

01;04;09

Быстрые магнитозвуковые и быстрые альфвеновские волны в эллиптическом плазменном цилиндре

© Д.Л. Греков, В.И. Лапшин, М.М. Яковлев

Институт физики плазмы, Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт", Украина

Поступило в Редакцию 15 декабря 1998 г.

Проведен аналитический анализ распространения волн ионно-циклотронного диапазона в вытянутой цилиндрической плазме. Полученные результаты позволяют говорить о продвижении в построении двумерно-неоднородной аналитической теории.

Наряду с численными методами, модель плазменного цилиндра является одной из наиболее популярных при планировании и анализе результатов экспериментов по ВЧ нагреву плазмы в диапазоне ионных циклотронных частот. Во многих установках плазменный шнур имеет эллиптическое сечение, поэтому представляет интерес исследование влияния формы шнура на распределение ВЧ полей в плазме. Впервые эта задача рассматривалась в [1], где предполагалось малым отклонение формы шнура от круга.

Настоящая работа посвящена аналитическому исследованию распространения быстрых магнитозвуковых (БМЗВ) и быстрых альфвеновских волн (БАВ) в эллиптическом плазменном цилиндре в аксиальном магнитном поле $B_0 \parallel Oz$. В качестве первого шага исследуются собственные колебания такого цилиндра. Мы используем эллиптические координаты (ξ, φ, z) . Они состоят из системы конфокальных эллипсов $\xi = \xi_i$ (ξ — аналог радиальной координаты) и гипербол $\varphi = \varphi_i$ (φ — аналог азимутальной координаты). Фокальные расстояния всех эллипсов равны $2h = 2a\varepsilon = 2a/\operatorname{ch} \xi$, $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Здесь a — большая, b — малая оси эллипса, ε — эксцентриситет, $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow \infty$) соответствует окружности, $\varepsilon \rightarrow 1$ ($\xi \rightarrow 0$) соответствует щели. Отметим, что даже малое отклонение от окружности ($a = 100$ см, $b = 99$ см) приводит к $\varepsilon = 0.14$, а для установки ЖЕТ $\varepsilon = 0.7$. Предположим, что плазма

состоит из двух сортов ионов и электронов и $E_z = 0$. Запишем ВЧ поля в виде $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}(\xi, \varphi)e^{ik_{\parallel}z}$, Тогда для B_z имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{N_{\perp}^2} \frac{\partial B_z}{\partial \xi} \right) - i \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\varepsilon_2}{N_{\perp}^2 (\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)} \right] \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + \frac{1}{N_{\perp}^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2 h^2}{c^2} (\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \varphi) B_z = 0, \quad (1)$$

здесь

$$N_{\perp}^2 = N_{\perp}^2(\xi) = \frac{(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)}, \quad \varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 - \omega_{c1}^2} - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2 - \omega_{c2}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2},$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\omega}{\omega_{c1}} \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 - \omega_{c1}^2} - \frac{\omega}{\omega_{c2}} \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2 - \omega_{c2}^2},$$

ω_{p1} , ω_{p2} , ω_{pe} — ионные и электронная плазменные частоты, ω_{c1} , ω_{c2} , ω_{ce} — ионные и электронная циклотронные частоты.

Для случая однородной плазмы уравнение (1) допускает разделение переменных $B_z(\xi, \varphi) = \mathbf{u}(\xi) \cdot \nu(\varphi)$. Поле в плазме описывается при этом уравнениями Матъе

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} - (C - 2q \cdot \text{ch} 2\xi) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial \varphi^2} + (C - 2q \cdot \cos 2\varphi) \cdot \nu = 0, \quad (2)$$

где $q = (N_{\perp} \omega h / 2C)^2 = (h / 2\lambda_{\perp})^2$ — основной параметр задачи. Предположим, что плазма окружена металлической стенкой с $\xi = \xi_0$. Тогда граничное условие имеет вид

$$-i\varepsilon_2 \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \Big|_{\xi=\xi_0} + (\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2) \frac{\partial B_z}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнений (2) запишем в форме

$$B_z(\xi, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \text{Ce}_m(\xi, q) \text{se}_m(\varphi, q) + \sum_{m=0}^{\infty} S_m \text{Se}_m(\xi, q) \text{se}_m(\varphi, q). \quad (4)$$

