

01

1/f-шум в модели пересекающихся фазовых переходов

© В.Н. Скоков, В.П. Коверда

Институт теплофизики УрО РАН, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 8 октября 1998 г.

Предложена математическая модель возникновения флуктуаций со спектром, обратно пропорциональным частоте (фликкер или $1/f$ -шум), при взаимодействии пересекающихся фазовых переходов. Рассматривается система с двухдолинным потенциалом, динамика которой описывается двумя связанными нелинейными уравнениями Ланжевена, преобразующими гауссовский δ -коррелированный шум (белый шум) в две моды стохастических колебаний со спектрами, имеющими частотную зависимость $1/f^\mu$ и $1/f^\nu$, где $\mu \approx 1$, $1.5 \leq \nu \leq 2$.

Не ослабевающий на протяжении многих лет интерес к случайным процессам, спектральная плотность которых изменяется обратно пропорционально частоте, обусловлен распространенностью этого явления и отсутствием общепринятых универсальных математических моделей. Стохастические процессы со спектром обратно пропорциональным частоте (фликкер или $1/f$ -шум) наблюдаются в системах самой различной природы — от флуктуаций тока в радиофизических устройствах до клеточных автоматов, моделирующих явление самоорганизованной критичности. К настоящему времени благодаря многочисленным исследованиям (см., например, [1–4]) установлены основные свойства $1/f$ -шума. Однако часто не ясен сам механизм возникновения $1/f$ -спектра и локализация его источников. Большинство из опубликованных работ, посвященных данному явлению, имеют дело с пространственно распределенными системами. Наиболее распространенной в настоящее время является модель экспоненциально широкого распределения времен релаксаций [1–3], в которой $1/f$ -шум трактуется как суперпозиция релаксационных случайных процессов. Также широко известна тепловая модель, согласно которой ответственными за $1/f$ -поведение спектра являются механизмы теплопроводности. Однако при объяснении экспериментальных результатов классическая ”теплопроводная” модель стал-

квивается с известными трудностями [1,2]. В работе [5] происхождение $1/f$ -шума связывается с наличием в системе нелинейных тепловых источников, а в [6] с нелинейным взаимодействием диффузионных и теплопроводных мод. В [4] фликкер-шум рассматривается как результат броуновского движения в ограниченной системе.

В работах [7–10] нами приведены результаты экспериментального обнаружения тепловых пульсаций с $1/f$ -спектром при джоулевым разогреве сверхпроводника в кипящем охладителе. Отличительным моментом этих экспериментов является то, что в системе присутствовал только один источник стохастических сигналов с $1/f$ -спектром и систему можно считать сосредоточенной. Для объяснения этих результатов неприменимы распространенные модели $1/f$ -шума в пространственно распределенных системах. Происхождение интенсивных тепловых пульсаций со спектральной плотностью обратно пропорциональной частоте связано с взаимодействием неравновесных фазовых переходов, идущих в нелинейных подсистемах — сверхпроводник с током и кипящий охладитель. В работах [9,10] предложена математическая модель пересекающихся неравновесных фазовых переходов, которая представляет собой систему двух связанных уравнений Ланжевена, преобразующую белый шум в две моды колебаний со спектральными плотностями, пропорциональными $1/f$ и $1/f^2$. Отличительной особенностью этой модели является то, что динамическая система не является потенциальной. В данной работе предложена потенциальная система, дающая результаты, аналогичные [9,10].

Рассмотрим точечную систему, в которой протекают два фазовых перехода с взаимодействующими параметрами порядка X и Y . В окрестности точки пересечения линий фазовых переходов потенциал системы можно записать в виде разложения [11]:

$$\Phi = \Phi_0 - \alpha_1 X^2 - \alpha_2 Y^2 - \alpha_{12} XY + \beta_1 X^4 + \beta_2 Y^4 + \beta_{12} X^2 Y^2. \quad (1)$$

