01

Реконструкция хаотических колебаний, прошедших через линейные фильтры

© А.А. Кипчатов, Е.Л. Козленко

Государственный учебно-научный центр "КОЛЛЕДЖ"
Саратовского государственного университета

Поступило в Редакцию 6 апреля 1998 г.

Рассмотрена проблема диагностики хаотических колебаний, порожденных динамической системой и искаженных какой-либо линейной инерционной цепью. Развит метод восстановления исходного сигнала и определения характеристик искажающего фильтра по временно́й реализации исследуемого процесса.

Известно, что хаотические колебания, прошедшие через линейные инерционные системы, искажаются, их восстановленные аттракторы усложняются, а размерность возрастает [1,2].

В зависимости от свойств фильтра повышение размерности происходит двумя путями. Для цепей, обладающих свойствами рекурсивных фильтров, происходит фрактальное расслоение исходного аттрактора хаотических колебаний (суперфрактализация), влекущее за собой повышение размерности в пределе бесконечного разрешения ($\varepsilon \to 0$) [3]. Это реальное повышение размерности. Величина этого повышения в пределе развитого хаоса и сильной фильтрации равна порядку фильтра [6]. Цепи, обладающие только лишь свойствами нерекурсивных фильтров, не должны приводить к увеличению размерности [4], однако перестройка аттрактора имеет место и в этом случае: аттрактор становится "лохматым", но сохраняет тонкую структуру. Это приводит к тому, что в некотором диапазоне пространственных масштабов размерность оценивается как более высокая. Это наблюдаемое увеличение размерности. В любом случае в доступном для вычислений диапазоне пространственных масштабов $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ при фильтрации будет фиксироваться повышение размерности, а исходная динамическая система будет замаскирована.

Возникает вопрос: возможно ли устанить влияние таких передающих цепей, не имея представления об устройстве исследуемой системы, а основываясь исключительно на информации, которую можно извлечь из временно́й реализации "черного ящика". В данной статье мы покажем, что это возможно, а также предложим процедуру, с помощью которой этого можно достичь на практике.

Идеология метода предложена в [5] и основана на линейности рассматриваемых инерционных систем, что позволяет синтезировать дополнительный фильтр, передаточная характеристика которого обратна передаточной характеристике скрытого фильтра. Тогда их общая передаточная характеристика не будет зависеть от частоты и на выходе дополнительного фильтра будут наблюдаться колебания, равные исходным с точностью до постоянного сдвига во времени.

Пусть скрытый фильтр имеет вид $z_n = \beta_0 x_n + \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k x_{n-k} + \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k z_{n-k}$, где x_n — входной сигнал, z_n — выходной сигнал. Передаточная характеристика такого фильтра имеет вид $H(\omega) = (\beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k e^{-jk\omega T})/(1 - \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k e^{-jk\omega T})$. Тогда если передаточную характеристику дополнительного фильтра обозначить за $H'(\omega)$, то должно выполняться $H(\omega)H'(\omega) \equiv 1$ и $H'(\omega)$ имеет вид $H'(\omega) = (1 - \sum_{k=1}^{p} \delta_k e^{-jk\omega T})/(\gamma_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k e^{-jk\omega T})$, где $\gamma_k = \beta_k$, $\delta_k = \alpha_k$. В предположении отсутствия шумов такой дополнительный фильтр даст на выходе сигнал исходной динамической системы.

Задача сводится к нахождению коэффициентов "антифильтра" γ_k и δ_k. Подбор коэффициентов "антифильтра" основывается на гипотезе, что если хаотические колебания были порождены динамической системой (ДС), то линейный фильтр, если $H(\omega) \not\equiv 1$, может только увеличить размерность аттрактора таких колебаний. В то же время размерность аттрактора колебаний на выходе системы типа "ДС + фильтр" может быть уменьшена до уровня размерности аттрактора исходного сигнала (на выходе ДС) путем подбора дополнительного фильтра. Более того, размерность можно использовать в качестве критерия выбора коэффициентов дополнительного фильтра [5]. Поясним на простом примере. Рассмотрим рекурсивный фильтра первого порядка $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + x_n$, где $\alpha_1 \in [-1, 1]$. Легко убедиться, что в качестве дополнительного фильтра следует взять нерекурсивный фильтр $w_n = \beta_1 z_{n-1} + z_n$ при $\beta_1 = -\alpha_1$ (для этого достаточно подставить z_n в выражение для w_n).

