01;03

О турбулентной диффузии пассивной примеси

© *С.Н. Гордиенко, С.С. Моисеев*

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
п. Черноголовка, Моск. обл.
Институт космических исследований РАН, Москва

Поступило в Редакцию 10 ноября 1998 г.

Показано, что в турбулентных течениях с расходящимся интегралом Лойцянского коэффициент турбулентной диффузии может определяться не турбулентными вихрями максимального размера, а пульсациями с размером порядка размеров самой жидкости. Это новый физический механизм, который должен приниматься во внимание при объяснении экспериментально наблюдаемого явления "гипердиффузии" примесей в турбулентных средах. Вклад крупномасштабных пульсаций существенно возрастает при возникновении режимов турбулентности, сопровождающихся спонтанной генерацией структур, сравнимых с размером жидкости.

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию методов управления процессами турбулентного переноса импульса, тепла и массы с целью снижения сопротивления при движении тел в транспортировке жидкостей по трубопроводам, достижения более равномерного прогрева объемов жидкости или более равномерного смешения различных химических компонент [1]. Принципиальное значение имеет тип турбулентности и при изучении диффузии пассивной примеси, например, в атмосфере. При этом для оценки коэффициента турбулентной диффузии D_l в диапазоне масштабов порядка l можно записать $D_l \sim v_l l$, где v_l — характерная величина скорости турбулентных пульсаций с масштабом порядка l. Для колмогоровского спектра $v_l \sim l^{1/3}$, для спектра турбулентности с фиксированной спиральностью $v_l \sim l^{1/2}$ и для турбулентности с фиксированной скоростью диссипации спиральности $v_l \sim l^{2/3}$ [2], что дает $D_l \sim l^{4/3}$, $D_l \sim l^{3/2}$ и $D_l \sim l^{5/3}$ соответственно. Если наибольший масштаб турбулентных вихрей составляет величину порядка l_c, то коэффициенты турбулентного переноса оцениваются величинами $D \sim l_c^{4/3}$, $D \sim l_c^{3/2}$ и $D \sim l_c^{5/3}$ соответственно.

Проведенная оценка величины D неявно предполагает, что коррелятор скорость–скорость достаточно быстро спадает при $l \gg l_c$ и пульсации с масштабом, большим l_c, не дают вклада в коэффициент переноса. Подобная ситуация складывается всякий раз, когда сходится интеграл Лойцянского [3]. Однако сходимость или расходимость интеграла Лойцянского зависит от способа возбуждения турбулентности [4] и в случае его расходимости оценки для коэффициентов турбулентной диффузии и теплопроводности должны быть принципиальным образом пересмотрены из-за вклада длинноволновых пульсаций с $l > l_c$. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

1. Интересуясь лишь потоками жидкости с большими числами Рейнольдса, рассмотрим уравнение Навье–Стокса ($\mathrm{Re} \gg 1$) с внешней силой $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{f}(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = f_0^2 K\left(\frac{t_1 - t_2}{\tau_0}, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_0}\right), \tag{2}$$

где K описывает корреляционные свойства силы $\mathbf{f}$, приводящей жидкость в движение, и по определению f_0^2

$$\int K\left(\frac{t}{\tau_0}, \frac{\mathbf{r}}{r_0}\right) d\mathbf{r}dt = r_0^3\tau_0.$$

Без ограничения общности можно считать силу $\mathbf{f}$ чисто соленоидальной, включив потенциальную часть в градиент давления.

2. В работе [4] установлено, что в зависимости от величины силы, приводящей жидкость в движение, могут возникать три принципиально различных турбулентных стационарных состояния жидкости и найдены безразмерные параметры, отвечающие за переход от одного состояния к другому: $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0$ и $\Gamma = \gamma^{4/3}\mathrm{Re}$. Показано, что при $\gamma \ll 1$, $\Gamma \ll 1$ в инерционном интервале формируется колмогоровский спектр $E(k) \sim 1/k^{5/3}$. При переходе к турбулентным течениям, возникающим из-за действия сил бóльшей амплитуды f_0, т. е. при переходе к режиму с $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$ вблизи вязкого интервала возникает участок спектра $E(k) \sim 1/k^2$, "отсекающий" колмогоровский спектр от вязкого интервала. Дальнейшее увеличение амплитуды силы f_0, т. е. достижение области параметров $\gamma \gg 1$, $\Gamma \gg 1$ приводит к тому, что весь

