

01;05.2;06

Нелинейные аномалии проводящих сред с коническими микросужениями

© Ч.С. Ким, А.М. Сатанин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Department of Physics, Chonnam National University, Kwangju, Korea

Поступило в Редакцию 20 мая 1998 г.

Исследованы расходимости высших моментов поля в проводящих структурах с коническими особыми областями. Вычислены критические значения параметров, определяющих нелинейные аномалии среды.

Эффективные нелинейные характеристики неоднородных сред определяются как локальными значениями параметров материала, так и микрогеометрией компонент [1]. Геометрические эффекты усиления нелинейности среды ранее исследованы в двумерных фрактальных средах [2,3] и периодических решетках [4,5]. В данной работе будет показано, что подобные аномалии имеют место также в трехмерных средах. В качестве точнорешаемой модели рассматривается среда с коническими микросужениями. Такого типа области могут формироваться, например, в периодических упаковках кубов с сильно различающимися проводимостями σ_1 и σ_2 . Пусть на первом слое упаковки кубы образуют решетку типа "шахматной доски", а в следующем слое над кубами с проводимостью σ_1 помещены кубы с проводимостью σ_2 и т.д. Иными словами, кубы двух типов упакованы в решетку со структурой каменной соли. В этом случае области соприкосновения кубов одного типа с проводимостями σ_1 представляют собой пирамиды, которые касаются друг друга вершинами и окружены средой с проводимостью σ_2 . Поскольку аномалия связана с концентрацией тока вблизи вершин, то характер расходимости можно продемонстрировать на примере областей соприкосновения более простой формы. Интересуясь тем, может ли качественно измениться тип аномалий при переходе от ранее рассмотренной двумерной системы [4,5] к трехмерной и для получения точного решения мы заменим пирамидальные области касания коническими. Отметим, что задача о двух соприкасающихся конусах

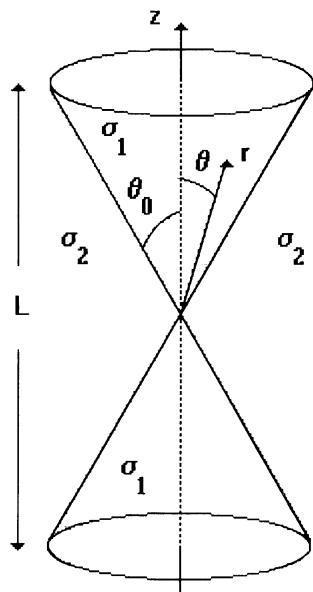


Рис. 1. Схематически изображены конические области (линейная проводимость σ_1), погруженные в среду с плохой проводимостью (проводимость σ_2).

имеет также самостоятельный интерес. Во-первых, такие структуры могут быть созданы методами микротехнологии, а во-вторых, поскольку она обобщает известную задачу о конических дефектах (вмятинах) в металлической поверхности [6,7]. Ниже мы представим результаты точного решения поставленной задачи.

Мы будем изучать протекание тока вдоль оси структуры, изображенной на рис. 1. Как и в известной задаче об острие [8], мы интересуемся поведением решения вблизи особенности. Пусть основания хорошо проводящих конусов присоединены к омическим контактам на характерном расстоянии L от вершин конусов. Чтобы найти эффективную линейную проводимость структуры, необходимо решить уравнения для тока \mathbf{j} и поля \mathbf{e} :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{e}, \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\sigma_1(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})_1 = \sigma_2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})_2, \quad (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau})_1 = (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau})_2, \quad (2)$$

где \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные нормальный и тангенциальный векторы к поверхностям раздела фаз. Эффективная линейная проводимость может быть определена из условия для диссипации энергии

$$\langle \sigma \mathbf{e}^2 \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{e} \rangle^2, \quad (3)$$

