

01

Реконструкция динамических систем по сигналам малой длительности

© А.Н. Павлов, Н.Б. Янсон, Т. Капитаниак, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет
Технический университет, г. Лодзь, Польша

Поступило в Редакцию 11 января 1999 г.

Демонстрируется принципиальная возможность построения динамического описания методом глобальной реконструкции по сигналам малой длительности (менее 10 базовых периодов колебаний), позволяющая использовать технику реконструкции для оценки метрических и динамических характеристик режимов функционирования динамических систем по коротким реализациям.

Один из способов изучения различных процессов и явлений в реальной жизни состоит в построении и исследовании их математических моделей. Традиционно модель строится с учетом всех наиболее существенных факторов, влияющих на поведение системы. Задача моделирования существенно усложняется, если информация об объекте исследования ограничена одномерной реализацией одной из координат состояния системы. В этом случае для построения математической модели в 1987 г. был предложен алгоритм глобальной реконструкции [1,2]. Данный алгоритм позволяет получать динамическое описание в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка или дискретных отображений и реализуется в 2 этапа. На первом этапе определяется размерность пространства вложения и реконструируется аттрактор по скалярному временному ряду $a_i = a(i\Delta t)$, $i = 1, \dots, N$. На втором осуществляется априорное задание общего вида уравнений и конкретизация эволюционного оператора методом наименьших квадратов. Позже данный метод был усовершенствован [3–5], а также были разработаны новые подходы к моделированию по одномерной реализации [6,7].

Предположим, что исследуемая система допускает описание в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad (1)$$

где \mathbf{F} — нелинейная вектор-функция, \mathbf{x} — вектор состояния. Существует несколько способов восстановления вектора \mathbf{x} по временному ряду, наиболее популярны из которых следующие два:

$$\mathbf{x}(t) = (a(t), a(t + \tau), \dots, a(t + (n - 1)\tau)), \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(t) = (a(t), da(t)/dt, \dots, d^{n-1}a(t)/dt^{n-1}). \quad (3)$$

Для решения задачи глобальной реконструкции априори выбирается вид вектор-функции \mathbf{F} в уравнении (1), путем численного дифференцирования скалярного временного ряда a_i вычисляются значения dx_i/dt , после чего методом наименьших квадратов конкретизируется оператор эволюции.

Одной из основных проблем в данной задаче является выбор правых частей (1). Поскольку невозможно заранее указать даже приближительный вид функций F_j , $j = 1, \dots, n$, их представляют в виде разложения по некоторому базису, ограничиваясь конечным числом членов. В простейшем случае задание F_j может осуществляться полиномами степени ν :

$$F_j(\mathbf{x}_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_{k,i}^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^n l_k \leq \nu, \quad (4)$$

где $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$ — неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. Именно такое представление будет использовано в данной работе.

Обратим внимание, что восстановленная модель будет иметь громоздкую форму и содержать большое (обычно несколько десятков) количество коэффициентов $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$. Сама процедура глобальной реконструкции, включающая тщательный подбор параметров алгоритма на всех его стадиях, очень кропотлива и трудоемка. При реализации данной процедуры возникает вопрос о том, что дает исследователю полученная модель в случае успешной реконструкции. Практический интерес при анализе временных рядов представляет информация о характеристиках режима функционирования динамической системы, порождающей данный временной ряд. Подразумевая, что в изучаемой динамической системе существует аттрактор, такими характеристиками

являются спектр ляпуновских показателей и размерность. Обычно их вычисляют стандартными алгоритмами (например, [8,9]) при условии, что длина реализации достаточно велика, чтобы по фазовой траектории можно было судить о структуре изучаемого аттрактора. При работе с принципиально короткими сигналами (длительностью менее 10 базовых периодов колебаний) привлечение данных методов является некорректным, поскольку за время наблюдения фазовая траектория не успевает посетить все области аттрактора и/или возвращается в эти области недостаточно часто [10]. В настоящей работе мы рассмотрим возможность применения в таких ситуациях для оценки характеристик аттрактора алгоритма глобальной реконструкции. С этой точки зрения принципиальную важность приобретает вопрос о влиянии длительности сигнала (числа точек N при фиксированном шаге дискретизации Δt) на результат моделирования.