инерционный интервал оказывается "занятым" спектром $E(k) \sim 1/k^2$, а вне инерционного интервала начинается генерация крупномасштабных структур с характерным размером вплоть до $\gamma^{2/5} r_0$. В режиме с $\Gamma \ll 1$ мощность, диссипируемая в единице массы жидкости, не зависит от величины вязкости в соответствии с теорией Колмогорова, но при переходе к турбулентным режимам с $\Gamma \gg 1$ вязкие потери начинают зависеть от вязкости жидкости. При указанном способе возбуждения турбулентности интеграл Лойцянского расходится при любых значениях параметров γ, Γ. Таким образом возникают три различных типа течений с различным поведением коэффициента турбулентной диффузии (температуропроводности). Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

3. Пусть $\gamma \ll 1$ и $\Gamma \gg 1$. Тогда, согласно [4],

$$\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(0, t))^2 \rangle = C_1 (f_0^2 \tau_0 r)^{2/3} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \ll r \ll r_0, \tag{3}$$

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(0, t) \rangle = C_2 \left(\frac{f_0^2 r_0^3 \tau_0}{r^2} \right)^{2/3} \quad \text{при} \quad r_0 \ll r, \tag{4}$$

где C_1, C_2 — универсальные константы, λ_0 — вязкая длина. Таким образом, для коэффициента турбулентной диффузии справедливы оценки

$$D_l \sim f_0^{2/3} \tau_0^{1/3} l^{4/3} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \ll l \ll r_0$$

$$\text{и} \quad D_l \sim f_0^{2/3} \tau_0^{1/3} r_0 l^{1/3} \quad \text{при} \quad r_0 \ll l. \tag{5}$$

4. Рассмотрим случай $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$. В этом случае коррелятор скорости несколько отличается от коррелятора, даваемого (3), (4), [4]:

$$\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(0, t))^2 \rangle = C_0 f_0 r \quad \text{при} \quad \lambda_0 \ll r \ll f_0 \tau_0^2, \tag{6}$$

$$\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(0, t))^2 \rangle = C_1 (f_0^2 \tau_0 r)^{2/3} \quad \text{при} \quad f_0 \tau_0^2 \ll r \ll r_0, \tag{7}$$

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(0, t) \rangle = C_2 \left(\frac{f_0^2 r_0^3 \tau_0}{r^2} \right)^{2/3} \quad \text{при} \quad r_0 \ll r, \tag{8}$$

где C_0 — универсальная константа. Поведение коэффициента турбулентной диффузии в разных масштабах длин дается выражениями

$$D_l \sim f_0^{1/2} l^{3/2} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \ll l \ll f_0 \tau_0^2, \tag{9}$$

$$D_l \sim f_0^{2/3}\tau_0^{1/3} l^{4/3} \quad \text{при} \quad f_0\tau_0^2 \ll l \ll r_0$$

$$\text{и} \quad D_l \sim f_0^{2/3}\tau_0^{1/3} r_0 l^{1/3} \quad \text{при} \quad r_0 \ll l. \tag{10}$$

5. В случае $\gamma \gg 1$, $\Gamma \gg 1$ для коррелятора скорости справедливы выражения [4]:

$$\langle(\mathbf{v}(\mathbf{r},t) - \mathbf{v}(0,t))^2\rangle = C_0 f_0 r \quad \text{при} \quad \lambda_0 \ll r \ll r_0, \tag{11}$$

$$\langle\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\rangle = C_3 \left(\frac{f_0^2 r_0^3}{r}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad r_0 \ll r \ll \gamma^{2/5} r_0, \tag{12}$$

$$\langle\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\rangle = C_2 \left(\frac{f_0^2 r_0^3 \tau_0}{r^2}\right)^{2/3} \quad \text{при} \quad \gamma^{2/5} r_0 \ll r, \tag{13}$$

где C_3 — универсальная константа. Для коэффициента турбулентной диффузии в этом случае можно записать

$$D_l \sim f_0^{1/2} l^{3/2} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \ll l \ll r_0, \tag{14}$$

$$D_l \sim f_0^{1/2} r_0^{3/4} l^{3/4} \quad \text{при} \quad r_0 \ll l \ll \gamma^{2/5} r_0,$$

$$D_l \sim f_0^{2/3}\tau_0^{1/3} r_0 l^{1/3} \quad \text{при} \quad \gamma^{2/5} r_0 \ll l. \tag{15}$$

