом используется для СО разного рода и уровня [5–7].

Приведем общую схему проекционного метода и выделим получающиеся при этом ЭХ.

Исходное описание динамики системы дается эволюционным уравнением для набора величины $F = \{f_x(X_x t)\}$

$$\partial_t F = \mathcal{E}[F] + Q, \tag{1}$$

X_s — набор общих координат, $Q = \{q_s\}$ — член источника. Это уравнение описывает систему на уровне более подробном, нежели нас интересует в итоге. Оно может быть неконструктивным, как например уравнение Лиувилля для 10^{20} частиц. Важно, что на его основе переходим посредством СО к следующему, менее подробному и более конструктивному уровню описания.

Сокращение описания любого уровня представляет собой проектирование на подпространство PF меньшей размерности

$$F = PF + P_\perp F \equiv F_p + F_\perp, \qquad P_\perp \equiv (I - P),$$

$$P^+P = I_p, \qquad P^+P_\perp = 0, \qquad P = \sum_m P_m. \tag{2}$$

Это представление аналогично разложению в ряд Фурье: F_p — конечное число первых членов, $F_\perp$ — остаток.

Осуществляя разбиение (2) в уравнении (1) и производя проектирование на подпространства F_p и $F_\perp$, получаем два уравнения

$$\partial_t F_p = \mathcal{E}_p[F_p] + \mathcal{E}_p[F_\perp] + P\Delta\mathcal{E}[F_p + F_\perp] + Q_p, \tag{3}$$

$$\partial_t F_\perp = \mathcal{E}_\perp[F_\perp] + \mathcal{E}_\perp[F_p] + P_\perp\Delta\mathcal{E}[F_p + F_\perp] + Q_\perp, \tag{4}$$

$$\Delta O[f + \varphi] \equiv O[f + \varphi] - O[f] - O[\varphi],$$

O —произвольный оператор (принято для сокращения выражений, что P и ∂_t коммутируют). Первое уравнение (система) дает основу СО нужного уровня; второе — используется для замыкания.

Подставляем операторное решение уравнения (4)

$$F_\perp = R_\perp[\mathcal{E}_\perp[F_p] + Q_\perp],$$

$$R_\perp[\bullet] = \{\partial_t - \mathcal{E}_\perp[\bullet] - P_\perp\Delta\mathcal{E}[F_p + \bullet]\}^{-1}, \tag{5}$$

в уравнение (3) и получаем систему СО замкнутого вида

$$\partial_t F_p = \mathcal{E}_p[F_p] + \partial_t\hat{F}_p + Q_p, \tag{6}$$

$$\partial_t\hat{F}_p = \mathcal{E}_p[R_\perp[\mathcal{E}_\perp[F_p]]] + \mathcal{E}_p[R_\perp[Q_\perp]] + \ldots \tag{7}$$

Величину $\partial_t\hat{F}_p$ принято называть "производством", а выражения (7) — замыкающими соотношениями. Последние в гидродинамике определяют общие законы переноса и операторы переноса.

Соотношения (7) определяют ЭХ разного рода. С учетом вида резольвенты (5) они указывают качественную зависимость ЭХ от мер действия. В частности, в низшем порядке по малым мерам действия получаются равновесные характеристики (коэффициенты пропорциональности между "потоками" и "силами"). В противоположном предельном случае очень больших мер действия резольвента задает ЭХ в виде "убывающих операторов". Например, при большой скоростной мере мер действия имеем ЭХ $\sim R \sim \partial_t^{-1}$.

Актуализация правых частей уравнений (6), главным образом соотношений (7), для различных систем и уровней описания — ключевая проблема динамической теории.

Простейшим примером общей схемы СО служит сведение двух линейных уравнений

$$d_t x_i = \nu_{ij} x_j + q_i \quad (i = 1, 2)$$

к одному (для $x_1 \equiv y$)

$$d_t y = \nu_{11} y_1 + \nu_{12} [d_t - \nu_{22}]^{-1} [\nu_{21} y + q_2] + q_1. \tag{8}$$

В данном случае эффективный оператор релаксации принимает вид $\tilde{\nu}_{11} = \nu_{11} + \nu_{12}[d_t - \nu_{22}]^{-1}\nu_{21}$. Очевидно, при малой скорости $d_t \to 0$ он равен $\nu_{11} - \nu_{12}\nu_{21}/\nu_{22}$, а при большой — ν_{11}.

Подобным образом Больцман и Максвелл, а затем Леонтович и Мандельштам получали из моментной системы релаксационную теорию.

