

01;03;08

Переходные процессы в окрестности порога субгармонического резонанса

© А.О. Максимов, Е.В. Соседко

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, Владивосток

Поступило в Редакцию 1 апреля 1999 г.

Потеря устойчивости динамической системы в окрестности субгармонического резонанса проявляется в затягивании переходных процессов. На примере нелинейных пульсаций газового пузырька под действием частотнозаполненного акустического импульса показано, что экспериментально наблюдаемое излучение субгармоники ниже порога генерации может быть объяснено вкладом собственных колебаний, возникающих в момент вступления импульса, время затухания которых, благодаря параметрической перекачке энергии, сопоставимо с его длительностью.

Своеобразие реакции нелинейной динамической системы на внешнее гармоническое воздействие состоит в появлении спектральных компонент ниже частоты возбуждения. Эти компоненты носят название субгармонических составляющих. Наиболее известным примером является компонента ($1/2$), частота которой равна половине частоты возбуждения. В отличие от высших гармоник, амплитуды которых растут непрерывно с увеличением интенсивности воздействия, появление субгармонических составляющих носит пороговый характер.

Ниже в качестве примера такой системы будут проанализированы радиальные пульсации газового пузырька в жидкости под действием мощной акустической волны. Регистрация субгармонической составляющей (в дальнейшем речь идет всюду о компоненте $1/2$) является общепотребительной характеристикой кавитационных и других нелинейных

явлений в жидкости с фазовыми включениями [1–5]. Вместе с тем, начиная с работы Непайерса [2], отмечается наличие небольшой субгармонической составляющей и ниже порога [6–8], так что нарастание этой спектральной компоненты не имеет, строго говоря, порогового характера.

Предлагаемое в данной работе объяснение связано с анализом переходных процессов в окрестности субгармонического резонанса. В окрестности порога теряет свою устойчивость состояние с нулевой амплитудой колебаний на основной (фундаментальной) частоте, при этом образуется в нуль один из двух показателей Ляпунова. При включении внешнего поля (как правило, эксперименты проводятся с модулированными импульсными сигналами, содержащими от десятков до сотен периодов накачки $T = 2\pi/\omega_p$) помимо вынужденных возбуждаются и собственные колебания с частотой $\sim \omega_p/2$. В окрестности порога затухание собственных колебаний, определяемое показателем Ляпунова, благодаря параметрической перекачке энергии в эту компоненту, очень мало (обращается в нуль для порогового значения амплитуды накачки). По этой причине время переходных процессов может превышать длительность импульса накачки, а соответствующая компонента в спектре излучения интерпретироваться как появление субгармонической компоненты ниже порога.

При количественном рассмотрении эффекта воспользуемся уравнением Рэлея–Плессета, описывающим пульсации пузырька в поле давления $P_p = P_m \cos(\omega_p t + \alpha)$:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right] + 2\delta R_0 \dot{R} = -\frac{P_p}{\rho_0}. \quad (1)$$

Здесь γ — показатель политропы; δ — затухание, эффективно учитывающее диссипативные процессы вязкости и теплопроводности, а также радиационные потери; P_0 , ρ_0 , R_0 — равновесные значения давления и плотности жидкости, радиусов пузырьков. Асимптотическое разложение решения (2) в окрестности субгармонического резонанса $|\omega_p - 2\Omega_0| \ll \omega_p$ (см., например, [9–11]) имеет вид

$$(R - R_0)/R_0 = a \cos(i\Omega_0 t + i\vartheta) + \frac{P_m \cos(\omega_p t + \alpha)}{\rho_0 R_0^2 (\omega_p^2 - \Omega_0^2)} + \varepsilon u_1(a, \vartheta, t) + \varepsilon^2 u_2(a, \vartheta, t) + \dots \quad (2)$$

Здесь $\Omega_0 = (3\gamma P_0/\rho_0 R_0^2)^{1/2}$ — собственная частота пузырька; ε — безразмерный малый параметр, вводимый для обозначения порядка нелинейных членов. Медленно меняющиеся амплитуда a и фаза ϑ колебаний определяются из системы "укороченных" уравнений, следующей из требования отсутствия секулярных членов в разложении. Учет в (1) нелинейных членов до второго порядка включительно приводит к следующему уравнению для $z = a \cdot \exp(i\vartheta) \exp[-i(\omega_p/2 - \Omega_0)t]$:

$$\dot{z} = -\delta z - i\Delta\Omega z - i\delta \frac{P_m}{P_k} \exp(i\alpha) z^*,$$

$$\Delta\Omega = \omega_p/2 - \Omega_0, P_k = 4\delta\Omega_0\rho_0 R_0^2 \gamma^{-1}. \quad (3)$$