Учитывая, что $\partial X/\partial t = -\partial\Phi/\partial X$, $\partial Y/\partial t = -\partial\Phi/\partial Y$, и вводя флуктуирующие силы в виде аддитивных членов $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$, где $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$ — гауссовские δ -коррелированные шумы, можно перейти к системе связанных уравнений Ланжевена:

$$\begin{aligned} dX/dt &= -2\beta_{12}XY^2 - 4\beta_1X^3 + 2\alpha_1X + \alpha_{12}Y + \Gamma_1(t), \\ dY/dt &= -2\beta_{12}YX^2 - 4\beta_2Y^3 + 2\alpha_2Y + \alpha_{12}X + \Gamma_2(t). \end{aligned} \quad (2)$$

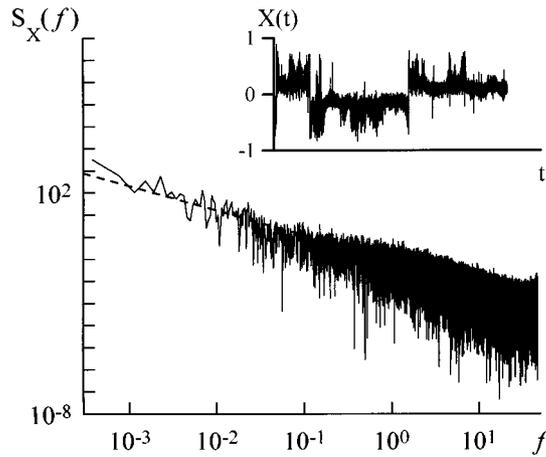


Рис. 1. Спектральная плотность $S_X(f)$ флуктуаций параметра порядка X и реализация $X(t)$. Пунктирная линия — зависимость $S_X(f) \propto 1/f^{1.05}$.

Система (2) решалась численно методом Эйлера при различных параметрах. По полученным численным решениям $X(t)$ и $Y(t)$ методом быстрого Фурье преобразования определялась спектральная плотность флуктуаций. В простейшем случае, при котором решения имеют расходящиеся спектральные характеристики, параметры системы равны: $\beta_{12} = 1/2$, $\beta_1 = \alpha_{12} = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, и система (2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} dX/dt &= -XY^2 - 4X^3 + Y + \Gamma_1(t), \\ dY/dt &= -YX^2 + X + \Gamma_2(t). \end{aligned} \quad (3)$$

В отсутствие внешнего шума решение при $t \rightarrow \infty$ имеет асимптотику: $X(t) \rightarrow t^{-1/2}$ и $Y(t) \rightarrow t^{1/2}$. Результаты численных расчетов при шаге интегрирования $dt = 0.01$, длине реализации $N = 262143$ точек и использовании в качестве внешнего шума набора гауссовской последовательности случайных чисел с нулевым средним и стандартным отклонением $\sigma = 5$ (результаты принципиально не изменяются, если принять $\Gamma_1 = \Gamma_2$) приведены на рис. 1. Из рис. 1 видно, что частотная зависимость спектральной плотности $S_X(f)$ флуктуаций $X(t)$ имеет вид

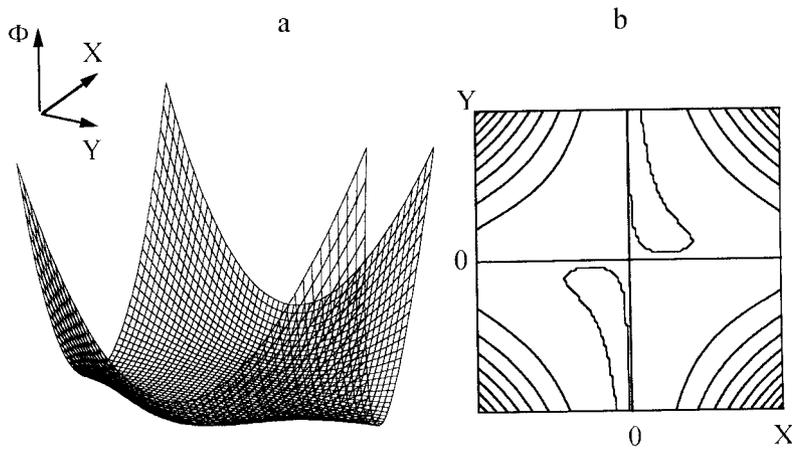


Рис. 2. Зависимость $\Phi(X, Y)$ — (a) и потенциальный рельеф поверхности $\Phi(X, Y)$ — (b).

