*01;04*

# К теории неустойчивости Лесажа–Джинса в линейной цепочке пылинок в плазме

© *А.Е. Дубинов, Д.В. Селемир, В.Ш. Шайдуллин*

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*Поступило в Редакцию 27 апреля 1999 г.*

Теоретически рассмотрена динамика неустойчивости Лесажа–Джинса в линейной бесконечной периодической цепочке пылинок в плазме при помощи численного решения выведенного нелинейного волнового уравнения.

Динамика пылевой компоненты с недавнего времени является активно исследуемым объектом в плазме. Эта динамика, как выяснилось, столь необычна, что в ряде случаев трудно подобрать привычные, сходные с ее коллективным движением аналоги. Можно привести огромное количество фактов, подтверждающих этот тезис, укажем лишь на наиболее впечатляющие:

формирование устойчивой упорядоченной структуры пылинок в плазме — плазменно-пылевого кристалла (см. обзоры [1,2]);

стремление пылевой плазмы к самосжатию и к пребыванию в компактном виде [3].

И если об исследованиях плазменно-пылевых кристаллов можно сказать, что уже сформировалось новое направление — плазменно-пылевая кристаллография, количество работ в которой исчисляется уже несколькими сотнями, то о неустойчивости самосжатия пылевой плазмы и ее компактного существования нам известно очень небольшое количество работ [3,4]. Вместе с тем именно эта неустойчивость представляется наиболее интересной для практических целей, например для увеличения времени удержания низкотемпературной плазмы в компактном виде.

На элементарном уровне можно указать причину кристаллизации и самосжатия пылевой компоненты: наличие дальнодействующих сил притяжения между пылинками. Механизм возникновения таких сил, предложенный в [5–7] и основанный на эффекте взаимного затенения потоков ионов и пылинок, приводит к взаимодействию, аналогичному гравитации:

$$F_{1,2} \propto nT_i \frac{a_1^2 a_2^2}{R^2}, \tag{1}$$

где $n$ — концентрация плазмы, $T_i$ — ее ионная температура, $a_1$ и $a_2$ — радиусы пылинок, $R$ — расстояние между их центрами. Как указано в [6], эта формула была выведена в XVIII в. Лесажем, пытавшимся объяснить гравитацию с помощью понятия эфира.

Результаты экспериментальных исследований [8,9], подтвердивших существование сил притяжения макротел в плазме, в целом не противоречат теоретическим представлениям [5–7].

Легко понять, что при наличии притяжения в ансамбле пылинок в плазме возможно развитие неустойчивости типа Джинса. Причем эффект самосжатия можно рассматривать как частный случай этой неустойчивости. Поскольку, как будет показано ниже, в случае пылевой плазмы эта неустойчивость имеет некоторые особенности, отличающие ее от классической гравитационной неустойчивости, мы решили дать ей название неустойчивости Лесажа–Джинса.

Целью данной работы явилось теоретическое исследование динамики этой неустойчивости в линейной бесконечной периодической цепочке пылинок в плазме, как наиболее наглядной и допускающей простое решение конфигурации. Такие цепочки (разумеется, с конечным количеством частичек пыли) экспериментально получались и исследовались в [10,11].

Ниже представлен вывод нелинейного волнового уравнения, описывающего неустойчивость, и приводится пример его численного решения.

Рассмотрим бесконечную периодическую цепочку одинаковых сферических пылинок, находящуюся в изотропной и однородной безграничной бесстолкновительной плазме. Бесстолкновительность плазмы подразумевает, что длина свободного пробега всех частиц плазмы в отсутствие пылинок существенно превышает все характерные масштабы длин в задаче. Положим, что период в цепочке $d$ и радиус пылинок $a$ удовлетворяют условию $d < a \ll r_d$, где $r_d$ — дебаевский радиус. Геометрия задачи показана на рис. 1.

