

01

Управление хаосом в неавтономных системах с квазипериодическим возбуждением

© А.Ю. Жалнин

Институт радиотехники и электроники РАН (Саратовский филиал)

Поступило в Редакцию 26 января 1999 г.

Предлагается процедура управления хаосом в квазипериодически возбуждаемых системах путем стабилизации неустойчивого тора или создания нового посредством малого воздействия. Для этого управляемая система синхронизируется с аналогичной, но находящейся в состоянии устойчивого квазипериодического движения. Метод иллюстрируется на квазипериодически возмущаемых логистическом отображении и осцилляторе Дуффинга.

I. Введение

Управление хаосом является одним из наиболее практически применимых направлений нелинейной физики. Наиболее употребительным является метод стабилизации неустойчивых периодических орбит Отта–Гребоджи–Йорка (OGY) [1] с различными модификациями [2–3]. Его работоспособность продемонстрирована на большом числе автономных и периодически возбуждаемых систем. Однако в стороне осталась проблема управления в системах, находящихся под более сложным, многочастотным воздействием. Поиску путей ее решения в простейшем случае бигармонического воздействия с двумя некрратными частотами и посвящена данная работа.

Рассмотрим особенности, которые накладывает на задачу управления квазипериодичность воздействия. Во-первых, она приводит к отсутствию неустойчивых периодических орбит, которые можно было бы стабилизировать. Выходом из положения является использование неустойчивого тора, чье существование в фазовом пространстве рассматриваемых систем возможно. Он рождается в результате таких бифуркаций, как "удвоение" и потеря симметрии тора, а после перехода к хаосу ока-

зывается вложенным в хаотический аттрактор или существует вне его. Однако стандартная процедура управления требует либо знания орбиты, подлежащей стабилизации, либо наличия осциллятора, генерирующего подходящий опорный сигнал [1,2]. Тор же является более топологически сложным объектом, чем цикл, и для его восстановления требуется модель глобальной динамики системы. Само конструирование этой модели и поиск неустойчивого тора представляется достаточно сложной задачей. Поэтому более продуктивен поиск подходящего опорного осциллятора. При этом а priori представляется разумным использовать в качестве опорной орбиты для стабилизации неустойчивого тора эволюционно связанный с ним тор, существовавший в данной системе при других параметрах (до потери устойчивости). Цель показать возможность реализации этой идеи и преследует данная работа. Предлагается процедура стабилизации неустойчивого тора или создания в его окрестности новой орбиты посредством синхронизации управляемой системы с аналогичной, но находящейся в состоянии устойчивого квазипериодического движения. Она иллюстрируется на квазипериодически возмущаемых логистическом отображении и осцилляторе Дуффинга.

II. Стабилизация неустойчивой инвариантной кривой отображения

Рассмотрим двумерное отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \theta_n) = \lambda - x_n^2 - \varepsilon \cos 2\pi\theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega, \text{ mod } 1,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ — ”золотое сечение”. Это отображение демонстрирует бифуркацию удвоения тора и переход к странному нехаотическому аттрактору и хаосу. При этом возникающая при удвоении тора неустойчивая инвариантная кривая $x = \varphi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$ оказывается вложенной в хаотический аттрактор (рис. 1, а). Для того чтобы заставить инвариантную кривую, мы можем модифицировать отображение (1) следующим образом:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \theta_n) + g(x_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega, \text{ mod } 1,\end{aligned}\tag{2}$$

