

01

Глобальная реконструкция по нестационарным данным

© Н.Б. Янсон, А.Н. Павлов, Т. Капитаниак, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет
Технический университет, г.Лодзь (Польша)

Поступило в Редакцию 20 января 1999 г.

Исследуются одномерные реализации динамической системы с медленно меняющимися параметрами. Для оценки характеристик аттракторов данной системы, существующих при фиксированных значениях параметров, предлагается "вырезать" из временного ряда короткие участки, принадлежащие отдельным аттракторам, и использовать их для реконструкции модельной динамической системы.

Целью работ, посвященных анализу динамических систем по одномерным временным рядам, как правило, является оценка характеристик режимов функционирования данных систем, а именно расчет спектров мощности, моментных функций, определение геометрических и динамических характеристик аттракторов и т.д. Одна из самых сложных задач состоит в предсказании поведения системы в будущем и построении математической модели, описывающей эволюцию состояния (задача глобальной реконструкции).

Алгоритм глобальной реконструкции динамической системы по одномерным временным рядам был впервые предложен в 1987 г. [1,2]. Техника моделирования по экспериментальным данным в последние годы многократно обсуждалась в печати: были разработаны различные модификации метода глобальной реконструкции [3–5], реализован ряд оригинальных подходов к решению данной задачи [6,7].

Поскольку большинство разработанных на настоящий момент алгоритмов решения вышеописанных задач применимо к стационарным сигналам, обычно предполагается, что временной ряд генерируется конечномерной динамической системой с постоянными параметрами

$$dx/dt = F(x, \mu), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \quad (1)$$

исследуемые процессы в которой являются стационарными.

Однако если анализируются реальные экспериментальные сигналы, в особенности биологического происхождения, то такое предположение не всегда оправдано, поскольку исходные объекты представляют собой открытые системы, подверженные влиянию окружающей среды. Такие системы в силу наличия обратных связей, как правило, функционируют в режиме адаптации к изменению внешних условий. Генерируемые ими сигналы являются нестационарными, а процесс адаптации часто можно интерпретировать как вариацию параметров системы во времени.

В настоящей работе мы рассмотрим возможность применения техники реконструкции к одномерной реализации динамической системы с медленно меняющимися параметрами в целях определения зависимостей характеристик аттракторов данных систем от значений управляющих параметров.

Пусть в динамической системе (1) $\mu = \mu(t)$. Сделаем несколько предположений, при которых мы будем решать сформулированную задачу:

- 1) зависимость $\mu(t)$ является осциллирующей;
- 2) ограничимся для простоты случаем однопараметрической модуляции, т.е. $\mu_j = \mu_j(t)$, $\mu_k(t) = \text{const}$, $k = 1, \dots, m$, $k \neq j$;
- 3) параметры меняются медленно не только по сравнению с периодом базовой частоты колебаний исследуемой системы, но и по сравнению с длительностью переходных процессов, что позволяет пренебрегать инерционными свойствами системы;
- 4) исследуемая система не демонстрирует явление мультистабильности, т.е. для одинаковых значений μ она функционирует в одном и том же динамическом режиме.

Данные предположения позволяют нам считать, что в моменты времени, когда параметры системы принимают одно и то же значение, фазовые траектории принадлежат одному и тому же аттрактору. Далее мы обсудим значение четвертого предположения, которое может быть необязательным.

Заметим, что мы анализируем только временной ряд, генерируемый системой с меняющимися параметрами, и не имеем информации о конкретной форме эволюционных уравнений данной системы и о характере временной зависимости $\mu(t)$.

Смоделируем данную ситуацию на примере известной модели Ресслера [8]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(y + z), & \frac{dy}{dt} &= x + ay, & \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c), \\ a &= 0.15, & b &= 0.2, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр c меняется нерегулярным образом (рис. 1, a) в диапазоне $[1 \div 12]$. В указанном диапазоне осуществляется переход от однитактного цикла к режиму хаотических колебаний через каскад бифуркаций удвоения периода. Соотношение среднего периода модуляции параметра и базового периода автоколебаний $x(t)$ было выбрано порядка 1000:1. Наблюдаемый временной ряд (рис. 1, b) является нестационарным.