Это уравнение следует дополнить начальными данными для a и ϑ , которые могут быть получены при подстановке разложения (2) в точные начальные условия. При возбуждении пузырька из положения покоя $R(0) = 0, dR/dt(0) = 0$

$$a(0) = \frac{P_m}{3\rho_0 R_0^2 \Omega_0^2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}; \quad \text{tg } \vartheta(0) = 2 \text{tg } \alpha. \quad (4)$$

Решение системы уравнений с постоянными коэффициентами (3) имеет вид

$$z(t) = \exp(-\lambda_1 t) \frac{1}{2} \left[z(0) \left(1 - i \frac{2\Delta\Omega}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - iz^*(0) \frac{\delta P_m}{P_k(\lambda_1 - \lambda_2)} \right]$$

$$+ \exp(-\lambda_2 t) \frac{1}{2} \left[z(0) \left(1 + i \frac{2\Delta\Omega}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + iz^*(0) \frac{\delta P_m}{P_k(\lambda_1 - \lambda_2)} \right], \quad (5)$$

где $\lambda_{1,2} = \delta \left[1 \mp \sqrt{(P_m^2/P_k^2) - (\Delta\Omega/\delta)^2} \right]$ — показатели Ляпунова.

Вблизи порога $P_m = P_b - \Delta P, \quad \Delta P > 0, \quad \Delta P \ll P_b,$
 $P_b^2 = P_k^2 [1 + (\Delta\Omega/\delta)^2]$ показатель $\lambda_1 = \delta \left[1 - \sqrt{(P_m^2/P_k^2) - (\Delta\Omega/\delta)^2} \right] =$
 $= \delta \left[1 - \sqrt{1 - ((P_b^2/P_k^2) - (P_m^2/P_k^2))} \right] \approx \delta(\Delta P P_b/P_k^2)$ мал, поэтому первое слагаемое в формуле (5) будет доминировать на временах $t = \lambda_1^{-1} \approx [\delta(\Delta P P_b/P_k^2)]^{-1} \gg \delta^{-1}$ и описывать субгармоническую компоненту излучения пузырька.

Подставляя явные выражения для начальных значений $z(0)$, $z^*(0)$, получаем

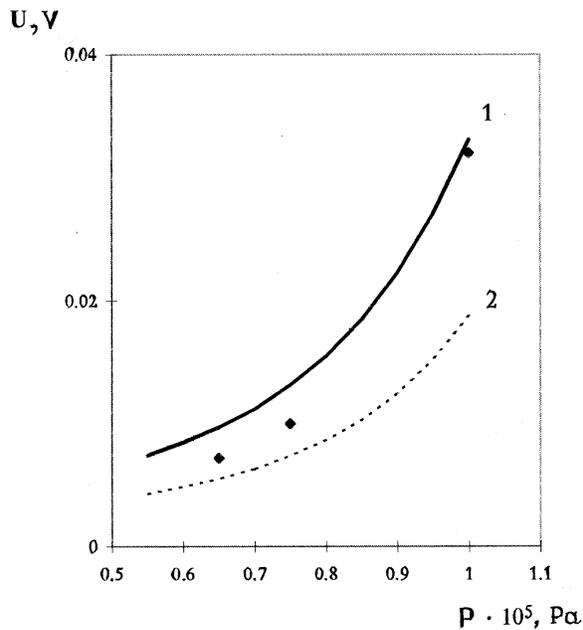
$$a(t) \cos(\Omega_0 t + \vartheta(t)) = a(0)(P_b/P_k) \exp\left[-\delta t(\Delta P P_b/P_k^2)\right] \\ \times \operatorname{Re}\left\{\exp\left[i((\omega_p/2)t + \arctg(2\operatorname{tg}\alpha))\right] 0.5 \left[\exp i(\arctg(\Delta\Omega/\delta)) \right. \right. \\ \left. \left. - \exp i(\pi/2 - 2\arctg(2\operatorname{tg}\alpha) + \alpha)\right]\right\}. \quad (6)$$

Как следует из этого выражения, эффективность возбуждения слабоустойчивой компоненты собственных колебаний зависит от фазы внешнего поля α . Наиболее существенно это обстоятельство проявляется при $P_m < P_k$, а для непрерывного распределения пузырьков по размерам именно P_k является экспериментально наблюдаемым порогом возбуждения субгармонической компоненты. Условия малости затухания принимают в этой области вид $(P_k - P_m) \ll P_k$, $(\Delta\Omega)^2 \ll \delta^2$. Возбуждение будет крайне неэффективным для волны накачки с фазой, близкой к $\pi/2$. Как следует из (6), разность экспонент в квадратных скобках имеет в этом случае порядок $\sim (\Delta\Omega)/\delta$. Следует отметить, что в ставших классическими работах Лаутерборна [12–14], посвященных анализу численными методами нелинейной динамики пузырька, фаза внешнего поля полагалась именно равной $\pi/2$.