Определим силу, действующую на отдельную пылинку. Эта сила слагается из сил взаимного притяжения с двумя соседними пылинками, по одной с каждой стороны. Существенно, что последующие пылинки не

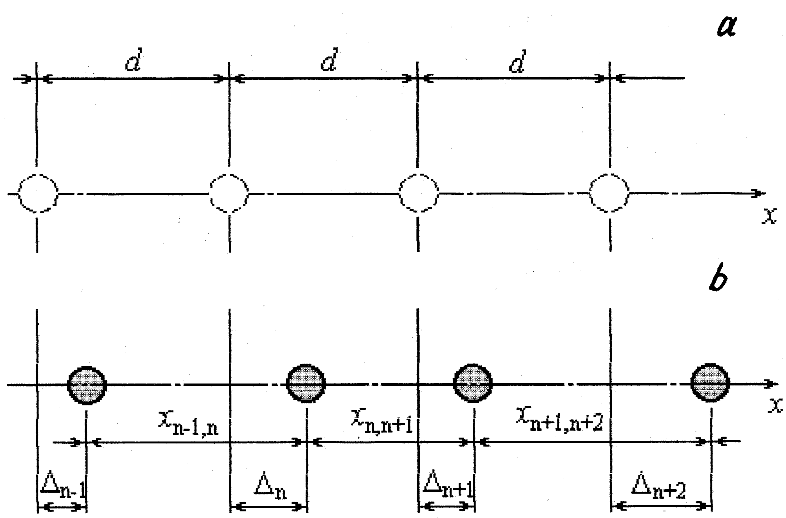


**Рис. 1.** Геометрия задачи: *a* — невозмущенное положение пылинок; *b* — мгновенное положение пылинок при развитии неустойчивости.

взаимодействуют с рассматриваемой пылинкой, так как они находятся в области геометрической тени ближайших к ней. Это затенение (или другими словами — экранировка) является ключевым моментом, который отличает рассматриваемую задачу от классической гравитационной неустойчивости Джинса.

Таким образом, каждая пылинка взаимодействует по закону (1) только со своими ближайшими соседями, и поэтому к данной цепочке в целом применим формализм цепочек Тоды [12].

Легко видеть, что периодическая цепочка находится в равновесии, так как силы притяжения с обеих сторон для каждой пылинки уравновешивают друг друга. Однако малое возмущение выводит систему из равновесия.

Запишем уравнения движения $(n+1)$ и $n$-й пылинок:

$$\frac{d^2\Delta_{n+1}}{dt^2} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{1}{x^2_{n,n+1}} - \frac{1}{x^2_{n+1,n+2}}\right), \tag{2}$$

$$\frac{d^2\Delta_n}{dt^2} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{1}{x^2_{n-1,n}} - \frac{1}{x^2_{n,n+1}}\right), \tag{3}$$

где $\Delta_n$ — смещение от положения равновесия $n$-й пылинки, $x_{n,m}$ — мгновенное расстояние между $n$ и $m$-й пылинками, $\mu \propto nT_i a^2$ — постоянная силы (1). Вычитая из уравнения (2) уравнение (3), будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}(d + \Delta_{n+1} - \Delta_n) = -\frac{\mu}{m}\left(\frac{1}{x^2_{n+1,n+2}} - \frac{2}{x^2_{n,n+1}} + \frac{1}{x^2_{n-1,n}}\right). \tag{4}$$

Заметим, что под знаком производной в (4) стоит $d+\Delta_{n+1}-\Delta_n = x_{n,n+1}$.

Перейдем теперь от дискретной цепочки к ее континуальному аналогу. Для этого удобно ввести линейную на единицу длины плотность пылинок $\rho = x^{-1}$. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\rho^{-1}_{n+1,n} = -\frac{\mu}{m}(\rho^2_{n+1,n+2} - 2\rho^2_{n,n+1} + \rho^2_{n-1,n}). \tag{5}$$

Выражение в скобках в (5) представляет собой разностную запись второй производной по пространственной переменной $x$. Поэтому можно записать

$$\frac{d^2}{dt^2}\rho^{-1} + \frac{\mu}{m}\frac{d^2}{dx^2}\rho^2 = 0; \tag{6}$$

и, выполняя дифференцирование, окончательно получим искомое волновое уравнение

$$\rho\rho_{tt} - 2\rho_t^2 + \frac{\mu}{m}(\rho^3\rho_x^2 + \rho^4\rho_{xx}) = 0. \tag{7}$$

Это уравнение совместно с профилями начального возмущения $\rho(x,0)$ и $\rho_t(x,0)$ образуют задачу Коши, которая позволяет описать динамику неустойчивости Лесажа–Джинса бесконечной цепочки пылинок в плазме.