Выберем временное окно для сигнала $x(t)$, длина которого достаточно велика, чтобы захватить несколько периодов наблюдаемой реализации, но в то же время достаточно мала для того, чтобы предположить, что в течение данного временного интервала параметры системы приближенно можно было бы считать постоянными. Определим характер параметрической модуляции. С этой целью будем вычислять моменты для участков реализации внутри временного окна длительностью 50 единиц безразмерного времени (охватывающего приблизительно 8 периодов колебаний).¹ Смещая окно вдоль сигнала, построим зависимости данных моментов от времени. Очевидно, что не всегда смена режима функционирования приводит к изменению всех моментов одновременно. Так, например, для реализации на рис. 1, b среднее значение не меняется при вариации управляющего параметра. Однако всегда можно найти такие моменты, которые будут реагировать на смену режима, и для рассматриваемой реализации таким моментом является дисперсия (рис. 1, c). Поведение данного графика качественно воспроизводит зависимость $c(t)$ (рис. 1, a).

¹ Для вычисления моментных функций случайного процесса требуется знать его плотности распределения. Однако, пользуясь предположением стационарности изучаемого процесса на выбранном отрезке времени (мы считаем, что колебания происходят на аттракторе) и его эргодичности, можно заменить усреднение по ансамблю реализаций усреднением по времени. Для расчетов с высокой точностью при усреднении по времени требуется реализация большой длины. При работе с коротким временным рядом мы можем оценить значения моментов только приблизительно, что и приводит к изрезанным графикам их зависимостей от "времени" (рис. 1, c).

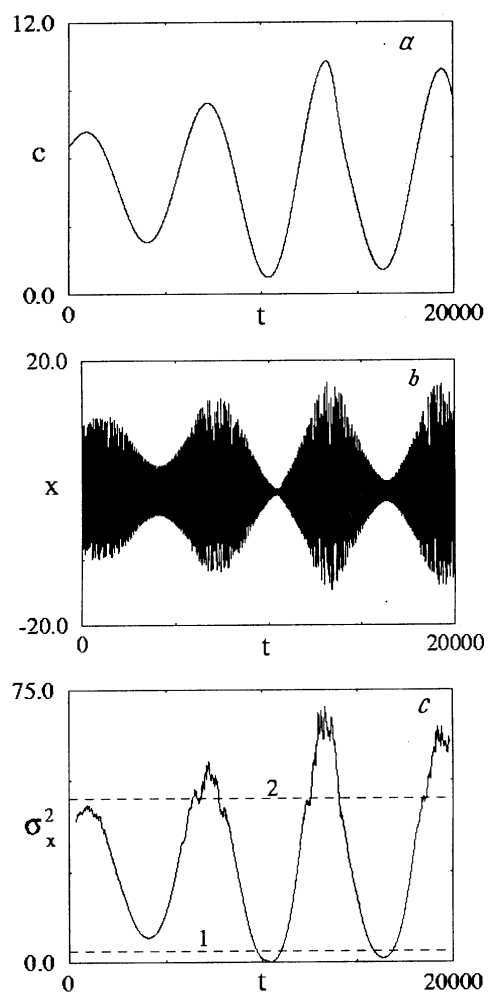


Рис. 1. *a* — закон модуляции параметра *c* системы Ресслера; *b* — соответствующая временная зависимость $x(t)$; *c* — зависимость от времени дисперсии, вычисленной по сигналу (*b*) в пределах временного окна, смещающегося вдоль реализации.