В работе [11], применяя алгоритм реконструкции к одномерным реализациям, полученным при интегрировании уравнений генератора Ван-дер-Поля

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = a(1 - bx^2)y - x, \quad a = 1.0, \quad b = 0.3 \quad (5)$$

и системы Ресслера

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(y + z), & \frac{dy}{dt} &= x + ay, & \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c), \\ a &= 0.15, & b &= 0.2, & c &= 10.0, \end{aligned} \quad (6)$$

а также к ряду других известных модельных систем, мы убедились в том, что зависимость от N каждого коэффициента аппроксимации C_{j,l_1,l_2,\dots,l_n} в отдельности демонстрирует сходимость к некоторому предельному значению $C_{j,l_1,l_2,\dots,l_n}^0$ при увеличении N . Два примера проиллюстрированы на рис. 1, a, b .

Введем величину относительной ошибки определения коэффициента, обусловленной малой длиной временного ряда $\delta_N^{j,l_1,l_2,\dots,l_n} = |C_{j,l_1,l_2,\dots,l_n} - C_{j,l_1,l_2,\dots,l_n}^0| / |C_{j,l_1,l_2,\dots,l_n}^0|$. Задав величину допустимой ошибки $\delta_{\max}^{j,l_1,l_2,\dots,l_n}$, по огибающей $C_{j,l_1,l_2,\dots,l_n}(N)$ можно определить N_{\min} , такое, что для любого $N > N_{\min}$ значение $\delta_N^{j,l_1,l_2,\dots,l_n}$ будет меньше $\delta_{\max}^{j,l_1,l_2,\dots,l_n}$. Оценка N_{\min} позволяет указать минимальную длину реализации, необходимую для вычисления коэффициентов аппроксимации с заранее выбранной точностью.

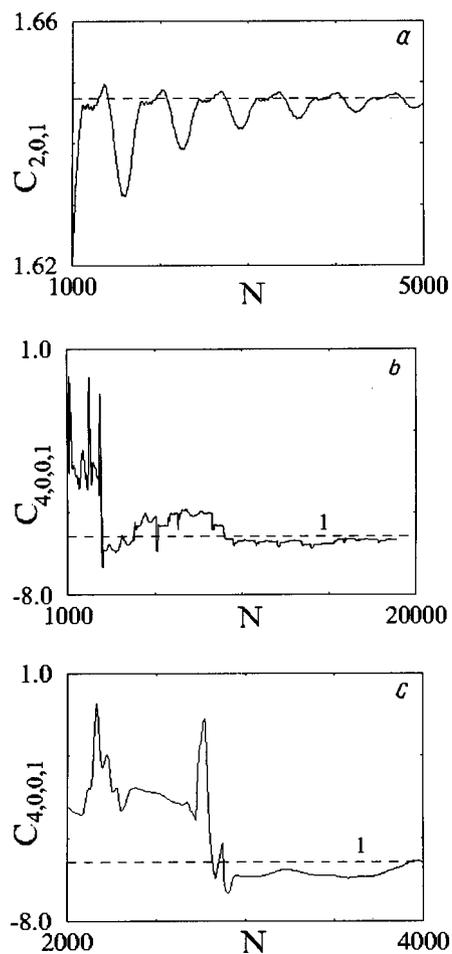


Рис. 1. Зависимости произвольно выбранных коэффициентов аппроксимации нелинейностей в правых частях уравнений реконструируемой модели от числа точек временного ряда: *a* — для генератора Ван-дер-Поля ($n = 2$, реконструкция по 1-й координате, $\Delta t = 0.01$, метод задержки, $\nu = 3$); *b*, *c* — для системы Ресслера ($n = 4$, реконструкция по 1-й координате, $\Delta t = 0.01$, две координаты восстанавливались методом задержки, одна — численным дифференцированием, $\nu = 3$). Линия 1 соответствует значению $C_{4,0,0,1}^0 \approx -5.9$.

