01

Модель рассеяния на возмущенном тонком цилиндре

© Д.А. Зубок, И.Ю. Попов

С.-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет)

Поступило в Редакцию 20 июля 1998 г.

Построена основанная на теории самосопряженных расширений операторов модель рассеяния волн на возмущенном тонком цилиндре. Найден способ выбора модельного оператора, обеспечивающий совпадение модельного решения с главным членом асимптотики по малому диаметру цилиндра решения реальной задачи рассеяния.

Задача рассеяния волн тонкими телами в последнее время привлекает большое внимание в связи с различными физическими приложениями. При этом обычно строятся асимптотические разложения по малому параметру (диаметр цилиндра, угол раствора конуса). На этом пути получен ряд интересных результатов [1,2]. Однако возникающие значительные сложности часто не позволяют осуществить значительного продвижения, что делает желательным создание моделей, которые могут упростить ситуацию.

Одним из путей такого моделирования является использование теории самосопряженных расширений операторов. Данный подход аналогичен известному методу потенциалов нулевого радиуса в атомной физике [3], восходящему к работам Ферми [4]. После того как Ф.А. Березин и Л.Д. Фаддеев [5] показали, что задание потенциала нулевого радиуса с математической точки зрения означает построение самосопряженного расширения некоторого симметрического оператора, метод получил новый импульс и был распространен на значительно более широкую область применения [6,7]. На базе теории расширений было получено корректное математическое описание оператора Лапласа, возмущенного на множестве нулевой меры [8–11]. В данной работе с помощью анализа трехмерного оператора Лапласа, возмущенного на линии, строится модель рассеяния волны на тонком возмущенном в ограниченной области цилиндре. Проведено сравнение модельного решения с асимптотикой (по диаметру цилиндра) решения реальной задачи и указан способ выбора параметров модели, обеспечивающий его совпадение с главным членом асимптотики. Таким образом, абстрактная математическая схема нашла конкретное физическое применение.

Опишем кратко модель. Пусть L — ось OZ цилиндрической системы координат. Мы стартуем с оператора Лапласа A_L, суженного на множестве функций, обращающихся в нуль на L. A_L — симметрический оператор с бесконечными индексами дефекта. Чтобы построить его самосопряженное расширение, необходимо рассмотреть область определения сопряженного оператора, которая может быть представлена в виде

$$\mathcal{D}(A_L^*) = \mathcal{D}(A_L^F) \dot{+} N_{\lambda_0}, \tag{1}$$

где A_L^F —расширение по Фридриксу оператора A_L, N_{λ_0} — ядро оператора $A_L^* - \lambda_0$, $\lambda_0 = k_0^2 < 0$, λ_0 — некоторое регулярное значение оператора. Легко найти, что подпространство N_{λ_0} состоит из функций v вида

$$v(r, \varphi, z) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi} \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\sqrt{k_0^2 - \xi^2}\, r \right) \alpha(\xi) d\xi, \tag{2}$$

где $\alpha(\xi)$ — некоторая функция из пространства Соболева $H_{-1}(\mathbf{R})$. Для построения области определения самосопряженного расширения оператора A_L необходимо выделить в $\mathcal{D}(A_L^*)$ линеал, на котором следующая "граничная форма" аннулируется:

$$J(u, v) = (A_L^* u, v) - (u, A_L^* v) = 0.$$

В соответствии с (1)

$$u = u_0 + u_L, \quad u_0 \in H_2 = \mathcal{D}(A_L^E), \quad u_L \in N_{\lambda_0}.$$

Учитывая (2), получаем

$$J(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha_u^+(s) \overline{\alpha_v^-(S)} - \alpha_u^-(s) \overline{\alpha_v^+(s)} \right) ds. \tag{3}$$

Здесь α^+ есть α из (2), $\alpha_u^-(s) = u_0(s)$. Используя теорию симплектических форм [12], можно описать все классы возможных расширений.

Не будем приводить здесь это описание, а отметим лишь расширения, выделяемые условием

$$\alpha_u^+(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(z, z')\alpha_u^-(z')dz', \tag{4}$$

где $B(z, z')$ — некоторое симметрическое ядро.

В работе [1] получен главный член u^0 асимптотики по малому радиусу для решения задачи рассеяния плоской волны тонким цилиндром, возмущенным в ограниченной области:

$$u^0(r, z) = \frac{\pi}{2i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(\sqrt{k^2 - \xi^2}\, r\right) \nu(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

где $\nu(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\ln(\tilde{\varepsilon}\sqrt{k^2 - \xi^2})\nu(\xi) + \int\limits_{-N}^{N} \gamma(\xi - t)\nu(t)dt = -\tilde{h}(\xi)\eta\left(\frac{\xi}{N}\right). \tag{5}$$

Здесь $|\xi| < N = \varepsilon^{-1+\delta}$, $0 < \delta < 1$, $\eta(\xi/N)$ — характеристическая функция отрезка $[-1,\ 1]$,

$$\ln\tilde{\varepsilon} = \ln\varepsilon + \frac{\pi}{2i} - \ln 2 - \psi(1), \quad \gamma(\xi) = F(\ln\Phi)(\xi), \quad \tilde{h} = Fh,$$

F — преобразование Фурье, функция Φ задает форму цилиндра, h — значение падающей волны на цилиндре.

Соответствующая модельная задача решается явно и приводит к интегральному уравнению, аналогичному (5). Сравнение результатов показывает, что при выборе расширения (4) с ядром $\beta(\xi, \xi') = B(\xi - \xi') = \frac{2i}{\pi}F(\ln\Phi)$ и параметра $k_0 = \frac{2i}{\varepsilon}e^{\psi(1)}$ мы получаем совпадение модельного решения с главным членом асимптотики реального решения.

Полученное соответствие открывает возможность дальнейшего использования модели для исследования резонансов, анализа задачи о дифракции на узкой щели переменной ширины и т. д.

Работа поддержана грантом РФФИ.

Список литературы

[1] *Федорюк М.В.* // Изв. АН СССР. 1985. Т. 49. № 1. С. 160–194.
[2] *Бабич В.М., Самокиш Б.А., Дементьев Д.Б.* // Записки научн. семин. ПОМИ РАН. 1996. Т. 221. С. 151–157.
[3] *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. 240 с.
[4] *Fermi E.* // Ric. Sci. 1936. V. 7. P. 13–52.
[5] *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. Р. 1011–1014.
[6] *Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable Models in Quantum Mechanics. Berlin: Springer, 1988. 430 p.
[7] *Павлов Б.С.* // УМН. 1987. Т. 42. N 6. С. 99–131.
[8] *Благовещенский А.С., Лаврентьев К.К.* // Вестн. ЛГУ. 1977. № 1. С. 9–16.
[9] *Porov I.Yu.* // J. Math. Phys. 1992. V. 33. N 11. P. 3794–3801.
[10] *Шондин Ю.Г.* // ТМФ. 1995. Т. 105. № 1. С. 3–17.
[11] *Karwowski W., Koshmanenko V.* // J. Funct. Anal. 1997. V. 143. N 1. P. 205–220.
[12] *Hormander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 3. Pseudo-Differrential Operators. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberd, New York, Tokyo. 1985. 485 p.