01

Неравновесные фазовые переходы, индуцированные внешним шумом, в распределенных системах

© Ю.В. Гудыма

Черновицкий государственный университет

Поступило в Редакцию 8 августа 1998 г.

Предложен формализм, описывающий неравновесные фазовые переходы, индуцированные внешним мультипликативным шумом, в распределенных системах. Развитый подход позволяет свести данную проблему к исследованию регулярного дифференциального уравнения, корни которого отвечают возможным в системе фазовым состояниям. В рамках данной теории можно узнать относительную вероятность осуществления одного состояния по сравнению с другим состоянием, количество возможных состояний, а также проследить генезис системы под воздействием флуктуаций внешней среды.

Успехи теории самоорганизующихся систем в первую очередь связаны с тем, что термодинамически неравновесные системы, находящиеся в стационарном состоянии с детальным равновесием, формально неотличимы от равновесных, для анализа которых существует хорошо разработанный математический аппарат [1–2]. Кинетика фазовых превращений указанных выше систем отображается уравнением Ландау–Халатникова с аддитивным шумом, описывающим релаксацию фазовой переменной в новое, энергетически более выгодное состояние:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\hat{\Gamma}\frac{\delta S[U]}{\delta U} + \xi(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где $\hat{\Gamma}$, вообще говоря, оператор, слагаемое $\xi(\mathbf{r}, t)$ носит стохастический (флуктуационный) характер. Детерминированное слагаемое обозначает термодинамическую силу, определяемую в соответствии с общим подходом как функциональную производную функционала обобщенного термодинамического потенциала по локальному значению изучаемой переменной. Нетрудно показать, что плотность вероятности распределения этой величины для стационарного состояния имеет вид экспоненты от обобщеннного термодинамического потенциала (т. е. она потенциальна) [3–4].

Однако аддитивный внешний и внутренний шумы не приводят к индуцированным переходам. С другой стороны, известно, что в сильно неравновесных открытых системах внешний мультипликативный шум может не только инициировать релаксационный процесс между двумя существующими фазовыми состояниями, но и вызывать появление новых стационарных состояний, а также неравновесные фазовые переходы, индуцированные внешним шумом [5]. Исследование этих проблем в рамках (1) становится невозможным.

Теория неравновесных фазовых переходов, индуцированных внешним шумом, довольно полно разработана только для точечных феноменологических уравнений эволюционного типа [6]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f(\beta_t, U), \tag{2}$$

где β_t — внешний параметр, зависящий от состояния среды. Для систем типа (2) с функцией $f(\beta_t, U)$, линейной по внешнему параметру (случай, охватывающий ширкоий класс приложений), т. е.

$$f(\beta_t, U) = h(U) + \beta_t g(U), \tag{3}$$

где β_t — стационарный случайный процесс $\beta_t = \beta + \sigma\xi(t)$ и $\xi(t)$ есть стационарный центрированный нормальный процесс типа белого шума, уравнению (3) можно сопоставить уравнение Фоккера–Планка с стационарным решением потенциального вида.

Рассмотрим обобщение уравнений (2), (3) вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \hat{N}U + \sigma g(U)\xi(t), \tag{4}$$

где $\hat{N}$ — оператор, включающий в себя распределенную часть. Плотность вероятности осуществления величины U

$$P(U, t) = \langle \delta(\hat{N}U + \sigma g(U)\xi(t)) \rangle. \tag{5}$$

В случае нестационарной задачи под усреднением понимается усреднение по внешним силам $\xi(t)$ и по начальному полю $U(t = 0)$. Фактически, изучается тот стационарный режим, который установится под действием стационарных во времени внешних сил, если при $t \to -\infty$ $U(t \to -\infty) = 0$.

Используя интегральное представление δ-функции и учитывая, что $\xi(t)$ распределен как гауссовый белый шум, преобразуем (5) к виду

$$P(U,t) = \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dV}{2\pi i} \exp\left(-\int \left(V\hat{N}U - \frac{1}{2}[V\sigma g(U)]^2\right) dt\right). \tag{6}$$

Плотность вероятности перехода величины $\tilde{U}(t = 0)$ в состояние $\bar{U}(t = \tau)$

$$P(\bar{U},\tau,\tilde{U},0) = \int\limits_{\bar{U}}^{\bar{U}} D[U] \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dV}{2\pi i} \exp\left(-\int\limits_{0}^{r} \left(V\hat{N}U - \frac{1}{2}[V\sigma g(U)]^2\right) dt\right). \tag{7}$$