Заметим, что поведение восстановленных коэффициентов (сходимость) не зависит от того, насколько хорошо выбранная априори форма модели способна описать режим функционирования исходной системы. В дальнейшем изложении будем рассматривать только такие формы правых частей, при которых решение реконструированной системы способно описать исходный режим колебаний достаточно точно. Заметим также, что решение задачи реконструкции системы с периодическим режимом представляется нам довольно тривиальным. Кроме того, изучая отрезок реализации, демонстрирующий всего несколько осцилляций, невозможно сказать, соответствует он хаотическому режиму или сложному периодическому. Поэтому мы ограничимся только рассмотрением случая, когда исследуемый режим колебаний системы является хаотическим.

Рассмотрим конкретный пример — систему Ресслера (6). При указанных значениях a , b и c данная система демонстрирует хаотическое поведение с аттрактором, характеризующимся следующим спектром ляпуновских показателей: $\lambda_1 \approx 0.09$, $\lambda_2 = 0.0$, $\lambda_3 \approx -10.0$. Выберем в качестве исследуемого сигнала координату $x(t)$, дискретизованную с шагом $\Delta t = 0.01$. Будем решать задачу моделирования для данного сигнала при различных N ($N \in [2000 \div 4000]$, что соответствует $\approx 3 \div 6$ базовым периодам колебаний). Остальные параметры были выбраны следующими: $n = 4$, $\nu = 3$. Из 3 восстановленных фазовых координат две были получены методом задержки и одна — численным дифференцированием $x(t)$. На рис. 1, c изображена зависимость произвольно выбранного восстановленного коэффициента C_{j,l_1,l_2,\dots,l_n} в указанном диапазоне N .

Для наглядного представления результатов моделирования для каждой реконструированной динамической системы при выбранном значении числа точек N будем вычислять спектр ляпуновских экспонент и ляпуновскую размерность по формуле Каплана–Йорка [12]. Соответствующие зависимости λ_1 и D_L приведены на рис. 2, a , b .

Как видно из данного рисунка, существует множество значений N , для которых аттрактор реконструированной математической модели (при фиксировании остальных параметров численной схемы) имеет динамические характеристики, близкие к характеристикам аттрактора исходной системы, генерирующей исследуемый сигнал. В то же время существует и множество таких N , для которых вместо режима динамического хаоса восстанавливаются периодические колебания ($\lambda_1 = 0$). На