Здесь se_m , se_m — обыкновенные и Ce_m , Se_m — модифицированные функции Матъе [2]. При малом $q/4$ в выражении (4) можно оставить одну

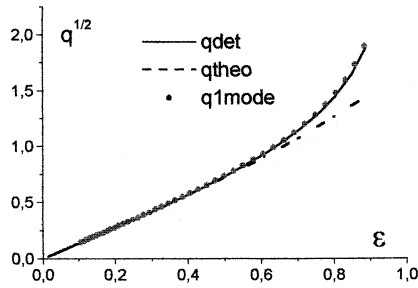


Рис. 1.

азимутальную гармонику (соседние гармоники пропорциональны $q/4$). Тогда, используя (3), получим дисперсионное уравнение собственных колебаний эллиптического цилиндра:

$$\frac{\varepsilon_2^2 \cdot m^2}{(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2} \frac{C e_m(\xi_0, q_i)}{C e'_m(\xi_0, q_i)} = \frac{S e'_m(\xi_0, q_i)}{S e_m(\xi_0, q_i)}, \quad (5)$$

которое определяет собственные значения q_i . Взяв три основных члена в разложении $C e_m$, $S e_m$ по функциям Бесселя, получим из (5)

$$\sqrt{q_i} = \frac{(k_{\perp l r})_{cir}}{2} \varepsilon (1 + \varepsilon^2/4), \quad (k_{\perp l a})_{el} = (k_{\perp l r})_{cir} (1 + \varepsilon^2/4), \quad (6)$$

где $(k_{\perp l r})_{cir}$ — решения уравнения (5) для ”круглого” цилиндра, радиус которого равен большой оси эллипса. Из решения (6) (рис. 1, кривая ”qtheo”) следует: изменение формы плазменного шнура при сохранении площади его сечения не влияет на величины $k_{\perp l}$ (или собственных частот $\omega_l^{(0)}$). Точное решение дисперсионного уравнения (5), полученное численно, показано на рис. 1, кривая ”q 1 mode”. Анализируя решение в виде (4) с граничным условием (3), приходим к выводу: при $q \geq 1$ оно представляет собой набор связанных эллиптических гармоник. Дисперсионное уравнение в этом случае получается из равенства нулю детерминанта, происходящего из (3) (рис. 1, кривая ”qdet”). Сравнивая кривые ”q 1 mode” и ”qdet”, мы видим, что уравнение (5) дает правильные значения $k_{\perp l}$ даже за пределами своей применимости (при $q/4 \geq 1$).

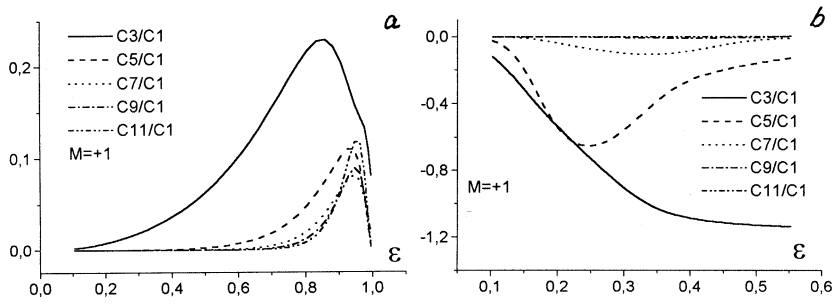


Рис. 2.

Изучим теперь азимутальную структуру полученных решений. Формально она полностью отличается от бегущих по азимуту волн, существующих в "круглом" цилиндре. Из (4) получаем

$$S_m = i \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2} \cdot m \cdot C_m \frac{A_m^m}{B_m^m} \frac{C_{e_m}(\xi, q)}{S_{e_m}'(\xi, q)},$$

а для бегущих волн должно быть

$$S_m = \pm i \cdot C_m \frac{A_m^m}{B_m^m} \frac{C_{e_m}(\xi, q)}{S_{e_m}(\xi, q)},$$