$1/f^\mu$, где показатель $\mu \approx 1$. Иными словами, система (3) генерирует $1/f$ -шум. Спектральная плотность флуктуаций параметра порядка $Y(t)$ зависит от частоты по закону $S_Y(f) \propto 1/f^\nu$, где $1.5 \leq \nu \leq 2$. При увеличении числа точек при заданном шаге интегрирования и дисперсии внешнего шума ветви спектров становятся горизонтальными. То есть при заданном dt и σ расходящиеся спектры наблюдаются лишь в ограниченном диапазоне частот. Но этот диапазон можно увеличить в сторону низких частот и проследить расходящуюся низкочастотную асимптотику, если с увеличением числа интервалов в n раз уменьшить шаг интегрирования в n раз с одновременным увеличением стандартного отклонения σ в $n^{1/2}$ раз. То есть, если бы мы имели истинный "белый" шум, как последовательность δ -функций с бесконечно малым шагом следования, то возможно, что $1/f$ -поведение сохранится и при $f \rightarrow 0$.

Потенциал, в поле которого система совершает случайные блуждания, описываемые системой (3), имеет вид:

$$\Phi = \Phi_0 - XY + X^4 + \frac{1}{2} X^2 Y^2. \quad (4)$$

Вид потенциальной поверхности (4) и потенциальный рельеф показаны на рис. 2. На потенциальной поверхности имеются две долины, расположенные в первом и третьем квадрантах и разделенные потенциальными барьерами. В отсутствие внешнего шума фазовая траектория расположена, в зависимости от начальных условий, целиком в одной из долин. Движение при этом является инфинитным по параметру Y и процесс нестационарен. При малой амплитуде внешнего шума система совершает случайные блуждания внутри долины. При увеличении интенсивности шума начинаются перескоки из одной долины в другую, и в системе наблюдается 1/f-шум. Процесс становится стационарным, так как внешний шум не дает системе уходить слишком далеко вдоль долины. При слишком большой интенсивности внешнего шума система перестает броунировать вдоль долин, динамика полностью определяется перескоками между долинами, и спектральные плотности имеют характерный лоренцовский вид.

Таким образом, случайные блуждания в двухдолинном потенциале приводят к возникновению флуктуаций с 1/f-спектром. Механизм возникновения фликкер-шума связан, как и в модели с экспоненциально широким распределением времен релаксации [1–3], с преодолением различных потенциальных барьеров. В предлагаемой модели распределение барьеров не постулируется, а определяется формой потенциала (4), в поле которого совершаются случайные блуждания. При этом не обязательно считать систему пространственно распределенной.

Пересечение и взаимодействие двух фазовых переходов является достаточно распространенным явлением. По этой причине предложенная модель может быть достаточно универсальной и служить базовой основой для объяснения 1/f-шума в широком классе процессов с фазовыми переходами.

Авторы выражают благодарность В.П. Скрипову за обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–02–16077а).

Список литературы

- [1] Коган Ш.М. // УФН. 1985. Т. 145. В. 2. С. 285–328.
- [2] Weissman M.B. // Rev. Mod. Phys. 1988. V. 60. N 2. P. 537–571.
- [3] Жигальский Г.П. // УФН. 1997. Т. 167. № 6. С. 624–648.

- [4] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. 623 с.
- [5] *Левитан Ю.С., Панченко Н.Н., Синкевич О.А.* // Доклады АН. 1988. Т. 32. № 6. С. 1359–1363.
- [6] *Зайцев Р.О.* // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. В. 12. С. 978–982.
- [7] *Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. В. 9. С. 739–742.
- [8] *Skokov V.N., Koverda V.P., Skripov V.P.* // Cryogenics. 1997. V. 37. N 5. P. 263–265.
- [9] *Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.* // Доклады АН. 1997. Т. 356. В. 5. С. 614–616.
- [10] *Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. В. 4. С. 1748–1757.
- [11] *Люксютов И.Ф., Покровский В.Л., Хмельницкий Д.Е.* // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. В. 5(11). С. 1817–1824.