Рассмотрим теперь два уровня, соответствующие двум различным значениям дисперсии (рис. 1, *c*), которые, как мы предполагаем, соответствуют двум фиксированным значениям параметра c . В действительности при работе с реальными сигналами мы не знаем значений управляющих параметров системы и только предполагаем, что каждый их набор соответствует некоей величине момента. Однако для смоделированной ситуации нам известно, что нижний уровень (линия 1) соответствует однопериодному предельному циклу, тогда как верхний уровень (линия 2) — хаотическому режиму.

Выберем малые окрестности точек (величина окрестности около одного периода колебаний), в которых каждый выбранный уровень пересекает временные зависимости дисперсии. "Вырежем" участки временного ряда, соответствующие этим окрестностям, и применим к ним традиционную технику вложения, например метод задержки или последовательного дифференцирования [9–11]. Результаты реконструкции фазового портрета по таким отрезкам для двух различных уровней представлены соответственно на рис. 2, *a, c*. Участки фазовой траектории не "сшиты" друг с другом и достаточно короткие, но мы предполагаем, что они принадлежат одним и тем же аттракторам (соответственно регулярному и хаотическому).

Так как количество векторов состояния, реконструированных подобным способом, может быть достаточно мало и, более того, восстановленные участки фазовой траектории не "сшиты", применение стандартных методов обработки сигналов, таких как вычисление автокорреляционной функции, спектра мощности, ляпуновских показателей и т.д., к таким данным представляется проблематичным. В то же время привлечение техники глобальной реконструкции предполагает только знание набора векторов состояния в дискретные моменты и их производные по времени (при этом длительность сигнала может быть относительно небольшой [12,13]) и не накладывает требования непрерывности фазовой траектории. Проиллюстрируем применение данного алгоритма к изображенным на рис. 2, *a, c* фазовым портретам (параметры алгоритма указаны в подписи к рисункам).

На рис. 2, *b, d* изображены аттракторы соответствующих реконструированных моделей. Теперь, получив динамическое описание нужных режимов, можно путем численного интегрирования сгенерировать фазовую траекторию произвольной длительности и вычислять по ней стандартными алгоритмами характеристики аттракторов. В частности,

