01;03

Взрывной рост возмущений поверхности проводящей жидкости в электрическом поле

© Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 12 июля 1999 г.

В предположении об одномерном характере возникающей волны рассмотрено поведение свободной поверхности проводящей жидкости во внешнем электрическом поле вблизи порога неустойчивости Тонкса–Френкеля. Показано, что динамика поверхности описывается нелинейным уравнением Клейна–Гордона. В рамках этого уравнения сформулированы критерии взрывного роста амплитуд возмущений.

Неустойчивость Тонкса–Френкеля [1,2] границы проводящей жидкости в сильном электрическом поле играет существенную роль в общей проблеме электрической прочности. Она приводит к лавинообразному нарастанию возмущений поверхности [3], появлению областей с высокой концентрацией энергии, разрушение которых сопровождается интенсивными эмиссионными процессами [4,5]. Существенная нелинейность подобных явлений определяет необходимость построения теоретической модели развитых стадий неустойчивости Тонкса–Френкеля, в частности выявления условий взрывного роста возмущений.

Закон дисперсии волн на плоской поверхности идеально проводящей жидкости во внешнем электрическом поле величиной E имеет вид [6]:

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho}k^3 - \frac{E^2}{4\pi\rho}k^2,$$

где g — ускорение поля тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды. Из него видно, что при превышении плотностью энергии поля $W = E^2/(8\pi)$ критического значения $W_c = \sqrt{g\alpha\rho}$ поверхность неустойчива, причем при малых надкритичностях $\varepsilon = (W - W_c)/W_c$ нарастают возмущения с волновыми числами, близкими к $k = k_0 = \sqrt{g\rho/\alpha}$. В такой ситуации возникает возможность исследования нелинейной динамики возмущений поверхности в рамках уравнений для огибающих.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной несжимаемой проводящей жидкости, занимающей область $z \leqslant \eta(x,t)$ (свободная поверхность жидкости задается функцией $z = \eta(x,t)$), во внешнем электрическом поле, направленном вдоль оси y. Потенциал скорости жидкости Φ и потенциал электрического поля φ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\varphi = 0$$

с условиями на бесконечности:

$$\Phi \to 0 \quad z \to -\infty,$$

$$\varphi \to -Ez, \quad z \to \infty,$$

а также вследствие эквипотенциальности поверхности проводящей жидкости условием

$$\varphi = 0, \quad z = \eta.$$

Функции $\eta(x,t)$ и $\psi(x,t) = \Phi|_{z=\eta}$ являются канонически сопряженными величинами [7], так что динамическое и кинематическое условия на поверхности принимают вид:

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta\psi},$$

где гамильтониан

$$H = \int\limits_{z\leqslant\eta} \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} d^2r - \int\limits_{z\geqslant\eta} \frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi\rho} d^2r + \int \left(\frac{g\eta^2}{2} + \frac{\alpha}{\rho}\left(\sqrt{1+\eta_x^2} - 1\right)\right) dx$$

с точностью до константы совпадает с полной энергией системы. Его можно представить в виде поверхностного интеграла:

$$\begin{aligned} H = &\int \frac{\psi}{2}(\hat{T}_+\hat{k}\hat{T}_+^{-1}\psi - \eta_x\hat{T}_+\partial_x\hat{T}_+^{-1}\psi)dx \\ &- \int \frac{W\eta}{\rho}(\hat{T}_-\hat{k}\hat{T}_-^{-1}\eta + \eta_x\hat{T}_-\partial_x\hat{T}_-^{-1}\eta)dx \\ &+ \int \left(\frac{g\eta^2}{2} + \frac{\alpha}{\rho}\left(\sqrt{1+\eta_x^2} - 1\right)\right) dx, \end{aligned} \qquad (1)$$

где интегральный оператор $\hat{k}$ выражается через преобразование Гильберта $\hat{H}$:

$$\hat{k} = -\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}, \qquad \hat{H}f = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P.V.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')}{x'-x}dx',$$

а нелинейные операторы $\hat{T}_\pm$ задаются выражением

$$\hat{T}_\pm = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm\eta)^n\hat{k}^n}{n!}.$$

Полагая надкритичность $|\varepsilon|$ и характерные углы наклона поверхности $|\nabla\eta|$ малыми, перейдем к огибающим с помощью замен

$$\eta = A(x,t)e^{ik_0x} + A^*(x,t)e^{-ik_0x} + 2k_0A^2e^{2ik_0x} + 2k_0A^{*2}e^{-2ik_0x},$$

$$\psi = B(x,t)e^{ik_0x} + B^*(x,t)e^{-ik_0x},$$

в которых учтено взаимодействие $k_0 \to 2k_0$. Подставляя эти выражения в гамильтониан (1) и проведя необходимые усреднения, находим с точностью до четвертого порядка по амплитуде:

$$H = \int\left(k_0|B|^2 - \frac{\varepsilon\omega_0^2}{k_0}|A|^2 + \frac{\omega_0^2}{2k_0^2}|A_x|^2 - \frac{11\omega_0^2k_0}{8}|A|^4\right)dx,$$

