

08

Акустическое поле, создаваемое радиальными колебаниями участка цилиндрического канала, в среде внутри канала

© И.А. Колмаков

Поступило в Редакцию 17 апреля 1998 г.

Приводится объяснение причин образования в среде внутри канала бегущих от области с цилиндрическими волнами в противоположных направлениях плоских волн. Решаются задача о форме области, генерирующей плоские волны, и задача о поле, образуемом вблизи этой области. Полученные результаты могут быть полезными для технических приложений.

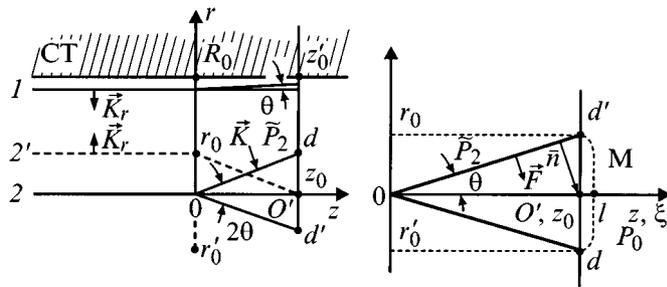
При радиальных колебаниях стенок цилиндрического канала неограниченной протяженности (т.е. колебаниях вдоль радиуса) в заполняющей канал среде создаются волны только радиального направления распространения [1]. При колебаниях же стенок ограниченного участка канала область с создаваемыми участком цилиндрическими волнами будет генерировать бегущие в противоположные от ее торцов стороны продольные волны. В экспериментах [2] было выяснено, что подобного вида волны не являются нормальными волнами, так как не было обнаружено характерных для нормальных волн распределений акустических величин: давлений, плотностей и т.д., пропорциональных бесселевым функциям вида $J_i(\kappa r)$. В частности, измерение амплитуд акустического давления показало, что волны, образуемые на некотором расстоянии от торцевой радиальной плоскости, ограничивающей область с цилиндрическими волнами, являются близкими к плоским. Объяснения причин образования и каких-либо гипотез относительно механизма генерирования подобных волн в настоящее время не существует, между тем как для прикладных задач исследование этих вопросов весьма важно.

В данном сообщении дается, по-видимому, единственно возможное объяснение сущности эффекта генерирования областью с цилиндрическими волнами бегущих плоских волн. Последовательно раскрывается и исследуется механизм преобразования энергии сходящихся к продоль-

ной оси цилиндрических волн в направленное продольное движение среды, создающее поле плоских волн. Для большей простоты диссипация энергии не учитывается.

Уже из изложенного выше ясно, что образование продольных плоских волн из цилиндрических обусловлено наличием резкой границы между двумя областями с различными плотностями акустической энергии: областью с цилиндрическими волнами и примыкающей к ней с торцов областью без таких волн. В силу того что давление в волне больше невозмущенного: $P > P_0$, должно возникнуть движение среды из области с цилиндрическими волнами через торцевую поверхность. Однако, как показывают расчеты, теряемая при этом энергия имеет значение, существенно меньшее значений, получаемых из экспериментов, т.е. последние не могут возникать, по крайней мере, только за счет передачи акустической энергии через торец волны. Заметное преобразование энергии цилиндрических волн в энергию плоских волн возможно, по-видимому, лишь при наличии у цилиндрических волн осевой (продольной) составляющей волнового вектора K_z . Образование же z -компоненты возможно при искривлении фронта цилиндрической волны. Искривление волнового фронта, действительно, должно происходить уже в силу ранее упоминавшегося перепада давления на торце волны, создающего продольное движение в область без цилиндрических волн. Можно показать, что подобное "перемещение" энергии замедляет движение волны (замедление пропорционально скорости переноса энергии). Этим и объясняется отставание, а тем самым и искривление сначала торцевой части цилиндрической волны, а затем и более отдаленных от торца ее частей.

На рисунке (слева) изображены волновые профили, образуемые сечением цилиндрических волн плоскостью, в различные моменты времени. Профиль 1 соответствует начальному моменту, когда стенка излучающего участка канала — "ст" только что сформировала цилиндрическую волну и угол "искривления" фронта θ еще близок к нулю. При достижении оси OZ (фокусировка) основной частью волнового фронта угол θ максимален, так как интенсивность цилиндрической волны растет с уменьшением радиуса, а в торцевой, искривленной части фронта, ограниченной радиальными плоскостями OR_0 и Z_0Z' , образуется область, ограниченная конической поверхностью цилиндрической волны — "конус" $Od'd$. Этому моменту соответствует профиль 2. Затем характер движения фронта меняется: точки профиля в



плоскости Z_0Z' продолжают движение к оси OZ , в то время как точки в плоскости OR_0 изменяют направление движения на противоположное. В результате в некоторый момент профиль расходящейся цилиндрической волны $2'$ зеркально "повторит" профиль 2 сходящейся к оси волны. В рассматриваемом случае волновой вектор цилиндрической волны \mathbf{k} перпендикулярен поверхности фронта во всех ее точках. Следовательно, в принципе, уже с момента образования цилиндрической волны возникает искривление фронта (пренебрежимо малое). Однако продольная компонента эффективно реализуется лишь в области конуса.