При $\beta_1 = -\alpha_1$ размерность аттрактора сигнала $\{w_n\}$ будет минимальна и равна размерности аттрактора исходного сигнала $\{x_n\}$. При всех остальных значениях β_1 размерность будет выше, так как

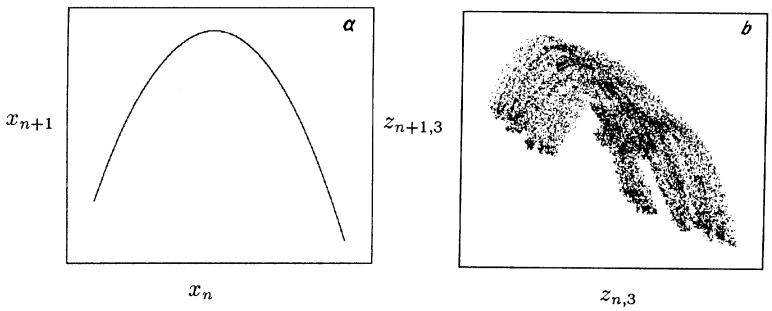

Рис. 1. Аттрактор, восстановленный по последовательности $\{x_n\}$, генерируемой логистическим отображением (a), и аттрактор, восстановленный по последовательности $\{z_{n,3}\}$ на выходе исследуемой системы (b).

результирующий фильтр будет представлять собой рекурсивный фильтр с отличным от нуля коэффициентом. Таким образом, если вычислить размерность аттрактора результирующих колебаний для всех $\beta_1 \in [-1, 1]$ и построить трехмерный график $D_c = D_c(E, \beta_1)$, где D_c — корреляционная размерность, E — масштаб наблюдения (в dB) ($E = 20\lg\,(\varepsilon/\varepsilon_0)$), то при $\beta_1 = -\alpha_1$ должен наблюдаться минимум.

Обобщим процедуру на случай фильтра более высокого порядка. Допустим, скрытый фильтр допускает представление в виде цепочки из p рекурсивных и m нерекурсивных фильтров (заметим, что это не всегда возможно). Тогда дополнительный фильтр будет представлять из себя цепочку из m рекурсивных и p нерекурсивных фильтров. Коэффициенты фильтров сконструированной цепочки можно найти последовательно, наращивая цепочку дополнительных фильтров, используя выше описанную схему.

Рассмотрим следующий пример. Исследуемая система состоит из логистического отображения $x_n = 1 - \lambda x_{n-1}^2$, генерирующего хаотическую последовательность $\{x_n\}$, при $\lambda = 1.9$ и цепочки из двух рекурсивных и одного нерекурсивного фильтра

$$z_{n,1} = x_n + \alpha_1 z_{n-1,1}$$

$$z_{n,2} = z_{n,1} + \alpha_2 z_{n-1,2}$$

$$z_{n,3} = z_{n,2} + \beta_1 z_{n-1,2}.$$

Здесь первый подстрочный индекс означает дискретное время, а второй — номер фильтра в цепочке. Значения α и β лежат в диапазоне $[-1, 1]$. Объединенная система при $\alpha_1 = -0.7$, $\alpha_2 = 0.8$, $\beta_1 = -0.4$ представляет "черный ящик" и для анализа доступна только последовательность $\{z_{n,3}\}$. Аттракторы, восстановленные по последовательности $\{x_n\}$ и по $\{z_{n,3}\}$ представлены на рис. $1, a$ и b соответственно. Видно, что аттрактор фильтрованного сигнала значительно отличается от исходного и привычными методами он не будет опознан как порожденный логистическим отображением.

Попытаемся отыскать вначале коэффициенты рекурсивных фильтров. Для этого будем использовать нерекурсивный фильтр вида:

$$w_n = z_n - \gamma z_{n-1}, \tag{1}$$

где z_n — сигнал на входе "антифильтра", w_n — сигнал на выходе. Коэффициент γ будем варьировать в пределах от -1 до $+1$ с шагом $\Delta\gamma = 0.1$. Для каждого γ из указанного диапазона будем производить расчет корреляционной размерности D_c для аттрактора сигнала $\{w_n\}$, используя алгоритм, основанный на методе, предложенном Грассбергером и Прокаччиа [9]. Параметры метода: число точек реализации $N = 10^5$, число точек редукции $M = 10^4$, размерность пространства вложения $d = 5$, временнáя задержка $\tau = 1$. Эффективный диапазон пространственных масштабов E находится в пределах от -60 до -20 dB. Область больших масштабов ($E > -20$ dB) отсекается из-за влияния краевых эффектов [7], область малых пространственных масштабов ($E < -60$ dB) отсекается из-за недостатка точек [8]. По полученным данным строим график зависимости $D_c(E, \gamma)$, $E \in [-60, -20]$, $\gamma \in [-1, 1]$ (рис. $2, a$). Явно заметен минимум при $\gamma = -0.7$. Считаем, что мы нашли первый "рекурсивный коэффициент" "антифильтра" $\alpha_1 = \gamma = -0.7$ ($\alpha_1 = \gamma$, а не $-\gamma$, поскольку в (1) перед γ уже стоит минус). Теперь сигнал $\{w_n\}$, полученный при $\gamma = -0.7$, пропустим через фильтр (1) и вновь строим график $D_c = D_c(E, \gamma)$ (рис. $2, b$). На этот раз четкий минимум наблюдается при $\gamma = 0.8$, из чего заключаем, что $\alpha_2 = 0.8$. На третьем шаге минимум не наблюдается (рис. $2, c$) поэтому считаем, что все "рекурсивные коэффициенты" "антифильтра" найдены.