Континуальный интеграл (7) берется по всем путям $[U] = \{U(t)\}$, ведущим из начальной точки в конечную. Из выражения (7) также следует, что максимумы и минимумы вероятности перехода полностью определяются вариационным принципом

$$\delta S = \delta \int\limits_{0}^{\tau} \left(V\hat{N}U - \frac{1}{2}[V\sigma g(U)]^2\right) dt = \delta \int\limits_{0}^{\tau} L(V,U)dt = 0. \tag{8}$$

Таким образом, каждая система функций (V, U), реализующая максимум или минимум (7), должна удовлетворять системе уравнений Эйлера. Если не интересоваться изменениями введенного нами дополнительного поля V, то задача существенно упрощается и сводится к единственному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial U}(\hat{N}U) - \sigma^2 g^2(U) \frac{\partial}{\partial U}(\ln g(U)) = 0, \tag{9}$$

которому можно придать несколько иной ("потенциальный") вид

$$\frac{\partial}{\partial U}\left\{\int^{U} \frac{\hat{N}U}{g^2(U)} dU - \sigma^2 \ln g(U)\right\} = \frac{\partial}{\partial U}\Phi(U) = 0. \tag{10}$$

Максимумы "потенциала" $\Phi(U)$ соответствуют устойчивым стационарным состояниям, минимумы — неустойчивым стационарным состояниям. Это означает, что если стационарная плотность вероятности имеет только один максимум, то система флуктуирует относительно одного макроскопического состояния, т.е. существует в одной фазе. Если же стационарная плотность вероятности имеет два или более максимума, то система при одних и тех же внешних условиях может находиться в двух фазах. Исследование потенциала $\Phi(U)$ сводится к классической проблеме фазового перехода, описываемой дифференциальным уравнением в частных производных, методы исследования которой хорошо разработаны [7–8].

Рассмотрим для примера поведение системы, описываемой так называемым уравнением реакции-диффузии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U + h(U) + \beta g(U) + \sigma g(U)\xi(t), \tag{11}$$

типичным для явлений самоорганизации [1–2]. Приведенная выше схема приводит к уравнению для анализа воздействия быстродействующего внешнего шума на стационарное поведение систем типа (11):

$$\Delta U + h(U) + \beta g(U) - \sigma g(U)g'(U) = 0. \tag{12}$$

Последний член в этом выражении отображает воздействие внешнего шума и может приводить к дополнительным точкам фазового перехода, не имеющим места в полностью детерминированном случае. Однако наблюдение рассматриваемых переходов отнюдь не банально. Во-первых, пики вероятности таких состояний достаточно уширены собственно из-за шума. Во-вторых, они маскируются диффузионными членами.

Данная теория не дает возможности рассчитать плотность вероятности того или иного фазового состояния из-за того, что интеграл (7) определен только формально. Однако в рамках описанного формализма можно узнать относительную вероятность осуществления одного состояния по сравнению с другим состоянием, количество возможных состояний, а также проследить генезис системы под воздействием внешнего мультипликативного шума.

Иной подход к выходу за рамки уравнения (1) в теории неравновесных фазовых переходов представлен в [9]. В этой работе последовательно использована теория возмущений, что накладывает известные ограничения на полученные результаты.

Список литературы

[1] *Nicolis G., Prigogine I.* Self-Organization in Nonequilibrium Systems. N.Y., Wiley, 1977. (*Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.).

[2] *Haken H.* Advanced Synergetics. Berlin: Springer, 1983. (*Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1985. 423 с.).

[3] *Tauber U.C., Schwabl F.* Phys. Rev. B. 1993. V. 48. N 1. P. 186–209.

[4] *Олемской А.И.* // УФН. 1998. Т. 168. В. 3. С. 287–321.

[5] *Horshemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions. Berlin: Springer, 1984 (*Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987. 400 с.).

[6] *Ланда П.С., Заикин А.А.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. В. 1. С. 358–378.

[7] *Кузовлев Ю.Е., Соболева Т.К., Филлипов А.Э.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. В. 5. С. 1742–1761.

[8] *Максимов Л.А., Рязанов А.И., Цымбаленко В.Л.* // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. В. 1(7). С. 371–380.

[9] *Mazenko G.F.* // Cond-mat. 1998. N 9803029.