

01;08

Модель нелинейного потенциала нулевого радиуса для рассеяния интенсивности звука резонатором Гельмгольца

© О.С. Першенко, И.Ю. Попов

С.-Петербургский государственный институт точной механики и оптики
(Технический университет)

Поступило в Редакцию 22 октября 1998 г.

Для описания рассеяния интенсивной звуковой волны резонатором Гельмгольца предложена модель нелинейных (для учета гидродинамических эффектов в горле резонатора) потенциалов нулевого радиуса. Рассматривается случай, когда волна линейна всюду, за исключением горла резонатора. Проведено сравнение с результатами других моделей.

Задача о резонаторе Гельмгольца, т. е. резонаторе с малым отверстием, была впервые поставлена Рэлеем в начале века [1]. За прошедшее время разработано много подходов к проблеме. К настоящему моменту получены (со строгим математическим обоснованием) главные члены асимптотического разложения (по ε , малому диаметру отверстия) для решения задачи рассеяния (см., например, обзор [2]). Поскольку задача сложна, для ее решения предлагались различные модели. Мы будем действовать в рамках так называемой модели щелей нулевой ширины, основанной на теории расширений операторов [5] и аналогичной методу потенциалов нулевого радиуса в квантовой механике [3], [4]. Модельная задача значительно проще основной, но тем не менее позволяет получать главные члены рассматриваемого асимптотического разложения. Кроме того, она позволяет использовать мощный аппарат теории операторов. Поэтому представляется интересным расширение области применения модели, что и является целью данной работы. Отметим, что все упомянутые выше подходы развивались для линейного резонатора Гельмгольца. Однако известно, что в случае интенсивного звука резонатор не является линейным [6–8]. Это связано с необходимостью учета гидродинамических эффектов при описании колебаний в горле резонатора. В [9–11] предложены некоторые модели такого

резонатора. В настоящей работе мы представляем другую модель, которую можно назвать моделью нелинейного потенциала нулевого радиуса. Сделано сравнение с результатами [9]. Предлагаемая модель является естественным обобщением соответствующей линейной модели, поэтому мы сначала кратко опишем линейный вариант [12].

Пусть Ω^{in} — ограниченная замкнутая область в \mathbf{R}^3 , и Ω^{ex} — полуплоскость, $\Omega^{ex} \cap \Omega^{in} = r_0$. Рассмотрим оператор Лапласа $-\Delta = -(\Delta^{in} \oplus \Delta^{ex})$ с граничным условием Неймана. Сузим его на множество гладких функций, обращающихся в нуль в точке r_0 . Замыкание полученного оператора будет симметрическим с индексами дефекта $(2, 2)$. Его самосопряженные расширения и дают интересующую нас модель. Не описывая здесь всех возможных расширений (см. [5], [12]), рассмотрим лишь одно, наиболее естественное с физической точки зрения, область определения которого состоит из всех элементов вида:

$$u = u_0^{in,ex} + \xi_+^{in,ex} G_+^{in,ex}(r, r_0, k_0), \quad r \in \Omega^{in,ex},$$

где $u_0^{in}(u_0^{ex})$ из пространства Соболева $H_2(\Omega^{in})(H_2(\Omega^{ex}))$, $G_+^{in,ex}$ — функция Грина для области $\Omega_+^{in,ex}$, k_0^2 — некоторое отрицательное число (регулярное значение оператора). Кроме того, имеет место соотношение:

$$\xi_+^{in} = \xi_+^{ex}, \quad \xi_-^{in} = -\xi_-^{ex}, \quad (1)$$

где $\xi_-^{in,ex} = u_0^{in,ex}(r_0)$. Для данного расширенного (модельного) оператора решение задачи рассеяния плоской волны имеет вид [5], [12]:

$$\psi(r, \nu, k) = \begin{cases} \psi_0(r, \nu, k) + b_{ex} G^{ex}(r, r_0, k), & r \in \Omega^{ex}, \\ b_{in} G^{in}(r, r_0, k), & r \in \Omega^{in}, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\psi_0(r, \nu, k) = e^{ik(r,\nu)} + e^{ik(r,\nu^*)}$$

есть сумма падающей и отраженной плоских вол (при отсутствии отверстия), $k\nu(k\nu^*)$ — волновой вектор падающей (отраженной) волны,

$$b_{in} = b_{ex} = \frac{\psi_0(r_0, \nu, k)}{D_{in} + D_{ex}},$$

$$D_{in,ex} = (G^{in,ex}(r, r_0, k) - G^{in,ex}(r, r_0, k_0)) \Big|_{r=r_0}.$$

Заметим, что

$$D_{in} = (\lambda - \lambda_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_n(r_0)|^2}{(\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - \lambda_0)},$$

где $\lambda_0 = k_0^2$, λ_n — собственное значение оператора — Δ^in , Ψ_n — соответствующая собственная функция.