Рассмотрим движение среды в конусе при сжатии "конического поршня", предварительно сделав ряд упрощающих допущений: считаем, что среда в конусе несжимаема; угол при вершине конуса θ не меняется за время сжатия; скорость распространения (движения) поверхности конуса постоянна и равна скорости звука c ; следовательно, образующие конуса (см. рисунок) справа: Od' , Od движутся по нормали \mathbf{n} с постоянной скоростью c ; точки r_0 , r'_0 движутся вдоль радиуса r_0O , r'_0O , вершина O — вдоль оси OZ , имеют скорости $v_z = c(\sin \theta)^{-1}$, $v_r = c(\cos \theta)^{-1}$ и сходятся в точке O' одновременно; давление со стороны фронта на среду в конусе $\tilde{P}_2 = P_{20} - P_0 = \text{const}$ (P_0 — невозмущенное давление, P_{20} — акустическое давление) в течение всего времени "сжатия" конуса в точку — τ_0 . Обоснования допущений таковы. Сжимаемость в приосевой области мала и для газов, поэтому учет ее привел бы к поправкам порядка $v_z^{-1} \cdot c \ll 1$; постоянство P_2 и c за время τ_0 оценивается поправкой того же порядка. Заметим, что "вытеснение" части среды из конуса будет продолжаться до того момента, пока действующая со стороны торца конуса сила не станет равной сумме сил: лобового сопротивления области M , образуемой вытесняемой из

конуса средой, и давления P_0 (см. рисунок, справа). Далее, рассмотрим действие сил в конусе. Вектор силы \mathbf{F} , действующей на среду со стороны конической поверхности, направлен по нормали к ней. Радиальные составляющие \mathbf{F} , в силу осевой симметрии, компенсируются взаимно, а продольные — будут создавать движение вдоль оси OZ . Таким образом, действующая на среду со стороны поверхности конуса сила $\mathbf{F} = P_2 S_{\text{б.к.}} \cdot \mathbf{n}$, где $S_{\text{б.к.}}$ — площадь боковой поверхности конуса, \mathbf{n} — нормаль к ней, создает движение среды через торцевую поверхность $r_0 r'_0$ на расстоянии z_0 от начала координат со скоростью

$$v_z(z_0) = \frac{3\bar{P}_2 t}{(\rho_0 \cos \theta) \cdot \mathbf{r}}. \quad (1)$$

Для описания динамики области $z_0 r_0 l r'_0 \equiv M$ (см. рисунок, справа), образуемой вытесненной из конуса средой, используются уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_r^2}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

(ρ_0 — плотность несжимаемой среды) и краевое условие (1). Основные моменты решения заключаются в следующем. Из (4) получаем выражения для радиальной v_r и продольной v_z скоростей течения среды (вне конуса) через произвольную функцию времени $f(t)$:

$$v_r = \frac{r}{2} \cdot f(t), \quad v_z = -z \cdot f(t). \quad (5), (6)$$

Интегрируя (2), (3) сначала по r в пределах от $R(t)$ до R_0 , а затем по z — от $Z(t)$ до ∞ , где $R(t)$, $Z(t)$ — точки поверхности области M , и учитывая (5), (6), получим для скорости движения границы (точек поверхности) области M :

$$\frac{\partial V_z^2}{\partial Z} + \frac{V_z^2}{Z} \left\{ 1 + \frac{3R_0^4 + 4R(R_0^3 - R^3)}{2R(R_0^3 - R^3)} \right\} = -\frac{12R_0^3}{Z(R_0^3 - R^3)} \cdot \frac{P_0 - P(R, Z)}{\rho_0}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V_r^2}{\partial R} + 6 \frac{V_r^2}{R} = - \frac{2}{R \cdot \ln RR_0^{-1}} \cdot \frac{P_0 - P(R, Z)}{\rho_0}, \quad (8)$$

где $V_z = dZ(t)/dt$, $V_r = dR(t)/dt$, $P(R, Z)$ — давление на границе M .
Решение уравнений (7), (8) при условии на границе (1) дает

$$V_z = v_z(z_0) \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{m_1 z_0^2 + m_2}{m_1 z^2 + m_2} \right)^{\frac{3}{8}N}, \quad (9)$$

$$V_r = v_z(z_0) \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{Z}{Z_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m_1 z_0^2 + m_2}{m_1 z^2 + m_2} \right)^{\frac{3}{8}N}, \quad (10)$$

где $m_1 = R_0^3 - R^3$, $m_2 = 3R_0^3 R^2 \ln RR_0^{-1}$, $N = R_0^4 [R(R_0^3 - R^3)]^{-1}$. Из выражений (9), (10) определяются значения $Z(t)$ и $R(t)$:

$$Z(t) = z_0 + \frac{1}{2} v_z(z_0) t \left(\frac{c_0}{R^2 z_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_1 z_0^2 + m_2}{m_1 c_0^2 R^{-4} + m_2} \right)^{\frac{3}{8}N}, \quad (11)$$

$$R(t) = r_0 + \frac{1}{4} v_z(z_0) t \left(\frac{c_0}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left[R_0^3 - \left(\frac{c_0}{Z} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 3 \frac{R_0^2 c_0}{Z} \ln \left[R_0^{-1} \left(\frac{c_0}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{3}{8}N}, \quad (12)$$

где $c_0 = r_0^2 z_0 - c^3 t^3 (\sin \theta \cdot \cos^2 \theta)^{-1}$.

