

01

Трассировка траекторий — новый метод исследования эволюции состояний динамических систем

© П.Н. Горлей, П.П. Горлей, П.М. Томчук

Черновицкий государственный университет, Черновцы
Институт физики НАНУ, Киев

Поступило в Редакцию 19 марта 1998 г.

Описан предлагаемый авторами экспресс-метод трассировки траекторий, обеспечивающий четкое определение точек бифуркаций удвоения периода и дающий наглядную информацию о трансформации состояний системы в фазовом пространстве.

Исследование процессов самоорганизации в различных неравновесных динамических системах в настоящее время проводится весьма интенсивно, что обусловлено как чисто академической перспективой создания новой парадигмы, так и возможностью разработки новых принципов функционирования сложных технических систем [1,2]. При этом для изучения эволюции динамических систем в зависимости от величины управляющих параметров обычно используют числовые характеристики, описывающие фазовый портрет системы в целом (например, размерность Хаусдорфа или показатели Ляпунова [1,2]), либо определяют спектральные характеристики компонент [3]. Недостатком перечисленных методов является то, что их реализация на ЭВМ, с одной стороны, требует относительно больших затрат времени, а с другой — точность расчетов существенно зависит от начальных условий и выбора шага интегрирования [1–4]. Поэтому разработка простых экспресс-методов, которые были бы лишены указанных недостатков и вместе с тем давали возможность с необходимой точностью исследовать эволюцию сложных динамических систем, является актуальной задачей.

В настоящей работе предложен один из таких методов — метод трассировки траекторий, который обеспечивает четкое определение точек бифуркаций удвоения периода и дает наглядную информацию о

трансформации состояний системы в фазовом пространстве. Преимущество этого метода заключается также в его простой алгоритмической реализации и высоком быстродействии. Кроме этого, в работе модифицирована на случай непрерывных динамических процессов методика построения бифуркационных диаграмм, которая была ранее разработана для итерационных процессов [4]. Бифуркационная диаграмма в данном случае представляет совокупность точек, которые отвечают положению экстремумов одной из компонент фазового пространства в зависимости от величины управляющего параметра. Модификация метода позволяет с высокой точностью определять значения управляющего параметра, при которых происходят бифуркации удвоения периода низких порядков, и, кроме того, качественно проследить сценарий перехода от порядка к хаосу.

1. Для изложения сути метода трассировки рассмотрим фазовую траекторию в N -мерном пространстве, которая получена экспериментально или путем численных расчетов и состоит из M точек. Обычно точки траектории некоторое время "петляют" перед выходом на аттрактор [5,6]. Поэтому поместим начало отсчета в такую точку M_0 фазовой траектории, которая наверняка принадлежит аттрактору. Примем для определенности, что $M_0 = M/2$. Проведем начальный N -мерный вектор из точки M_0 в точку $M_0 + 1$ и какой-нибудь другой вектор, например с координатами $(M_0 + 1; M_0 + 2)$. Пусть пространственный угол между этими векторами равен α . Определим также углы α_R между начальным вектором и произвольным R -м вектором, построенным между точками $(M_0 + R, M_0 + R + 1)$, где $0 \leq R \leq M_0$. Построим зависимость величины $\cos \alpha_R$ от длины трассировочного участка фазовой траектории R , которая и будет представлять собой трассировочную кривую. При этом значение косинуса угла для N -мерного случая определяется стандартным методом с помощью скалярного произведения векторов [7]. Примем во внимание, что фазовый портрет представляет собой дискретный набор точек, плотность распределения которых вдоль фазовой траектории, вообще говоря, неодинакова. Понятно, что если бы точки фазового портрета равномерно распределялись, например по окружности, то трассировочная кривая была бы близка к синусоиде. Если же фазовый портрет имеет вид эллипса, то фазовые точки, как правило, более плотно расположены в местах наибольшей кривизны. Трассировочные кривые в этом случае в зависимости от вида эллипса будут очень близки к треугольному (для вытянутого эллипса) или прямоугольному (для сплюснутого эллипса)

виду. Естественно, что при бифуркациях удвоения периода наблюдается удвоение пиков на трассировочных кривых, причем бифуркации высших порядков порождают пики меньшей высоты.