В предыдущих работах было показано, что модельный параметр λ_0 может быть выбран таким образом, что модельное решение даст главный член асимптотики по ширине щели ε соответствующего решения ”реальной” задачи с отверстием диаметром ε [12].

Теперь перейдем к нелинейному варианту модели. Отметим, что при анализе рассеяния интенсивного звука резонатором Гельмгольца мы имеем нелинейные эффекты лишь в горле резонатора [9]. Поэтому в модели мы введем лишь одну нелинейность — ту, которая отвечает ”нелинейному” точечному отверстию. Начало построения такое же, как раньше, но само расширение мы строим по-другому. Мы выбираем нелинейную связь ξ_{\pm}^{in} , ξ_{\pm}^{ex} (т.е. расширенный оператор будет нелинейным). В линейном случае в качестве одного из правил отбора расширений было требование их самосопряженности. В нелинейном случае его уже нет. Принимая во внимание, что при малых амплитудах звуковой волны резонатор должен быть линейным, мы рассмотрим квадратичную нелинейность, которая будет возмущением линейного самосопряженного расширения (1):

$$\begin{aligned} \xi_+^{in} &= \xi_+^{ex} + \alpha(\xi_+^{ex})^2, \\ \xi_-^{in} &= -\xi_-^{ex} + \beta(\xi_-^{ex})^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где α , β — некоторые постоянные. Решение задачи рассеяния плоской волны получаем в форме

$$\psi(r, \nu, k) = \begin{cases} \psi_0(r, \nu, k) + a_{ex}G^{ex}(r, r_0, k), & r \in \Omega^{ex}, \\ a_{in}G^{in}(r, r_0, k), & r \in \Omega^{in}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\psi_0(r, \nu, k)$ то же, что и в линейном случае. Учитывая (3), находим

$$\begin{aligned} a_{in} &= a_{ex} + a_{ex}^2, \\ (a_{ex} + a_{ex}^2)D_{in} &= -a_{ex}D_{ex} - \psi_0 + \beta(a_{ex}^2D_{ex}^2 + 2\psi_0D_{ex}a_{ex} + \psi_0^2), \end{aligned}$$

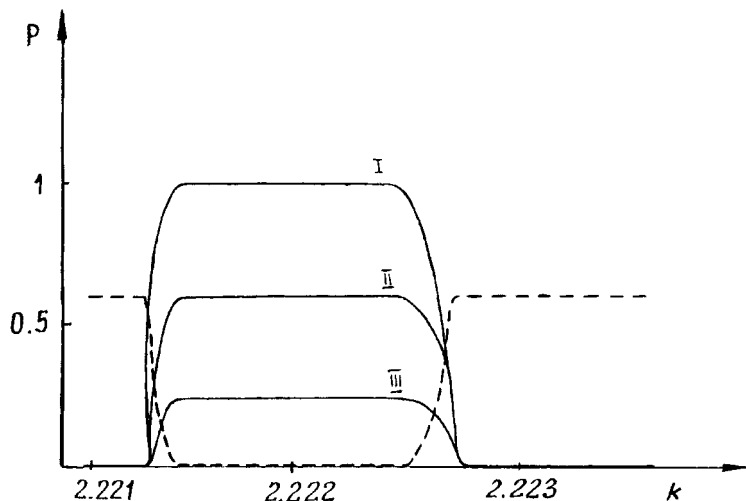


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения от k в окрестности резонансного значения 2.22144 (в безразмерной форме). Значения параметров: I — $k_0 = 7$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$; II — $k_0 = 7$, $\alpha = 1.3$, $\beta = 1$; III — $k_0 = 7$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Пунктирная кривая соответствует второму (“нефизическому”) решению при следующих значениях параметров: $k_0 = 7$, $\alpha = 1.3$, $\beta = 1$.