3. Применяя приведенную общую схему к динамическому описанию системы $N(\sim 10^{20})$ частиц с рождением и уничтожением, получаем общее кинетическое уравнение.

Такое уравнение описывает эволюцию набора функций распределения $F(\Gamma_n, \overline{x}, t) = \{f_x(\Gamma_s, \overline{x}, t)\}$ взаимодействующих комплексов структурно-кинетических элементов $(s = 1, 2, \dots n)$, $\Gamma_s = (\overline{p^s}, \overline{x^s}, j^s)$, p^s, x^s, j^s — импульсы, координаты и внутренние характеристики s-комплексов. Оно имеет вид

$$\partial_t F = -\mathbf{V} \bullet \nabla F - \mathcal{F}[F] - I[F] + Q, \tag{9}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость s-комплекса, ∇ — градиент, $\mathcal{F}[\,]$ — оператор сил, действующих на комплекс. Оператор сильных взаимодействий $I[F]$ учитывает всевозможные процессы рождения и уничтожения s-комплексов, а также запаздывание и нелокальность в области столкновений.

Простейшим вариантом уравнения (9) для разреженного газа бесструктурных частиц является уравнение Больцмана.

Уравнение (9) чрезвычайно сложное и конкретизация его для определенных систем — непростая задача, а решение — открытая проблема.

Ввиду этого подходящим его предназначением является использование его как основы макроскопической теории, описывающей режимы широкого диапазона неравновесности.

Такая теория для жидких систем (супергидродинамика) представлена в [5], а линейный ее вариант с достаточной полнотой рассмотрен в [4,8,9]. Основное место в этой теории занимают эффективные восприимчивости: операторы диффузии, термодиффузии, вязкости, вязкотеплопроводности и т. д., которые определяются при подстановке в соотношения (7) оператора $\mathcal{E}$ в виде правой части (9).

4. Использование ЭХ (восприимчивостей) в полной макроскопической теории (супергидродинамике) выявляет многообразие эффектов, которые "не видны" в кинетической теории и отсутствуют в классических теориях.

Ввиду практической ценности укажем их основные классы.

Прежде всего это — перекрестные эффекты, которые в супергидродинамике представлены полностью: тепловязкие, гидровязкотеплопроводные и т. д. [4]. Как правило, они малы при малой неравновесности, а при больших градиентах, например, сравниваются с диагональными эффектами (вязкостью, теплопроводностью).

Хорошо известны релаксационные эффекты последействия, которые одним из первых наблюдал Больцман.

За последние десятилетия получили признание эффекты нелокальности, указываемые супергидродинамикой, для низкотемпературных условий, электромагнитоактивных сред, разреженных газов.

Эффекты сверхбольших восприимчивостей предписываются видом резольвенты (5) при условии малости обращаемого оператора (что соответствует неустойчивости структуры). В частности, эффект бесконечной проводимости для порогового значения электрического поля указан в [9].

Целый ряд эффектов, связанных с особенностями в зависимостях ЭХ (восприимчивостей) от мер действия, представлен в [10].

Таким образом, неравновесность ЭХ и ее адекватное отражение весьма существенны.

5. Наряду со свойствами указания эффектов СО играет важную вычислительную роль.

Известны вычислительные преимущества при сведении задач динамики систем с бесконечным числом степеней к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как правило, это делается посредством общих рядов Фурье, и обычно при этом они обрываются, т. е. принимается $F_{\perp} = 0$.

Это способ замыкания в общем случе недостаточен, и использование его при приближении даже очень большой размерности может оказаться малоэффективным. Так показывает пример задачи о звуке при частотах, превышающих характерную внутреннюю частоту [11]. В ней использование более пятисот моментов [12] не привело к согласию с опытом, в то время как выбор в качестве F_p первых пяти моментов (для одномерной задачи) в рамках проекционного метода дал полное совпадение.

Таким образом, следует рекомендовать всегда применять при сведении к конечномерной задаче полную проекционную схему, а затем использовать подходящие приближения при актуализации соотношений (7).

6. При рассмотрении динамики конечномерных систем осуществление СО в форме уменьшения числа уравнений или выделения регулярной компоненты процесса полезно в ряде отношений.

Продемонстрируем СО на примере системы трех уравнений с квадратичной нелинейностью

$$d_t x_i = -\nu_i x_i + \sum_{j \neq i}^{3} \nu_{ij} x_j + \sum_{j,e} \nu_{ije} x_j x_e + q_i, \tag{10}$$

$\nu_i > 0$, ν_{ij}, ν_{ije} — постоянные коэффициенты скорости. Система (10) включает в себя большинство известных моделей (Вольтерра, Лоренца, Белоусова–Жаботинского и др.).