6. Из приведенных выражений (3), (4), (6)–(8), (11)–(13) следует, что при указанном способе возбуждения турбулентности максимальный масштаб турбулентных вихрей порядка r_0. Однако медленное спадание коррелятора скорости при $l \gg r_0$ приводит к тому, что вклад в коэффициент турбулентной диффузии длинноволновых пульсаций оказывается определяющим. Если $\gamma \ll 1$, т.е. турбулентность не сопровождается спонтанным рождением структур, то коэффициент турбулентной диффузии определяется пульсациями максимального размера, совпадающими с размером R сосуда, в который помещена жидкость, т.е. оценивается выражением

$$D \sim f_0^{2/3}\tau_0^{1/3} r_0 R^{1/3} = D_{\gamma\ll 1}(R/r_0)^{1/3} \quad \text{при} \quad R \gg r_0, \tag{16}$$

где $D_{\gamma\ll 1} = f_0^{2/3}\tau_0^{1/3} r_0^{4/3}$ — коэффициент диффузии, определяемый вихрями максимального размера.

Если $\gamma \gg 1$, т. е. в случае, когда происходит спонтанная генерация структур, при $R \gg \gamma^{2/5} r_0$ размер сосуда превышает масштаб возникающих структур и коэффициент турбулентной диффузии по-прежнему определяется (16)

$$D \sim f_0^{2/3} \tau_0^{1/3} r_0 R^{1/3} = \gamma^{1/6} D_{\gamma \gg 1} (R/r_0)^{1/3} \quad \text{при} \quad R \gg \gamma^{2/5} r_0, \tag{17}$$

где $D_{\gamma \gg 1} = f_0^{1/2} r_0^{3/2}$ — коэффициент турбулентной диффузии за счет вихрей максимального размера при $\gamma \gg 1$.

В случае, когда $\gamma \gg 1$, но максимальный размер генерируемых структур может превысить размер сосуда $R \ll \gamma^{2/5} r_0$, основной вклад в турбулентную диффузию дают именно структуры с размером порядка R и

$$D \sim f_0^{1/2} r_0^{3/4} R^{3/4} = D_{\gamma \gg 1} (R/r_0)^{3/4} \quad \text{при} \quad r_0 \ll R \ll \gamma^{2/5} r_0. \tag{18}$$

Таким образом, в диапазоне масштабов меньших размеров максимального турбулентного вихря коэффициент турбулентной диффузии быстро нарастает (быстрее, чем l), а в диапазоне масштаба бо́льших размеров максимального турбулентного вихря продолжается, но уже медленный (медленнее, чем l), рост коэффициента турбулентной диффузии, из-за чего полный коэффициент турбулентной диффузии определяется размером самой жидкости.

Важным следствием выражений (16)–(18) является то, что при одинаковых значениях коэффициента диффузии на вихрях максимального размера (при совпадении $D_{\gamma \ll 1}$ и $D_{\gamma \gg 1}$) истинные коэффициенты диффузии могут во много раз отличаться. Заметим, что вклад длинноволновых пульсаций для турбулентных режимов, сопровождающихся спонтанной генерацией структур, согласно (17) и (18), всегда оказывается более существенным по сравнению с вкладом длинноволновой части для турбулентных течений, не приводящих к самоорганизации. В самом деле, выражение (17) содержит дополнительный множитель $\gamma^{1/6}$ по сравнению с (16), а в случае (18) возникает сомножитель $(R/r_0)^{3/4}$ против $(R/r_0)^{1/3}$ в (16).

Из сказанного, применительно к физике переноса примесей в атмосфере, следует, что знание размера и скорости турбулентных пульсаций в вихрях позволяет оценить снизу коэффициент турбулентной диффузии примесей. Однако истинное значение коэффициента турбулентной диффузии может во много раз превышать получаемую таким образом оценку снизу (т. е. может иметь место "гипердиффузия") и для его нахождения необходимо изучение еще и типа турбулентного потока, что позволяет объяснить зависимость скорости распространения загрязнений от конкретных условий.

Авторы выражают искреннюю благодарность С.И. Анисимову и Э.И. Юрченко за интерес к работе и полезную дискуссию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 98–02–17229, 98–02–17441, Совета по программе поддержки ведущих научных школ 96–15–96448, а также гранта INTAS 93–1194 ext.

Список литературы

[1] *Eckert E.R.* et al. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1997. V. 40. P. 3729.
[2] *Moiseev S., Onishenko O.* // Physica B. 1996. V. 228. P. 83.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
[4] *Гордиенко С.Н. Моисеев С.С.* // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 68. С. 194.