

01

Динамика решетки отображений с пороговой связью

© А.А. Короновский

Государственный учебно-научный центр "Колледж",
Саратовский государственный университет

Поступило в Редакцию 29 апреля 1998 г.

Рассматривается динамика решетки логистических отображений с пороговой связью и показывается, что в зависимости от значений управляющих параметров в таких решетках возможно образование различных типов пространственных структур. Для таких структур существует набор численных величин, характеризующий тип структуры, который зависит от значений управляющих параметров. Показано, что в пространственно-стационарных структурах, возникающих в решетке связанных отображений, существуют малые области нестационарных процессов, в которых реализуются периодические колебания.

Логистическое отображение является хорошо изученным и, можно сказать, эталонным объектом нелинейной динамики (см., например, [1]). На основе этого эталонного отображения строятся и изучаются системы связанных логистических отображений [2,3], одномерные цепочки и двумерные решетки логистических отображений с различными типами связей [4–6]. В частности, были рассмотрены два логистических отображения с взаимной пороговой связью [7] и цепочка логистических отображений с однонаправленной пороговой связью [8].

В данной работе рассматривается решетка логистических отображений, связанных друг с другом при помощи пороговой связи:

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k \left(a - s \cdot \operatorname{sgn} \left(\left\{ \sum_{l=i-1}^{i+1} \sum_{s=j-1}^{j+1} u_{ls}^k \right\} - u_{ij}^k - u_{ih} \right) - u_{ij}^k \right), \quad (1)$$

где i, j — дискретные пространственные координаты элемента решетки, а k — дискретное время. Параметры a и s полагаются одинаковыми для всех элементов решетки. Как видно из (1), на произвольный элемент решетки оказывают влияние элементы, находящиеся в непосредственном соседстве с рассматриваемым элементом. Численные значения

параметров a и s выбраны таким образом, чтобы поведению рассматриваемого отображения соответствовала неподвижная устойчивая точка на диаграмме Ламерея, если в элементах, соседних с рассматриваемым, отсутствуют колебания, иными словами, $(a+s) < 3$. Параметр u_{th} является порогом, при превышении которого величиной $(\{\sum_{l=i-1}^{i+1} \sum_{s=j-1}^{j+1} u_{ls}^k\} - u_{ij}^k)$

происходит скачкообразная смена устойчивой неподвижной точки в отображении с дискретными координатами i, j . Собственно говоря, именно поэтому данный тип связи и получил название "пороговой". Слагаемое $-u_{ij}^k$, находящееся под знаком sgn , введено для исключения влияния связи элемента с дискретными координатами i, j с самим собой.

Таким образом, на динамику элемента решетки с дискретными координатами i, j оказывают влияние его соседи, а сам этот элемент, в свою очередь, оказывает влияние на них.

Поскольку в данной работе мы рассматриваем ограниченные решетки отображений, то необходимо наложить условия на граничные элементы. Будем далее считать, что для элементов с дискретной координатой $i = 0$ справедливо соотношение

$$u_{0j}^{k+1} = u_{0j}^k \left(a - s \cdot \text{sgn} \left(\left\{ \sum_{l=0}^1 \sum_{s=j-1}^{j+1} u_{ls}^k \right\} - u_{0j}^k - u_{th} \right) - u_{0j}^k \right). \quad (2)$$

Аналогичные соотношения могут быть записаны и для остальных граничных элементов решетки отображений с координатами $j = 0$, $i = I_{\max}$, $j = J_{\max}$. Иными словами, можно сказать, что рассматривается решетка со свободными краями, ибо на граничные элементы решетки оказывают влияние только их непосредственные соседи, находящиеся внутри и по границам решетки.

Как показывают результаты проведенных численных экспериментов, в решетке логистических отображений с пороговыми связями после истечения переходного процесса устанавливается равновесное состояние, вид которого зависит от параметров системы и начальных условий. Интересным моментом является обстоятельство, что в установившихся пространственно-стационарных структурах существуют "островки" из нескольких элементов, в которых существуют колебания. При одних и тех же значениях параметров, но разных начальных распределениях в решетке отображений устанавливаются различные структуры, но тем

не менее можно ввести в рассмотрение некоторые "интегральные" характеристики, которые будут у таких структур одинаковыми.