Задавая внешний импульс $\tilde{P}_2(t)$, можно с помощью (11), (12) воспроизводить форму поверхности области M в произвольные моменты времени t_i , а учитывая (9), (10), — значения скорости $V(t_i)$ точек поверхности M .

Вторая часть задачи заключается в нахождении поля, создаваемого осевым "источником" — областью M вне ее границ, т.е. когда условие на границе — поверхности M , задается выражениями (9), (10), а сама поверхность — (11), (12). Приближенное аналитическое решение задачи в такой постановке затруднительно: и, по-видимому, более целесообразными в этом случае будут численные решения. Аналитическое решение все-таки возможно, но для возмущений акустического масштаба, т.е. для случая, когда объем области M мал по сравнению с объемом конуса $Z(t) \cdot z_0^{-1}$, $R(t) \cdot r_0 \ll 1$. Средняя за время τ_0 существования области M скорость этой области и среды в ней при не очень малой

амплитуде внешнего сигнала — сверхзвуковая: $V_z > c$. Радиальные скорости малы и далее не учитываются. Можно показать, что с учетом принятых допущений движение области M "хорошо" аппроксимируется движением диска радиусом r_0 с постоянной за время τ_0 скоростью V_z и распределением вида $\exp(-r^2 r_0^{-2})$. Потери энергии при движении диска пропорциональны его лобовому сопротивлению и определяют уровень генерируемых возмущений. При таком движении впереди диска образуется поверхность слабого разрыва, напоминающая эллипсоид вращения, заканчивающаяся на внутренней поверхности канала.

В движущейся со скоростью $V_z > c$ вдоль оси OZ цилиндрической системе координат задача о поле, создаваемом плоским диском, сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \xi^2} = \frac{1}{c^2} \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad (13)$$

где $\xi = z - V_z t$, $\gamma^2 = 1 - V_z^2 c^{-2}$, $\mathbf{f} = \mathbf{e}_z \alpha_0 S \rho V_z^2 \exp(-r^2 r_0^{-2}) \delta(\xi)$, S — площадь диска, $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль OZ , α_0 — коэффициент сопротивления.

Решение уравнения (13), полученное в помощью интегральных преобразований вида Фурье–Ханкеля, использования свойств цилиндрических функций [3,4] и с учетом условий на бесконечности, имеет вид

$$\rho' = N \frac{\xi}{(\xi^2 - \gamma^2 \tilde{r}^2)^{3/2}} \cdot \left[1 - \frac{3}{4} r_0^2 \gamma^2 \cdot \frac{(2\xi^2 + 3\gamma^2 \tilde{r}^2)}{(\xi^2 - \gamma^2 \tilde{r}^2)^2} \right], \quad (14)$$

где $\tilde{r} = r - r_0$, $N = (\pi + 2)(2\pi)^{-1} \rho V_z^2 c^{-2} \cdot S$.

Уравнение (14) и определяет поле, создаваемое торцевой частью сходящейся цилиндрической волны. Выражение для формы поверхности слабого разрыва можно получить из (14), например, используя условие экстремума $(\partial \rho' / \partial \xi) = 0$; однако при этом необходимо решение уравнения шестой степени. Точки же пересечения поверхности с осями координат 0ξ , $0r$ определяются сразу, в частности, точки пересечения поверхности с осью 0ξ координат находятся всегда впереди диска ($V_z > c$), на расстояниях $\xi > r_0$, увеличивающихся с ростом V_z .

Таким образом, дано объяснение причины возникновения продольных плоских волн, проведено детальное и обоснованное описание механизма образования таких волн. Получены формулы, с помощью

которых, задавая внешний сигнал в нужном виде, можно не только прогнозировать и воспроизводить ожидаемую экспериментальную картину образующегося в канале волнового поля, но и решать задачи оптимизации различных систем, например, системы излучатель–канал связи–приемник, и другие задачи. Результаты данного сообщения могут быть полезными для технических приложений.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, М.: Наука, 1988. 733 с.
- [2] Колмаков И.А. // Акустич. журнал. 1996. Т. 42. № 5. С. 721–723.
- [3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физ.-мат. лит., 1962. 767 с.
- [4] Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. М.: Мир, 1970. Вып. 3. 344 с.