где A_m^m , B_m^m — коэффициенты Фурье разложения s_{e_m} , se_m по $\cos l\varphi$ и $\sin l\varphi$ соответственно. На рис. 2 показана зависимость от эксцентриситета амплитуд сателлитных по отношению к основной ($m = +1$) азимутальных гармоник, нормированных на амплитуду основной гармоники (a — первая радиальная мода, b — седьмая радиальная мода). Зависимость от азимута волнового поля показана на рис. 3 (a — первая радиальная мода; b, c — седьмая радиальная мода; $j \sum$ — сумма гармоник). Для сравнения приведен график $\cos \varphi$, соответствующий "круглому" цилиндру. Для первой радиальной моды существенного изменения в азимутальном поведении колебаний не наблюдается. Однако для седьмой радиальной моды азимутальная структура колебаний изменяется кардинально. Происходит смещение максимумов поля к малой оси эллипса. Такое же смещение к малой оси демонстрируют и синусоидальные компоненты поля.

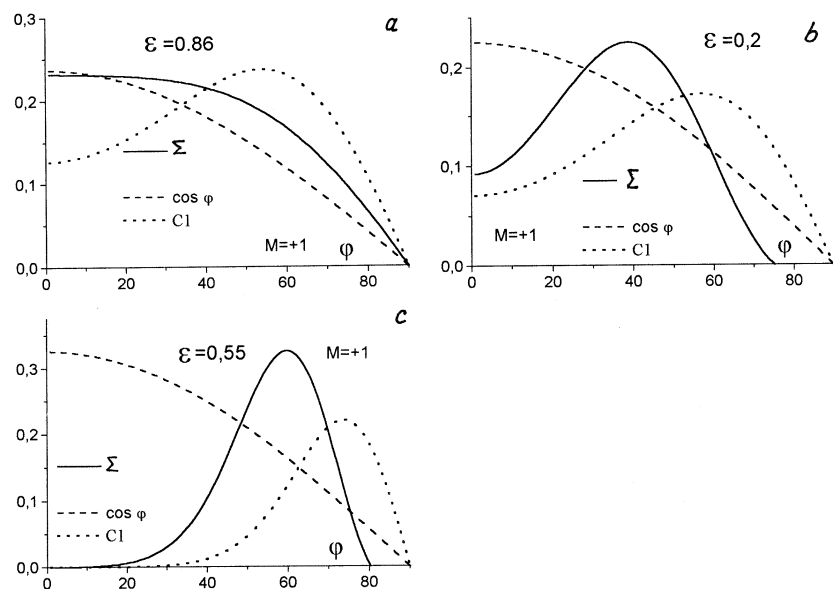


Рис. 3.

Выпишем поправки к частотам собственных колебаний плазменного цилиндра, обусловленные эллиптичностью. В области частот $\omega \approx \omega_{ci}$, $\omega < \omega_{ci}$ при $N_{\parallel}^2 \gg N_A^2$ возбуждаются БАВ с

$$\omega_{el} = \omega^{(0)} \left(1 + \frac{k_{\perp}^2/k_{\parallel}^2}{1 + k_{\perp}^2/k_{\parallel}^2} \frac{\varepsilon^2}{4} \right),$$

$$\omega^{(0)} = \omega_{ci} \left(1 - \frac{\omega_{ci}^2}{k_{\parallel}^2 \nu_A^2} \frac{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2/2}{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2} \right). \quad (7)$$

Для БМЗВ ($N_A^2 = c^2/\nu_A^2 \gg N_{\parallel}^2$, ν_A — альфвеновская скорость, $\omega^{(0)} = k\nu_A$) имеем

$$\omega = \omega^{(0)} (1 + \varepsilon^2/4). \quad (8)$$

Результаты (7), (8) совпадают с полученными в [1] по порядку величины.

Итак, не предполагая малым отклонение эллипса от окружности, в работе получено дисперсионное уравнение собственных колебаний эллиптического плазменного цилиндра; найдены собственные частоты и волновые векторы. Показано, что эллиптичность приводит к значительным изменениям в азимутальной структуре полей.

Список литературы

- [1] *Гирка И.А., Степанов К.Н.* // Укр. физ. журн. 1991. Т. 36. № 7. С. 1051.
- [2] *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.