Для СО — уменьшения числа уравнений, примем в соответствии с общей рекомендацией, что величина x_2 имеет наибольшее время жизни и наименьшую частоту по линейному приближению. Ввиду этого целесообразно сокращать величины x_1 и x_3.

Будем рассматривать, как это принято, нормальную реакцию, т. е. считать $x_{1,3}(t=0)=0$. Для уменьшения громоздкости итоговых выражений оставим в уравнениях по одному нелинейному недиагональному члену с ν_{112}, ν_{231}, ν_{323} и примем $q_1 \equiv q_3 = 0$.

С учетом этих упрощений итоговое уравнение для величины $x_2 \equiv y$ принимает вид

$$d_t y = -\nu_2 y + \sum_{i=1,3} \nu_{2i} \hat{x}_i[y] + \nu_{213} \hat{x}_1[y] \hat{x}_3[y] + q(t), \tag{11}$$

$$\hat{x}_1[y] = \int_0^t d\tau \exp\left\{ - \int_\tau^t [\nu_1 - \nu_{112} y(\tau')] d\tau' [\nu_{12} y(\tau) + \nu_{13} \hat{x}_3(y)] \right\}$$

$$\equiv \nu_{12} R_{12}[y, y] + \nu_{13} R_{12}[y, \hat{x}_3], \tag{12}$$

$$\hat{x}_3[y] = R_{32}[\nu_{31} \nu_{12} R_{12}[y, y] + \nu_{32} y], \tag{13}$$

$$R_{32} \equiv [d_t + \nu_3 + \nu_{13} \nu_{31} R_{12}[y, \bullet] - \nu_{323} y]^{-1}.$$

Полученное уравнение (11)–(13) существенно сложнее своего прототипа $(10)_2$, однако как единый объект оно имеет ряд преимуществ перед системой (10). На его примере удобно продемонстрировать все известные особенности: автоколебания, временные бифуркации, странный аттрактор и переход к динамическому хаосу. Удобно оно и для применения приближенных методов, особенно с использованием усреднений и выделений вибрационных эффектов.

Этим вопросам будет посвящена специальная работа.

7. Завершая обсуждение последовательности сокращений, выделим основное звено проекционного метода и укажем его роль в различных задачах.

Основным звеном является учет характерных особенностей резольвенты СО (5) при актуализации замыкающих соотношений и ЭХ.

Характерные особенности резольвенты: асимптотическое поведение при больших степенях неравновесности, скачки и обращение в бесконечность на спектре, играют важную роль в фундаментальных и прикладных задачах.

В проблеме перехода от обратимого описания к необратимому (Боголюбов, Фок и Крылов, Пригожин) ключевая роль принадлежит особенности резольвенты, обусловленной непрерывным спектром. Учет непрерывного спектра в сочетании с СО усреднением обеспечивают переход к необратимости.

В вычислительных задачах, в которых используется метод общего ряда Фурье, как показывает пример задачи о звуке, целесообразно использовать резольвентную форму замыкания. Это позволяет учесть спектральные особенности более адекватно, нежели обычное "зануление" остатка.

Успешное применение ЭХ в широком диапазоне условий предполагает подходящее интерполирование на основе точных операторных выражений. Даже весьма приближенное представление резольвенты позволяет получать более удачные выражения ЭХ, как например выражение эффективной проводимости турбулентной плазмы в магнитном поле [13].

Список литературы

[1] *Скворцов Г.Е.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 22. С. 7.
[2] *Скворцов Г.Е.* // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. В. 19. С. 7.
[3] *Скворцов Г.Е.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. В. 12. С. 2054.

[4] *Скворцов Г.Е.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. В. 8. С. 502.
[5] *Скворцов Г.Е.* // Вестник ЛГУ. 1979. В. 13. С. 94.
[6] *Блехман И.И.* Что может вибрация? М. 1988. 208 с.
[7] *Скворцов Г.Е.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. В.3. С. 62.
[8] *Скворцов Г.Е.* // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. В. 3. С. 956.
[9] *Перевозников Е.Н., Скворцов Г.Е.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 9. С. 1.
[10] *Скворцов Г.Е.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 6. С. 85; В. 7. С. 23.
[11] *Скворцов Г.Е.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. В. 10. С. 1248.
[12] *Pekeris C., Alterman Z., Finkelstein L., Frankowski K.* // Phys. Fluids. 1962. V. 5. P. 1608.
[13] *Дмитриев А.С., Синкевич О.А.* // ТВТ. 1997. Т. 15. В. 3. С. 489.