Будем рассматривать решетку $m \times n$ со свободными краями, описываемую соотношениями (1), (2) со случайным начальным распределением. Пусть N_+ — число элементов решетки отображений, значение которых после завершения переходного процесса оказывается постоянным и больше, чем u_{th} (можно сказать, что такие элементы находятся в возбужденном состоянии), N_- — число элементов решетки отображений с постоянным значением, меньшим чем u_{th} (невозбужденное состояние), и N_0 — число элементов решетки, в которых после завершения переходного процесса реализуются колебания (осциллирующее состояние). Тогда введем в рассмотрение величины

$$\alpha_{mn} = \frac{N_+}{m \times n}, \quad \beta_{mn} = \frac{N_-}{m \times n}, \quad \gamma_{mn} = \frac{N_0}{m \times n},$$

которые являются фактически относительным числом элементов, находящихся в возбужденном, невозбужденном и осциллирующем состояниях. Как следует из результатов численного исследования подобной решетки, внешний вид структур, возникающих из различных начальных распределений, различен, но величины α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} для таких структур практически не изменяются.

Вполне понятно, что размер рассматриваемой решетки оказывает влияние на численные значения α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} — чем меньше размер решетки, тем более существенную роль играют краевые эффекты. Поэтому стоит ввести в рассмотрение также параметры α , β и γ для бесконечной решетки элементов:

$$\alpha = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \alpha_{mn}, \quad \beta = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \beta_{mn}, \quad \gamma = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \gamma_{mn}.$$

Понятно, что чем больше размер рассматриваемой решетки $m \times n$, тем ближе значения α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} к α , β и γ . На рис. 1 представлена зависимость величин $\alpha_{150 \times 150}$, $\beta_{150 \times 150}$, $\gamma_{150 \times 150}$ и $\alpha_{50 \times 50}$, $\beta_{50 \times 50}$, $\gamma_{50 \times 50}$ от значения управляющего параметра u_{th} . Отчетливо прослеживаются несколько особенностей динамики решетки связанных логистических отображений с пороговой связью: во-первых, на этом рисунке видно отличие значений α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} для решеток различных размеров, обусловленное влиянием краевых эффектов. Во-вторых, видно, что диапазон изменения

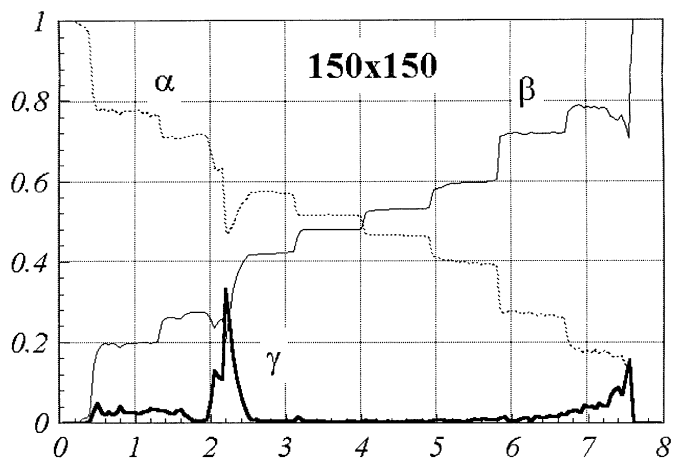
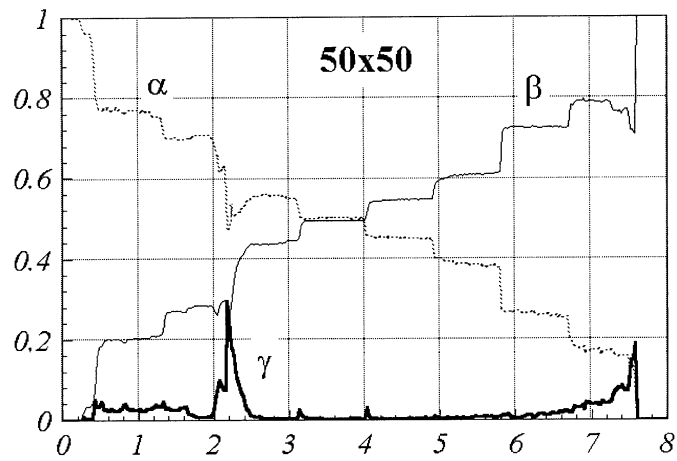