где использовано обозначение $\langle (\dots) \rangle = \int (\dots) dV/V$ для усреднения по объему V . Далее мы воспользуемся тем фактом, что для слабо нелинейной среды с локальной связью вида $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} = -\chi \mathbf{e}^2 \mathbf{e}$ эффективная нелинейная проводимость χ_e определяется коррелятором четвертого порядка поля в линейной среде (обоснование приведено в [9,10])

$$\chi_e = \frac{\langle \chi \mathbf{e}^4 \rangle}{\langle \mathbf{e} \rangle^4}. \quad (4)$$

Как следует из (3), эффективная линейная проводимость определяется квадратичным моментом поля; эффективная нелинейная проводимость выражается через четвертый момент поля (4). Нас будут интересовать также высшие моменты поля $\langle \mathbf{e}^{2n} \rangle$. Согласно [11], амплитуды гармоник, возбуждаемых в среде переменным полем, определяются выражением

$$B_{3(n-1)} \sim \langle \mathbf{e}^{2n} \rangle, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (5)$$

где поле также находится из линейных уравнений (1). Цель данной работы состоит в том, чтобы продемонстрировать расходимость высших моментов поля при конечном (критическом) значении параметров системы: отношении проводимостей $h = \sigma_2/\sigma_1$ или растворе конусов ϑ_0 .

Решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi, \quad (6)$$

где потенциал $\varphi = r^\lambda f(\vartheta)$, а функция $f(\varphi)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} f + \lambda(\lambda + 1)f = 0. \quad (7)$$

Решение (7) при $\vartheta < \vartheta_0$ следует взять в виде

$$f_1 = AP_\lambda(\cos \vartheta), \quad (8)$$

где $P_\lambda(x)$ — функция Лежандра. Для углов $\vartheta_0 < \vartheta < \pi/2$ решение имеет вид

$$f_2 = B \left[\frac{1}{2} (1 - \cos \pi \lambda) P_\lambda(\cos \vartheta) + \frac{\sin \pi \lambda}{\pi} Q_\lambda(\cos \vartheta) \right], \quad (9)$$

где $Q_\lambda(x)$ — функция Лежандра второго рода. Функции f_1 и f_2 на поверхности конуса подчиняются граничным условиям

$$f(\vartheta_0)_1 = f(\vartheta_0)_2, \quad f'(\vartheta_0)_1 = hf'(\vartheta_0)_2, \quad (10)$$

где $f' = \partial f / \partial \vartheta$. Отметим, что решение в области углов ($\vartheta > \pi/2$) получается из (8) и (9) путем продолжения нечетным образом по углу (в силу граничных условий по внешнему полю).

Подставляя (8) и (9) в граничные условия (10), нетрудно получить, что общее решение имеет место, если выполнено соотношение

$$\begin{aligned} hP_\lambda(x) \left[\frac{1}{2} (1 - \cos \pi \lambda) P_{\lambda+1}(x) + \frac{\sin \pi \lambda}{\pi} Q_{\lambda+1}(x) - xF_\lambda(x) \right] \\ = F_\lambda(x) [P_{\lambda+1}(x) - xP_\lambda(x)], \end{aligned} \quad (11)$$

где $x = \cos \vartheta_0$, а $F_\lambda(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos \pi \lambda) P_\lambda(x) + \frac{\sin \pi \lambda}{\pi} Q_\lambda(x)$. Уравнение (11) позволяет определить зависимость параметра λ от h и ϑ .

Подставляя полученное решение для поля в (5), вычислим вклад в коррелятор, обусловленный особенностями тока в конической области

$$\langle \mathbf{e}^{2n} \rangle = \frac{\text{const}}{V} \int_0^L dr r^2 r^{2n(\lambda-1)} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta [(f')^2 + \lambda^2 f^2]. \quad (12)$$

Из (12) следует, что интеграл расходится при $\lambda_c = 1 - 3/2n$. Зная λ_c , из (11) можно найти критическое значение параметра h_c как функцию угла ϑ_0 . На рис. 2 представлена полученная численным решением (11) зависимость h_c от ϑ_{0c} для различных номеров гармоник n . Максимальные значения критических параметров (h_c , ϑ_{0c}) зависят