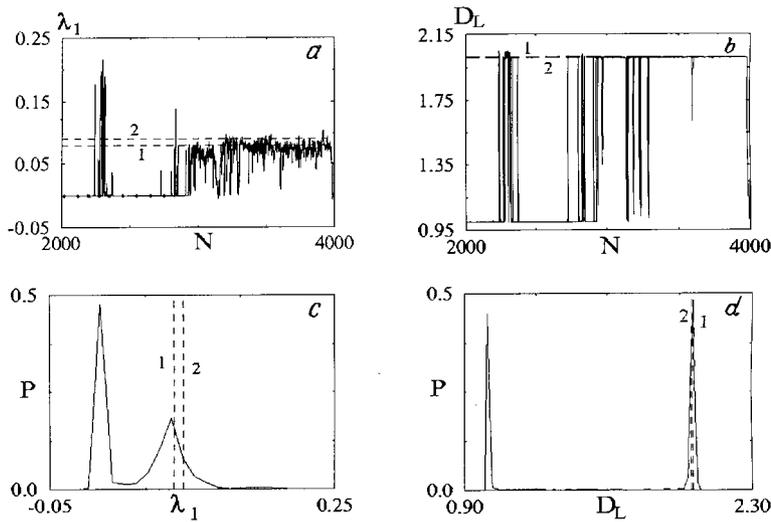


Рис. 2. *a, b* — значения старшего ляпуновского показателя, рассчитанные методом [13], и ляпуновской размерности аттракторов математических моделей, реконструированных при каждом N . Линии *1* соответствуют характеристикам аттрактора модельной системы, восстановленной методом реконструкции по длительному сигналу — несколько сотен базовых периодов ($\lambda_1 = 0.08$, $D_L = 2.015$), линии *2* — значениям характеристик аттрактора исходной системы (6) — $\lambda_1 = 0.09$, $D_L = 2.01$; *c, d* — плотности распределения значений λ_1 и D_L .

рис. 2, *a* звездочками помечены также точки, соответствующие случаю, когда фазовая траектория не принадлежит бассейну притяжения аттрактора реконструированных уравнений (решения модельной системы не обладают свойством устойчивости по Пуассону).

Распределение значений λ_1 и D_L , полученных при различных N , в данном случае будет иметь два максимума (рис. 2, *c, d*), один из которых ($\lambda_1 = 0$, $D_L = 1$) соответствует заведомо неудачной реконструкции, т.е. восстановлению периодического режима колебаний по хаотическому сигналу. Второй максимум соответствует значениям $\lambda_1 \approx 0.08$, $D_L \approx 2.016$. На рис. 2, *c* пунктирными линиями показаны величины старшего показателя Ляпунова, рассчитанные методом [13] по уравнениям математической модели, восстановленной методом реконструкции

по длительному сигналу — несколько сотен базовых периодов (линия 1) и по уравнениям системы (6) — линия 2. Приведенные результаты показывают, что положительное значение ляпуновского показателя, соответствующее максимуму распределения, близко к истинному.

Таким образом, при условии, что выбранная априори форма динамических уравнений позволяет качественно описать исходный хаотический режим, применение алгоритма реконструкции к коротким временным рядам дает возможность получить оценки характеристик исходного аттрактора, близкие к тем, которые могут быть вычислены путем обработки длинных реализаций стандартными методами.

Похожие результаты были получены для модифицированного генератора с инерционной нелинейностью [14] и ряда других систем.

Проводимые исследования были частично поддержаны грантом INTAS 96–0305 и Королевским Обществом Лондона.

Список литературы

- [1] *Cremers J., Hübler A.* // *Z. Naturforschung A.* 1987. V. 42. P. 797–802.
- [2] *Crutchfield J.P., McNamara B.S.* *Complex Systems.* 1987. V. 1. P. 417–452.
- [3] *Gouesbet G., Maquet J.* // *Physica D.* 1992. V. 58. P. 202–215.
- [4] *Gouesbet G., Letellier C.* // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 49. P. 4955–4972.
- [5] *Breeden J.L., Hübler A.* // *Phys. Rev. A.* 1990. V. 42. N 10. P. 5817–5826.
- [6] *Voss H., Kurths J.* // *Phys. Lett. A.* 1997. V. 234. P. 336–344.
- [7] *Hegger R., Büchner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 558–561.
- [8] *Grassberger P., Procaccia I.* // *Phys. Rev. Lett.*, 1983. V. 50. P. 346–349.
- [9] *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* // *Physica D.* 1985. V. 16. P. 285–317.
- [10] *Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б., Рахманов А.И.* // Препринт Института прикладной динамики им. М.В. Келдыша РАН. 1993. № 10.
- [11] *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23. В. 8. С. 7–13.
- [12] *Kaplan J.L., Yorke J.A.* // *Lect. Notes in Math.* 1981. V. 898. P. 204–227.
- [13] *Benettin G., Galgani L., Strelcun J.M.* // *Phys. Rev. A.* 1976. V. 41. N 6. P. 2338–2442.
- [14] *Анищенко В.С.* *Сложные колебания в простых системах.* М.: Наука, 1990. 311 с.