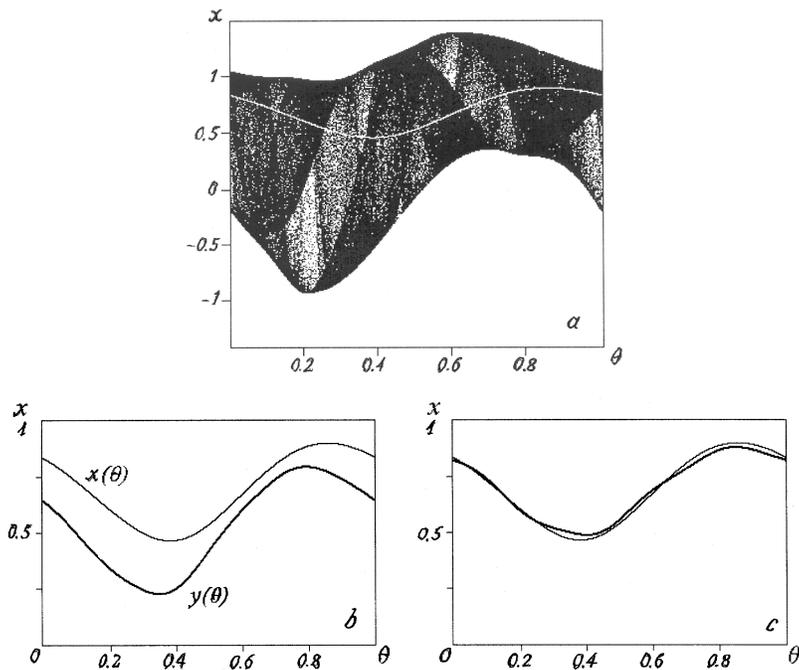


Рис. 1. *a* — хаотический аттрактор и вложенный в него неустойчивый тор отображения (1) ($\lambda = 1.2$, $\varepsilon = 0.2$); *b* — тонкая линия $x(\theta)$ — неустойчивый тор из области хаотической динамики пространства параметров, подлежащей стабилизации ($\lambda = 1.2$, $\varepsilon = 0.2$), толстая линия $y(\theta)$ — устойчивый тор отображения (1), который используется в качестве опорной траектории при управлении ($\lambda = 0.85$, $\varepsilon = 0.2$); *c* — тонкая линия — неустойчивый тор отображения (1), толстая линия — тор отображения (3.1, 3.3), полученного из (1) в результате применения процедуры управления (при тех же значениях параметров).

где функция $g(x, \theta)$ есть управляющее воздействие. Она должна удовлетворять следующим двум условиям:

$$g(\varphi(\theta), \theta) = 0,$$

$$\int_0^1 \ln |f'_x(\varphi(\theta), \theta) + g'_x(\varphi(\theta), \theta)| d\theta < 0.$$

Первое условие означает, что при приближении траектории к инвариантной кривой управляющее воздействие стремится к нулю, а второе — что средний ляпуновский показатель вдоль инвариантной кривой отрицателен и инвариантная кривая становится устойчивой. Функция $g(x, \theta)$ может быть выбрана в стандартной форме пропорционального управляющего воздействия

$$g(x, \theta) = C(x - \varphi(\theta)),$$

где C — параметр связи. Далее в соответствии с основной идеей метода заметим, что инвариантные кривые отображения (1) в различных областях пространства параметров довольно похожи, как мы можем видеть на рис. 1, *b*, где тонкая линия $x(\theta)$ есть неустойчивый тор отображения (1) из области хаоса, а $y(\theta)$ — устойчивый тор из некоторой другой области. Визуально нетрудно заметить, что имеет место следующее соотношение:

$$x(\theta) \approx Sy(\theta + \tau) + B,$$

и кривая из области своей стабильности может быть с достаточной степенью точности приведена к форме неустойчивой кривой из области хаоса посредством пропорционального сжатия/растяжения по оси x и сдвига параллельно координатным осям. Таким образом функция $g(x, \theta)$ принимает вид

$$g(x_n, \theta_n) = C(x_n - Sy_n(\theta_n + \tau) - B),$$

где параметры S и B определяют соответственно сжатие/растяжение и параллельный сдвиг инвариантной кривой, а τ — фазовый сдвиг. Окончательно отображение можно записать в виде

$$x_{n+1} = \lambda_1 - x_n^2 + \varepsilon \cos 2\pi\theta_n + C(x_n - Sy_n - B), \quad (3.1)$$

$$y_{n+1} = \lambda_2 - y_n^2 + \varepsilon \cos 2\pi(\theta_n + \tau), \quad (3.2)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega, \text{ mod } 1, \quad (3.3)$$

где λ_1 — значение параметра, при котором в отображении (1) присутствуют хаос и неустойчивый тор, а λ_2 — значение, при котором существует устойчивый тор, используемый в качестве опорной траектории.