Зададимся в качестве примера локализованным возмущением цепочки

$$\rho(x,0) = \rho_0 + \frac{\rho'(x/b)}{1+(x/b)}, \quad \rho_t(x,0) = 0, \tag{8}$$

где $\rho'$ и $b$ — некоторые константы, такие что $\rho' \ll \rho_0 = d^{-1}$ и $b \ll d$.

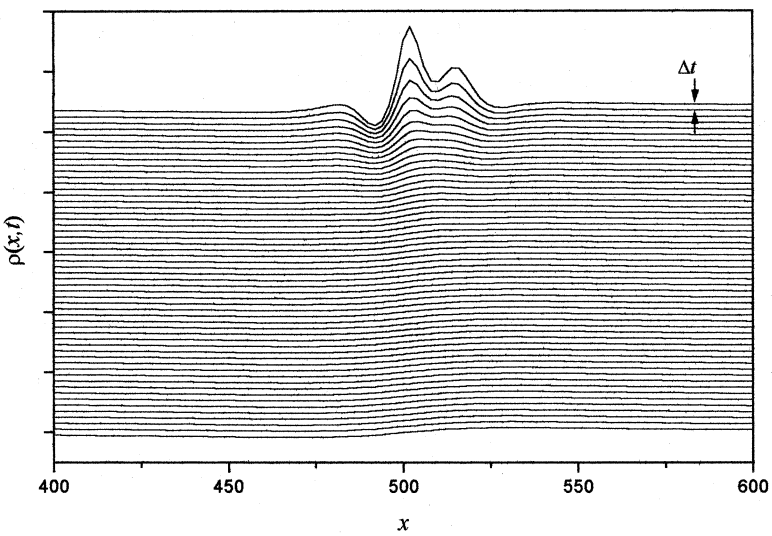


**Рис. 2.** Эволюция распределения плотности.

Задача (7)–(8) решалась численно методом факторизации (прогонки), при этом для представления уравнения (7) в безразмерном виде использовался масштаб времени $t_0 = (m/\mu)^{1/2}$. Относительная погрешность интегрирования задавалась менее $10^{-10}$. На рис. 2 представлена эволюция распределения плотности $\rho$ с шагом по времени $\Delta t = 0.05$.

Из рис. 2 хорошо видна тенденция стремления системы пылинок к кластеризации, что качественно совпадает с известной гравитационной неустойчивостью Джинса. Однако вследствие экранировки инкремент неустойчивость Лесажа–Джинса все же заметно меньший.

## Список литературы


[1] *Цытович В.Н.* // УФН. 1997. Т. 167. № 1. С. 57.

[2] *Нефедов А.П., Петров О.Ф., Фортов В.Е.* // УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1215.

[3] *Цытович В.Н., Резендес Д.* // Физика плазмы. 1998. Т. 24. № 1. С. 71.

[4] *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 1998. Т. 22. № 8. С. 731.

[5] *Игнатов А.М.* // Кр. сообщ. физ. ФИАН. 1995. № 1–2. С. 58.
[6] *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 1996. Т. 22. № 7. С. 648.
[7] *Ходатаев Я.К., Бингхем Р., Тараканов В.П., Цытович В.Н.* // Физика плазмы. 1996. Т. 22. № 11. С. 1028.
[8] *Дубинов А.Е., Жданов В.С., Игнатов А.М.* и др. // Кр. сообщ. физ. ФИАН. 1997. № 7–8. С. 40.
[9] *Дубинов А.Е., Жданов В.С., Игнатов А.М.* и др. // Материалы конференции по физике низкотемпературной плазмы: "Плазма, XX век". Петрозаводск, 1998. С. 701.
[10] *Peter S., Homann A., Melzer A., Piel A.* // Phys. Lett. A. 1996. V. 223. N 5. P. 389.
[11] *Homann A., Melzer A., Peter S., Piel A.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. N 6. P. 7138.
[12] *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.