Проведем сопоставление с имеющимися экспериментальными данными [6]. Зондирование области, в которой с помощью электролиза создавались пузырьки с размерами $(5-10) \cdot 10^{-6}$ м, производилось ультразвуковыми импульсами с частотой заполнения 1.2 МГц и длительностью $10 \mu\text{s}$. С помощью селективного приемника проводились измерения уровня сигнала на частоте 0.6 МГц. Их результаты указывают на отсутствие явно выраженного порога генерации в диапазоне амплитуд зондирующих импульсов $(0.25-1) \cdot 10^5$ Па. На рисунке эти данные изображены черными квадратиками.

Спектральная плотность излученного пузырьком субгармонического сигнала при воздействии частотнозаполненного импульса длительностью T пропорциональна

$$S(\omega_p/2) \sim \frac{(1 - \exp[-T(\delta - \lambda_1)])^2 + 2(1 - \cos(\Delta\Omega T)) \exp[-T(\delta - \lambda_1)]}{((\delta - \lambda_1)/\delta)^2 + (\Delta\Omega/\delta)^2}. \quad (7)$$



Коэффициент затухания пузырька δ , резонансного на частоте 0.6 МГц, согласно [15] составляет $\delta \sim 4 \cdot 10^5$ (1/с). Порог субгармонического резонанса P_k при этом будет равен (см. определение (3) или более точное выражение, учитывающее вклад поверхностного натяжения, [10]) $P_k \sim 0.8 \cdot 10^5$ Па. Поскольку значение концентрации пузырьков не определялось в ходе обсуждаемых экспериментов, мы воспользовались этой величиной как подгоночным параметром и нанесли зависимость уровня субгармонического сигнала от давления, исходя из выражения (7), для различных значений расстройки. Кривая 1 отвечает точному резонансу $\Delta\Omega = 0$, зависимость 2 соответствует $\Delta\Omega/\delta = 0.5$. Качественное согласие является определенно аргументом в пользу предлагаемого объяснения, количественное же сопоставление требует последовательного суммирования вклада отдельных пузырьков и численного решения уравнения Рэлея, поскольку значительная величина порога ограничивает точность используемого асимптотического разложения.

В заключение отметим, что хотя представленные результаты относятся к конкретной физической модели, тот факт, что широкий класс нелинейных динамических систем, описываемых, например, уравнением Дюффинга, имеет такую же структуру "укороченного" уравнения (3), позволяет прогнозировать затягивание переходных процессов в этих системах вблизи порога субгармонического резонанса.

Авторы выражают благодарность В.А. Буланову за плодотворное обсуждение.

Список литературы

- [1] *Esche R.* // *Acustica*. 1952. V. 2. P. 208–218.
- [2] *Флинн Г.* Физика акустической кавитации в жидкости. // Физическая акустика. М.: Мир, 1967.
- [3] *Neppiras E.A.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1969. V. 46. N 2. P. 587–601.
- [4] *Eller A., Flynn H.G.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1969. V. 46. N 3. P. 722–727.
- [5] *Leighton T.G.* // *The Acoustical Bubble*. London: Academic Press, 1994.
- [6] *Мансфельд А.Д., Рейман А.М.* // Ультразвуковая диагностика. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С. 151–161.
- [7] *Кирилов А.Г., Мансфельд А.Д., Рейман А.М., Чичагов П.К.* // Проблемы нелинейной акустики. Ч. 2. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1987. С. 32–34.
- [8] *Losberg O., Hovem J.M., Aksum B.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 99. N 3. P. 1366–1369.
- [9] *Prosperetti A.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1974. V. 56. N 3. P. 878–885.
- [10] *Prosperetti A.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. N 1. P. 810–821.
- [11] *Максимов А.О.* // *ЖТФ*. 1988. Т. 58. № 4. С. 822–825.
- [12] *Lauterborn W.* // *Acustica* 1969/70. V. 22. P. 238–239.
- [13] *Lauterborn W.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1976. V. 59. N 1. P. 283–293.
- [14] *Cramer E., Lauterborn W.* // *Acustica*. 1981. V. 49. P. 280–287.
- [15] *Church C.J.* // *Acoust. Soc. Am.* 1994. V. 97. N 3. P. 1501–1521.