Результаты применения алгоритма стабилизации представлены на рис. 1, *c*. Тонкая линия — неустойчивая инвариантная кривая отображения (1), толстая линия — устойчивый тор, полученный в результате

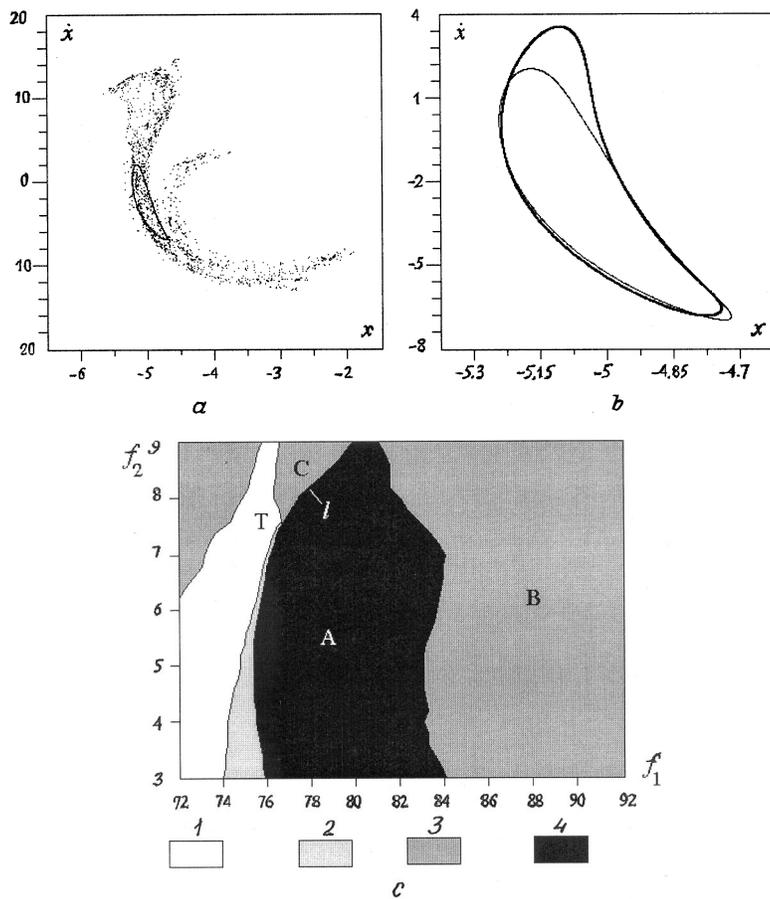


Рис. 2. Сечение хаотического аттрактора и неустойчивого тора бигармонически возбуждаемого осциллятора Дуффинга ($f_1 = 78$, $f_2 = 5$, $\lambda = 0.1$, $\omega_1 = 1.5$) (a). Результаты применения процедуры управления: тонкая линия — сечение опорного тора, толстая — стабилизированного (при тех же параметрах, что и (a)) (b). Фрагмент сечения пространства параметров бигармонически возбуждаемого осциллятора Дуффинга ($\lambda = 0.1$, $\omega_1 = 1.5$) (c). 1 — симметричный тор, 2 — асимметричный тор, 3 — хаос, 4 — область, в которой возможно управление.

применения процедуры управления. Последние две линии практически совпадают. Точность их совпадения зависит от удачного выбора параметров используемого опорного отображения (3.2–3.3) и параметров связи. Зависимость управляющего воздействия спадает до уровня, составляющего не более 5% от вариации параметров, необходимой, чтобы перевести управляемое отображение в область регулярной динамики, что позволяет говорить о решении задачи управления.