где $\omega_0^2 = 2gk_0$. Соответствующее этому гамильтониану уравнение для комплексной амплитуды A после масштабирования

$$\omega_0t \to t, \qquad \sqrt{2}k_0x \to x, \qquad \sqrt{11/4}\,k_0A \to A$$

приобретают вид

$$A_{tt} = \varepsilon A + A_{xx} + |A|^2A. \tag{2}$$

То есть огибающая пакета A подчиняется нелинейному уравнению Клейна–Гордона (модели $|\phi|^4$).

Особенностью уравнения (2) является то, что нелинейность не стабилизирует линейную неустойчивость, а, наоборот, усиливает ее, приводя при определенных условиях к взрывному росту амплитуд.

Действительно, рассмотрим по аналогии с работами [8,9], где исследовалась динамика коллапса для уравнения Клейна–Гордона с различными типами нелинейности, временную эволюцию нормы

$$X = \int |A|^2 dx.$$

Запишем соответствующий уравнению (2) гамильтониан в виде:

$$H = \int \left(\frac{3}{2}|A_t|^2 - \frac{1}{4}(|A|^2)_{tt} - \frac{\varepsilon}{2}|A|^2 + \frac{1}{2}|A_x|^2 \right) dx.$$

Опуская член с пространственными производными и используя неравенство Коши–Буняковского $X_t^2 \leqslant 4X \int |A_t|^2 dx$, находим:

$$H \geqslant \frac{3X_t^2}{8X} - \frac{X_{tt}}{4} - \frac{\varepsilon X}{2}. \quad (3)$$

Данное мажорирующее неравенство с точностью до коэффициентов совпадает с полученными в [8,9]. Переход к новой переменной $Y = X^{-1/2}$ позволяет переписать (3) в форме второго закона Ньютона:

$$Y_{tt} \leqslant -\frac{\partial P(Y)}{\partial Y}, \qquad P(Y) = -\frac{\varepsilon}{2}Y^2 - \frac{H}{2}Y^4,$$

где Y играет роль координаты "частицы", P — ее потенциальной энергии. Анализируя это неравенство для случая, когда в начальный момент времени $t = 0$ скорость "частицы" направлена к началу координат: $Y_t(0) < 0$, несложно обнаружить, что величина Y обратится в нуль, во-первых, при $\varepsilon > 0$, если $U(0) > 0$, во-вторых, при $\varepsilon < 0$ и $H < 0$, и, в-третьих, при $\varepsilon < 0$ и $H > 0$, если $U(0) > \varepsilon^2/(8H)$, либо $Y^2 < |\varepsilon|/(2H)$, где $U = Y_t^2/2 + P(Y)$ — полная энергия "частицы". Понятно, что при выполнении этих условий норма X обращается в бесконечность за конечное время, что и соответствует взрывному росту амплитуд. Для времени T возникновения особенности справедлива оценка [8,9]:

$$T \leqslant \int_0^{Y(0)} \frac{dY}{\sqrt{2U(0) - 2P(Y)}}.$$

Отметим, что часть критериев взрывного роста амплитуд относится к случаю, когда плоская поверхность устойчива по отношению к малым возмущениям ($\varepsilon < 0$). Это означает, что возбуждение неустойчивости будет носить жесткий характер.

Таким образом, рассмотрение поведения поверхности проводящей жидкости в электрическом поле вблизи порога неустойчивости показало, что нелинейность в первом неисчезающем порядке задает тенденцию взрывному росту возмущений.

Автор признателен Е.А. Кузнецову, А.М. Искольдскому и Н.Б. Волкову за плодотворные обсуждения.

Данная работа выполнена в рамках проекта РФФИ, грант 97–02–16177.

Список литературы

[1] *Tonks L.* // Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 562.
[2] *Френкель Я.И.* // ЖТФ. 1936. Т. 6. С. 347.
[3] *Габович М.Д., Порицкий В.Я.* // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. В. 6. С. 320.
[4] *Праневичюс Л.И., Барташюс И.Ю., Илгунас В.И.* // Изв. вузов, Физика. 1969. В. 4. С. 44.
[5] *Барташюс И.Ю., Праневичюс Л.И., Фурсей Г.Н.* // ЖТФ. 1971. Т. XLI. В. 9. С. 1943.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[7] *Захаров В.Е.* // ПМТФ. 1968. В. 2. С. 86.
[8] *Кузнецов Е.А., Лушников П.М.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. С. 614.
[9] *Maslov E.M., Shagalov A.G.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 239. P. 46.