Следуя предложенному методу, коэффициенты нерекурсивных звеньев скрытых фильтров будем искать при помощи рекурсивного дополнительного фильтра вида $w_n = z_n - \delta w_{n-1}$. При этом в качестве входного сигнала будет выступать сигнал, полученный с выхода последнего

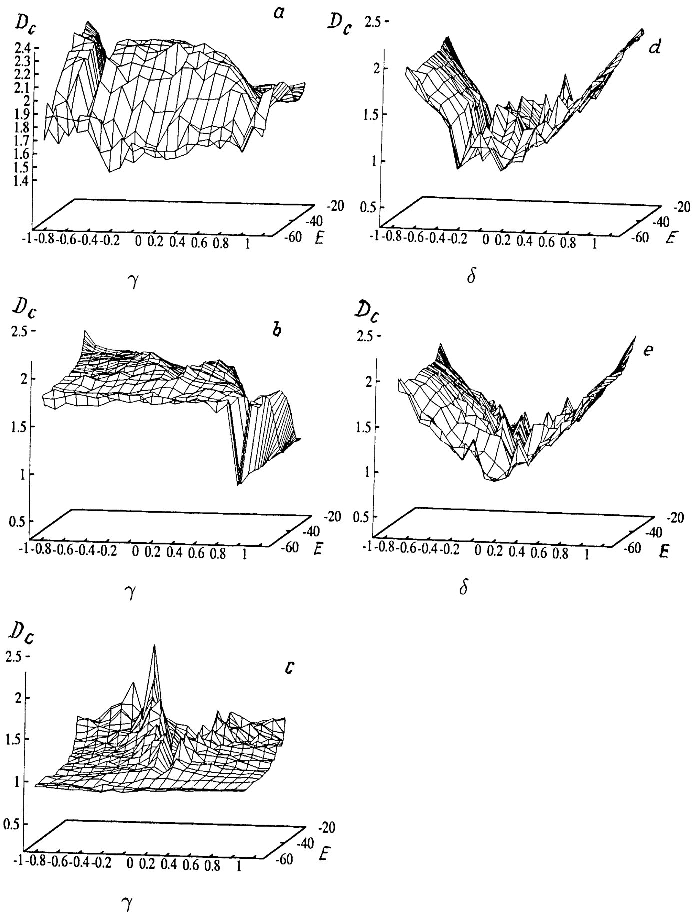

Рис. 2. Графики зависимости корреляционной размерности от масштаба наблюдения и коэффициента антифильтра, построенные по сигналу, полученному с выхода первого (a), второго (b) и третьего (c) нерекурсивных дополнительных фильтров, и графики, построенные по сигналу, прошедшему через нерекурсивные дополнительные фильтры и через первый (d) и второй (e) рекурсивные дополнительные фильтры. D_c — корреляционная размерность, E — пространственный масштаб наблюдения, γ, δ — коэффициенты дополнительных фильтров.

дополнительного фильтра вида (1), при котором наблюдался минимум. На рис. 2, *d* представлен график зависимости $D_c = D_c(E, \delta)$. На графике заметен минимум при $\delta = -0.4$, т.е. $\beta_1 = -0.4$. Повторив процедуру, замечаем, что минимум на графике размерности отсутствует, а значит все "нерекурсивные коэффициенты" найдены (рис. 2, *e*).

Таким образом, мы нашли γ_1, γ_2, δ_1, полностью определяющие коэффициенты скрытого фильтра, и полностью реконструировали вид временнóй реализации исходной динамической системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

[1] *Badii R., Politi A.* // Proceedings of workshop instabilities in quantum, 1986.
[2] *Sauer T., Yorke J.* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. V. 3(3). P. 737–744.
[3] *Kipchatov A.A., Krasichkov L.V.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21 (4) С. 1–6.
[4] *Broomhead D., Huke J., Muldoon M.* // J. Roy. Stat. Soc. B. 1992. V. 54. P. 373–382.
[5] *Chennaoui A., Pawelzik K.* et al. // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. N 8. P. 4151–4159.
[6] *Kipchatov A.A., Kozlenko E.L.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23 (7). С. 8–13.
[7] *Ding M., Grebogi C., Ott E.* et al. // Physica D. 1993. V. 69. P. 404–424.
[8] *Кипчатов А.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21 (15). С. 90–95.
[9] *Grassberger, Procaccia I.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 346.