III. Потокковая модель

Поскольку одномерное необратимое логистическое отображение не является сечением Пуанкаре какого-либо потока, необходимо продемонстрировать возможность применения предлагаемого способа управления на модели в виде системы дифференциальных уравнений отдельно. В качестве таковой возьмем бигармонически возбуждаемый осциллятор Дуффинга, имеющий много физических аналогов:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + x + x^3 = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t, \quad (4)$$

где $\omega_1/\omega_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$. Поскольку осциллятор Дуффинга обладает симметричным потенциалом, то переходу к хаосу в этой системе должна предшествовать бифуркация потери симметрии тора. Возникающий при этом неустойчивый тор впоследствии оказывается вложенным в хаотический аттрактор (рис. 2, а). Для его стабилизации модифицируем уравнение (4) путем добавления управляющего воздействия в форме, известной как *Continuous Proportional Feedback* [2]:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + x + x^3 = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t + g(x, t), \quad (5)$$

$$g(x, t) = C(x - Sy(t)),$$

где $y(t)$ — опорный сигнал, полученный путем численного интегрирования уравнения (4) при значениях параметров, соответствующих режиму устойчивого симметричного тора. Эти параметры находятся путем подборки: амплитуда основного сигнала f_1 уменьшается, пока мы не попадем в режим симметричного тора, после чего более тонкая подстройка осуществляется при вариации амплитуды f_2 . При этом в силу симметрии системы параметры B и τ (см. (3)) оказываются

равными нулю, а из-за малой чувствительности тора к вариациям параметров S — близко к единице.

Результаты применения процедуры управления представлены на рис. 2, *b*. Из него видно, что полученный тор и опорная орбита не совсем совпадают. Однако управляющее воздействие не превосходит 8% вариации главного управляющего параметра f_1 , необходимой для приведения системы в состояние с регулярной динамикой, и, следовательно, в данном случае можно говорить об управлении хаосом.

То, насколько широки области применимости предлагаемого способа управления, можно оценить из рис. 2, *c*. В области A возможно применение вышеописанной процедуры управления. В области B этому препятствует возрастающая деформация неустойчивого тора, так как эта область весьма удалена от области существования устойчивого симметричного тора. В области C управление не удастся из-за особенностей устройства пространства параметров, налагаемых квазипериодичностью воздействия. Линия бифуркации потери симметрии тора обрывается в точке T — критической точке коразмерности 2. Таким образом, в системе возможен переход к хаосу без потери симметрии и рождения неустойчивого тора (выше точки T). Следовательно, область хаоса оказывается разделенной на две части: $A-B$ (неустойчивый тор есть) и C (тора нет). Эти части разделены линией l , на которой происходит разрушение неустойчивого тора за счет (предположительно) внутреннего касания границ хаотического аттрактора. Таким образом, в области C отсутствует объект для применения процедуры стабилизации.

Заключение

Представленные результаты свидетельствуют о работоспособности предложенной процедуры управления хаосом в системах, находящихся под квазипериодическим воздействием, с помощью стабилизации неустойчивого тора.

Предложенный метод может быть использован для управления хаосом в реальных физических системах вследствие универсальности структур бифуркационных множеств квазипериодически возбуждаемых систем различной природы, что было продемонстрировано в работе [4] на примере квазипериодически возбуждаемых логистического отображения и диодного резонатора в окрестности критической точки

окончания линии бифуркации удвоения тора. Под универсальностью подразумевается наличие идентичных областей существования регулярной и хаотической динамики и неустойчивых орбит, и бифуркационных переходов. Это дает возможность применить описанный метод к системе двух однонаправленно связанных *LR-диод* контуров.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 96-02-16755, а также Федеральной программой "Интеграция", грант № 696.3.

Список литературы

- [1] Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1196–1199.
- [2] Pyragas K. // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 421–428.
- [3] Астахов В.В., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И. и др. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 11. С. 1323–1331.
- [4] Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С. и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 6. С. 3–20.