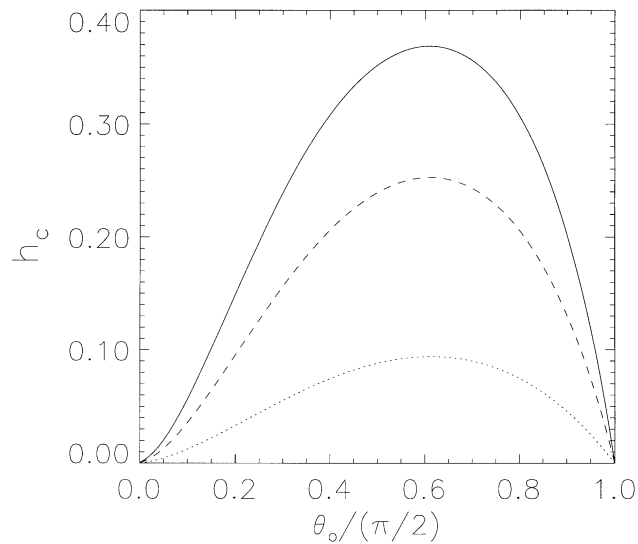


Рис. 2. Критический параметр структуры h_c как функция угла раствора конусов ϑ_0 для различных моментов: точечной кривой изображена зависимость для четвертого момента (нелинейной проводимости); пунктирной и непрерывной для $n = 3$ и $n = 4$ соответственно.

от n . Приведем значение для нескольких низших моментов: для $n = 2$ получаем ($h_c = 0.094$, $\nu_{0c} = 55.50$); для $n = 3$ ($h_c = 0.253$, $\nu_{0c} = 55.30$) и для $n = 4$ имеем ($h_c = 0.369$, $\nu_{0c} = 55.18$). Критические значения параметров (h_c , ν_{0c}) в трехмерном случае существенно отличаются от двумерного случая (задача о секторах обсуждается в [5]). Например, критический угол (в силу дуальной симметрии) в двумерной системе одинаков для всех моментов и равен $\pi/2$, тогда как в трехмерной системе он зависит от номеров гармоник.

Предсказание аномалий и вычисление критических значений параметров конических особенностей составляет основной результат данной работы. Разумеется, в реальной системе вследствие геометрических факторов или тепловых эффектов произойдет стабилизация роста гармоник. Мы не обсуждали здесь механизмы обрезания аномалий, так как этому будет посвящена отдельная работа.

Для наблюдения аномалий удобно измерять зависимость амплитуд гармоник от микропараметров системы. Современные методы микро- и нанотехнологии позволяют создавать среды с заданной микрогеометрией. Случайная среда с коническими особенностями может быть получена путем специальной формовки микрочастиц [12]. Для наблюдения аномалий можно также воспользоваться модельной системой. Например, для получения среды с переменным h удобно использовать электролит, в который погружен электрод конической формы, расположенный над металлической поверхностью.

Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 97-02-16923а) и грантом Министерства образования Кореи (грант № BSRI-96-2431).

Список литературы

- [1] *Proceeding of the Fourth International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media // Physica. A. 1997. V. 241. N 1-2.*
- [2] *Сатанин А.М., Хорьков С.В., Угольников А.Ю. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. С. 301.*
- [3] *Сатанин А.М. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. С. 44.*
- [4] *Сатанин А.М., Скузоваткин В.В., Хорьков С.В. // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 495.*
- [5] *Сатанин А.М., Скузоваткин В.В., Хорьков С.В. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. С. 643.*
- [6] *Hall R.N. // J. Appl. Phys. 1949. V. 20. P. 925.*
- [7] *Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.*
- [8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.*
- [9] *Aharony A. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 2726.*
- [10] *Stroud Д., Hui P.M. // Phys. Rev. B. 1988. V. 37. P. 8719.*
- [11] *Dubson M.A., Hui Y.C., Weissman M.B., Garland J.C. // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. P. 6807.*
- [12] *Wu J., McLachlan D.S. // Physica A. 1997. V. 241. P. 360.*