где $\psi_0 = \psi_0(r_0, \nu, k)$. Следовательно,

$$a_{ex} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4\psi_0(\beta\psi_0 - 1)(\beta D_{ex}^2 - \alpha D_{in})}}{2(\beta a_{ex}^2 - \alpha D_{in})}, \quad (5)$$

$$A = 2\beta\psi_0 D_{ex} - D_{ex} - D_{in}.$$

Таким образом, имеем два решения. Если

$$(2\beta\psi_0 D_{ex} - D_{ex} - D_{in})^2 = 4\psi_0(\beta\psi_0 - 1)(\beta D_{ex}^2 - \alpha D_{in}),$$

то они совпадают. Соответствующее значение k — точка бифуркации. Коэффициент P , $P = |a_{ex}/\phi_0|^2$, характеризует поглощение мощности. Пусть k_1^2 — первое положительное собственное значение $-\Delta_{in}$ (соответствующее первой резонансной частоте). При выборе знака “-” в (5) имеем $P = 1$ на резонансной частоте. Кроме того, при уменьшении

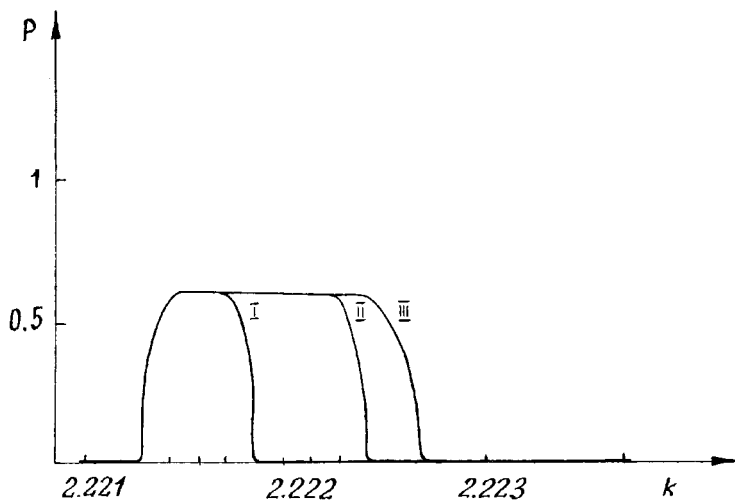


Рис. 2. Зависимость коэффициента поглощения от k в окрестности резонансного значения 2.22144 (в безразмерной форме). Значения параметров: *I* — $k_0 = 3$, $\alpha = 1.3$, $\beta = 1$; *II* — $k_0 = 6$, $\alpha = 1.3$, $\beta = 1$; *III* — $k_0 = 7$, $\alpha = 1.3$, $\beta = 1$.

нелинейности это решение стремится к тому, что получается в линейном случае, т. е. данный выбор знака отвечает общей физической ситуации. Второе решение на резонансе дает $P = 1(\alpha^2\psi_0^2)$. Вообще говоря, это нефизическое решение. Однако, возможно, оно отвечает другой физической ситуации — наличию акустически активной среды (например, пузырьки в жидкости) в зоне отверстия. Поведение этого решения сходно с тем, что описано в работах по "акустическому лазеру" [13].

Для решения первого типа зависимость $K(k)$ около резонансной частоты при подходящем выборе параметров аналогична той, что приведена в [9]. Выбор параметров эмпирический как в нашей модели, так и в модели [9]. Разница в том, что наша модель дает, вообще говоря, более острые резонансные пики. Зависимость от модельных параметров α и k_0 показана на рис. 1 и 2 соответственно. Влияние параметра β аналогично влиянию α , но более слабое. Параметр α характеризует силу нелинейности, параметр k_0 связан с шириной отверстия.

Работа частично поддержана грантом РФФИ.

Список литературы

- [1] *Lord Rayleigh O.M.* // Proc. Royal. Soc. London A. 1916. N 638. P. 265–275.
- [2] *Гадильшин Р.Р.* // УМН. 1997. Т. 52. Вып. 1. С. 3–76.
- [3] *Павлов Б.С.* // УМН. 1987. Т. 42. В. 6. С. 99–131.
- [4] *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* // Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. 240 с.
- [5] *Роров Л.Ю.* // J. Math. Phys. 1992. V. 33. N 11. P. 3794–3801.
- [6] *Ingard U.* // J. Acous. Soc. Amer. 1953. V. 25. P. 1037–1061.
- [7] *Thurston G.B., Hargrove L.E., Cook B.D.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29. N 9. P. 992–1001.
- [8] *Cummings A.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. N 4. P. 942–952.
- [9] *Руденко О.В., Хирных К.Л.* // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 527–534.
- [10] *Заикин А.А., Руденко О.В.* // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 378–382.
- [11] *Keller J.J., Zauner E.* // ZAMP. 1995. V. 46. N 3. P. 297–327.
- [12] *Попов И.Ю.* // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1366–1390.
- [13] *Zavtrak S.T.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 3. P. 2480–2484.