Рис. 1. Зависимость величин $\alpha_{150 \times 150}$, $\beta_{150 \times 150}$, $\gamma_{150 \times 150}$ и $\alpha_{50 \times 50}$, $\beta_{50 \times 50}$, $\gamma_{50 \times 50}$ от значения управляющего параметра u_{th} ($a = 1.5$, $s = 0.45$).

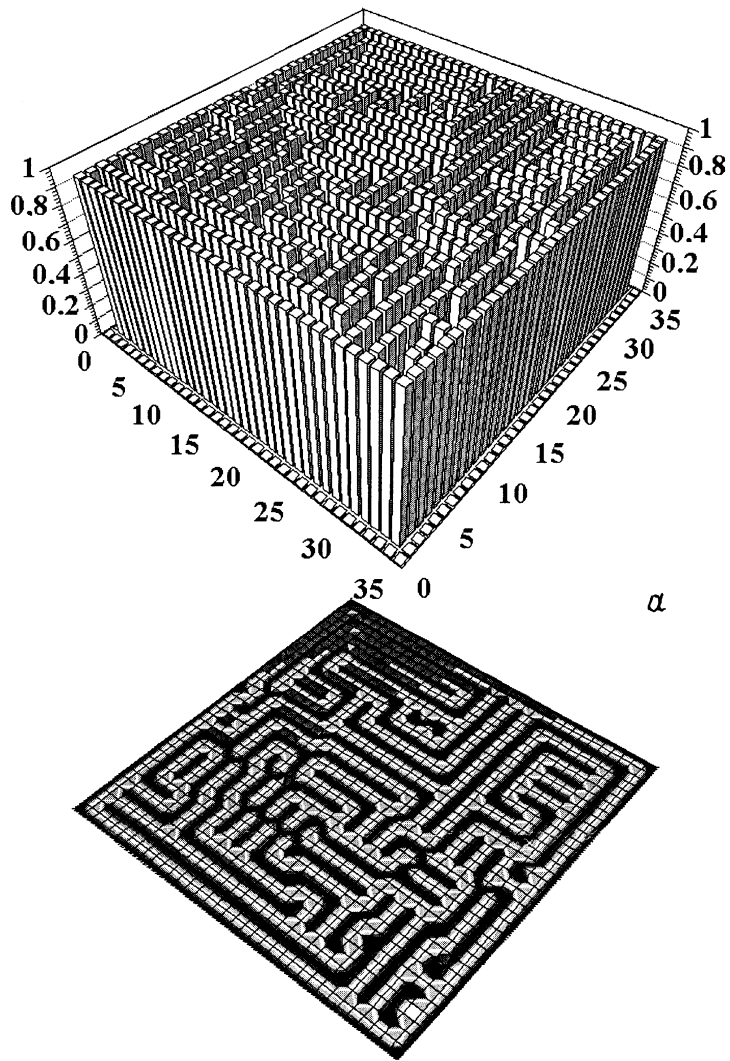


Рис. 2. *a* — структура, возникающая в решетке 35×35 логистических отображений с пороговой связью при значениях управляющих параметров $a = 1.5$, $s = 0.45$ и $u_{th} = 4.4$; *b* — фрагмент той же структуры, который иллюстрирует колебательное поведение с периодом колебаний 2.