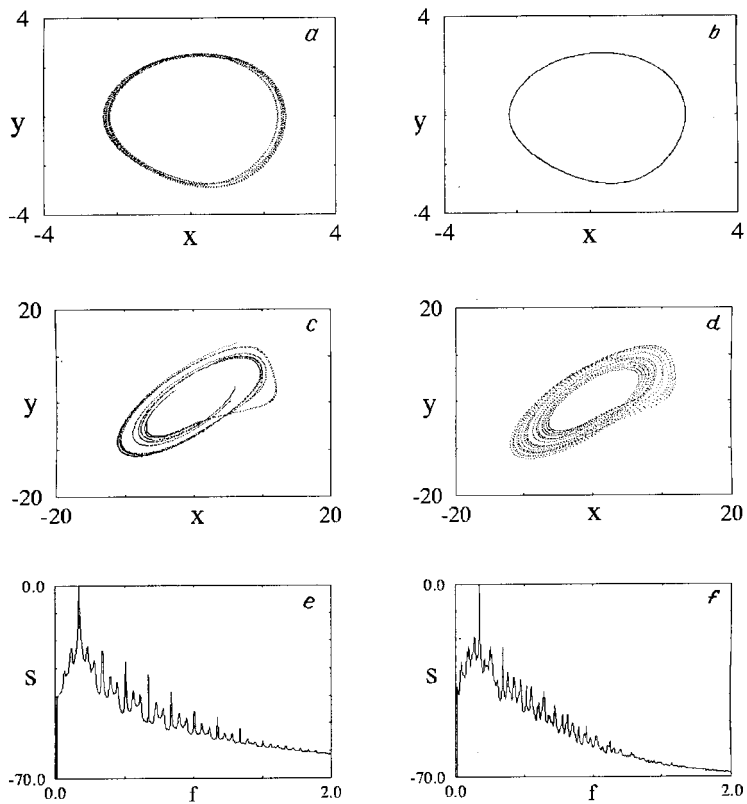


Рис. 2. *a, c* — фазовые траектории, реконструированные по коротким участкам временного ряда (рис. 1, *b*), соответствующие уровням 1 и 2 на рис. 1, *c*; *b, d* — аттракторы динамических систем, реконструированных по данным фазовым портретам. Параметры реконструкции для рис. 2 (*a, b*): размерность пространства вложения $n = 3$, для аппроксимации правых частей использовался полином 3-й степени, координаты восстанавливались методом последовательного дифференцирования [11]. Для рис. 2 (*c, d*): размерность пространства вложения $n = 4$, для аппроксимации правых частей использовался также полином 3-й степени, координаты восстанавливались методом задержки. *e* — спектр мощности, вычисленный по координате x системы Ресслера при значении параметра, соответствующего уровню 2 на рис. 1, *c*; *f* — спектр мощности, вычисленный по решению реконструированной модельной системы.

значение максимального показателя Ляпунова λ_1 , вычисленное для хаотического аттрактора системы Ресслера методом [14] при $c \approx 8.0$ и соответствующее уровню 2 на рис. 1, d , равно ≈ 0.065 . Ляпуновский показатель, рассчитанный тем же методом по уравнениям модельной системы, полученной для уровня 2, равен ≈ 0.052 , что несколько меньше, чем его "истинное" значение. Для сравнения на рис. 2, e, f приведены спектры мощности исходного хаотического аттрактора системы (2) и хаотического аттрактора соответствующей восстановленной системы.

Таким образом, рассмотренная в настоящей работе многооконная процедура реконструкции позволит путем смещения прямых 1 и 2 на рис. 1, c отслеживать эволюцию характеристик режимов функционирования динамической системы с медленно меняющимися параметрами по ее одномерной реализации.

В заключение отметим, что описанная техника применима в условиях, когда исследуемая система не демонстрирует явления мультистабильности и связанного с ней явления гистерезиса. Если это не так, временные зависимости моментных функций не воспроизводят закона модуляции параметров. Однако так как моменты характеризуют именно режим колебаний, а не значения параметров, мы предполагаем, что данная техника позволит реконструировать нужные аттракторы и в этом случае, но этот вопрос требует отдельного детального исследования.

Проводимые исследования были частично поддержаны грантом INTAS 96–0305 и Королевским обществом Лондона.

Список литературы

- [1] *Cremers J., Hübler A.* // *Z. Naturforschung A.* 1987. V. 42. P. 797–802.
- [2] *Crutchfield J.P., McNamara B.S.* // *Complex Systems.* 1987. V. 1. P. 417–452.
- [3] *Breeden J.L., Hübler A.* // *Phys. Rev. A.* 1990. V. 42. N 10. P. 5817–5826.
- [4] *Gouesbet G., Maquet J.* // *Physica D.* 1992. V. 58. P. 202–215.
- [5] *Gouesbet G., Letellier C.* // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 49. P. 4955–4972.
- [6] *Hegger R., Büchner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 558–561.
- [7] *Voss H., Kurths J.* // *Phys. Lett. A.* 1997. V. 234. P. 336–344.
- [8] *Rössler O.E.* // *Phys. Lett. A.* 1976. V. 57. P. 397–398.
- [9] *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 712–715.

- [10] *Takens F.* In *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980* / Eds. D. Rang, L.S. Young. *Lecture Notes in Mathematics*. V. 898 (Springer, Berlin). P. 366–381.
- [11] *Breeden J.L., Packard N.H.* // *Int. J. Bifurcation Chaos*. 1994. V. 4. N 2. P. 311–326.
- [12] *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* // *Письма в ЖТФ*. 1997. Т. 23. В. 8. С. 7–13.
- [13] *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Капитаниак Т., Анищенко В.С.* // *Письма в ЖТФ*. 1999. Т. 25. В. 10.
- [14] *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* // *Physica D*. 1985. V. 16. P. 285–317.