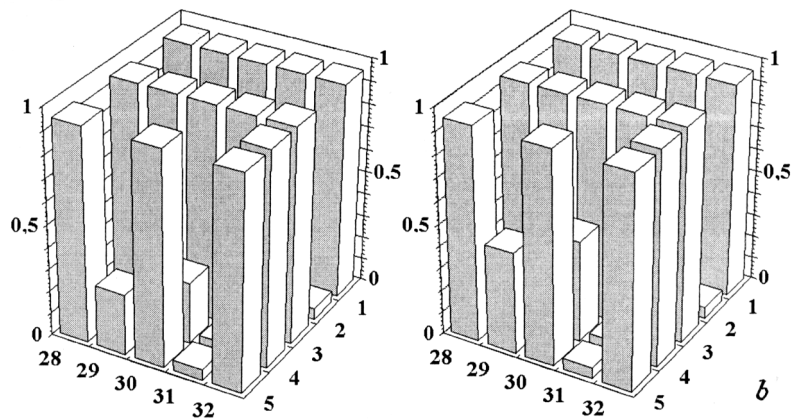


Рис. 2 (продолжение).

управляющего параметра u_{th} оказывается разбитым на несколько характерных участков, в пределах которых значения α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} меняются слабо. Наконец, видно, что в диапазоне изменения параметра u_{th} существуют области, при попадании в которые параметра u_{th} в решетке связанных пороговой связью логистических отображений возникает большое число "островков" колебательных движений. Рис. 2, *a* иллюстрирует вид структуры, возникающей в решетке отображений, а рис. 2, *b* — временное поведение "островка" колебательных движений внутри пространственно-однородной структуры, возникающей в решетке.

Интересен также вопрос о том, что произойдет со структурой, установившейся в решетке после переходного процесса, если начать медленно изменять управляющий параметр u_{th} . Изначально можно предположить две возможности поведения установившейся структуры: либо с изменением u_{th} установившаяся структура не будет претерпевать никаких изменений (стационарные области будут оставаться стационарными, а в "островках" колебательных движений будут реализовываться колебания) до тех пор, пока значение u_{th} не выйдет за пределы диапазона, в котором значения α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} меняются слабо; либо установившаяся структура будет с изменением параметра u_{th} претерпевать незначительные изменения, часть отображений, устойчивых ранее, будет превращаться в "островки" колебаний, и наоборот, в колеба-

тельных областях могут прекращаться колебания и реализовываться стационарные состояния. В то же время эти малые изменения не должны затрагивать общую структуру, возникающую в решетке. При выходе u_{th} за границу диапазона незначительных изменений α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} должна происходить существенная перестройка структуры, реализующейся в решетке логистических отображений с пороговой связью.

Как выяснилось в результате проведенных исследований, в решетке логистических отображений с пороговой связью при изменении параметра u_{th} осуществляется второй вариант развития событий: если при изменении u_{th} не выходит за границы некоторого интервала α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn} , то в структуре, возникающей в решетке, с изменением u_{th} происходят незначительные изменения (рождаются и исчезают "островки" колебаний, отдельные элементы могут переходить из возбужденного состояния в невозбужденное, и наоборот), а при выходе u_{th} за границу этого интервала происходит серьезная перестройка структуры.

Таким образом, в работе рассмотрена решетка логистических отображений с пороговой связью. Установлено, что в подобных решетках при выборе управляющих параметров решетки таким образом, чтобы отдельно взятое логистическое отображение при отсутствии колебаний в соседних элементах не демонстрировало никакой колебательной динамики, возникают пространственно-стационарные структуры с "островками" колебаний, зависящие от управляющих параметров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96-02-16753.

Список литературы

- [1] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. № 1, 2. С. 15–33.
- [2] Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 7. Р. 788–792.
- [3] Кузнецов С.П. // ЖТФ. 1985. Т. 55. В. 9. С. 1830–1834.
- [4] Кузнецов С.П. // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. В. 2. С. 94–98
- [5] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 10, 11, 12.
- [6] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 2. С. 142–146.
- [7] Короновский А.А., Пономаренко В.И., Трубецков Д.И. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 2. С. 63–71.
- [8] Короновский А.А. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 5. С. 61.