2. Приведем результаты сравнительных вычислений для наиболее изученных аттракторов Лоренца и Ресслера, которые описываются следующими системами уравнений [4]:

а) аттрактор Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \delta(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{1}$$

б) аттрактор Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - \mu),\end{aligned}\tag{2}$$

где a, b, r, μ, δ — управляющие параметры.

На рис. 1 и 2 представлены зависимости от управляющего параметра максимального показателя Ляпунова (a), эволюции трассировочных кривых (b) и бифуркационные диаграммы компоненты y системы (c) для аттракторов Ресслера и Лоренца соответственно. Общий вид этих аттракторов показан на вставках рисунков. Для аттрактора Лоренца управляющим параметром выбран параметр r , а для аттрактора Ресслера — параметр μ .

Аттрактор Ресслера, как известно [4], является достаточно устойчивой упорядоченной системой, о чем свидетельствуют небольшие по величине значения максимального ляпуновского показателя (рис. 1, a). С увеличением значений управляющего параметра показатель Ляпунова растет, что указывает на уменьшение стабильности системы и последующий переход в хаотическое состояние. Бифуркационная диаграмма (рис. 1, c) состоит из двух почти симметричных веток, при этом переход системы от порядка к хаосу на начальной стадии происходит путем бифуркаций удвоения периода колебаний, что подобно динамике популяций Ферхюльста [4].

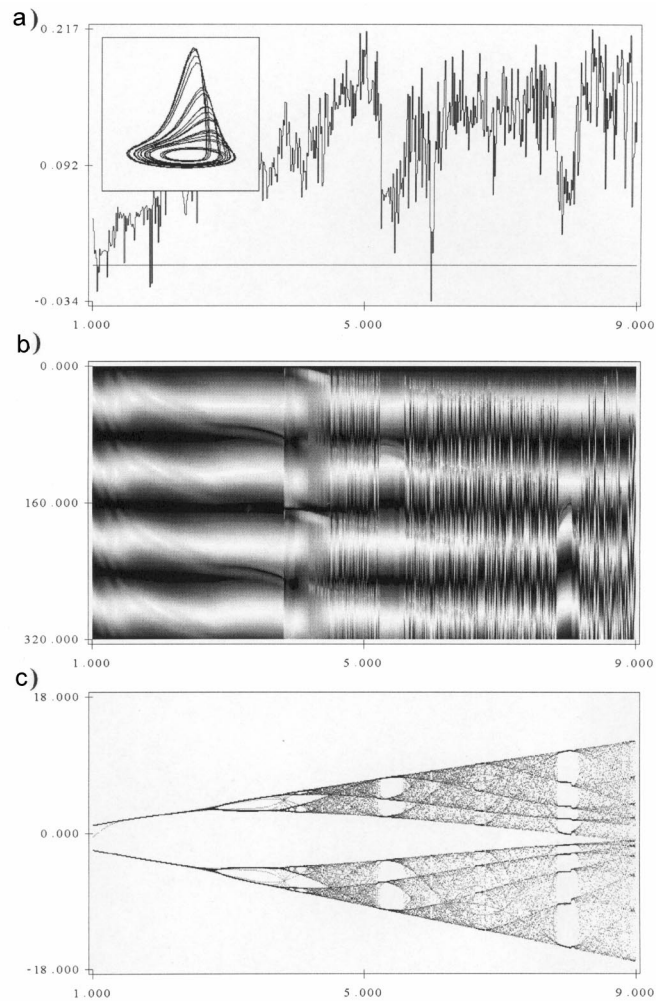


Рис. 1. Зависимости характеристик аттрактора Ресслера от значений управляющего параметра μ : *a* — максимальный показатель Ляпунова, на вставке — общий вид аттрактора; *b* — эволюция трассировочной кривой. Темным участкам рисунка отвечает $\cos \alpha_R = +1$, светлым — $\cos \alpha_R = -1$. По оси ординат отложена длина трассировочного участка фазовой траектории R ; *c* — бифуркационная диаграмма компоненты y .

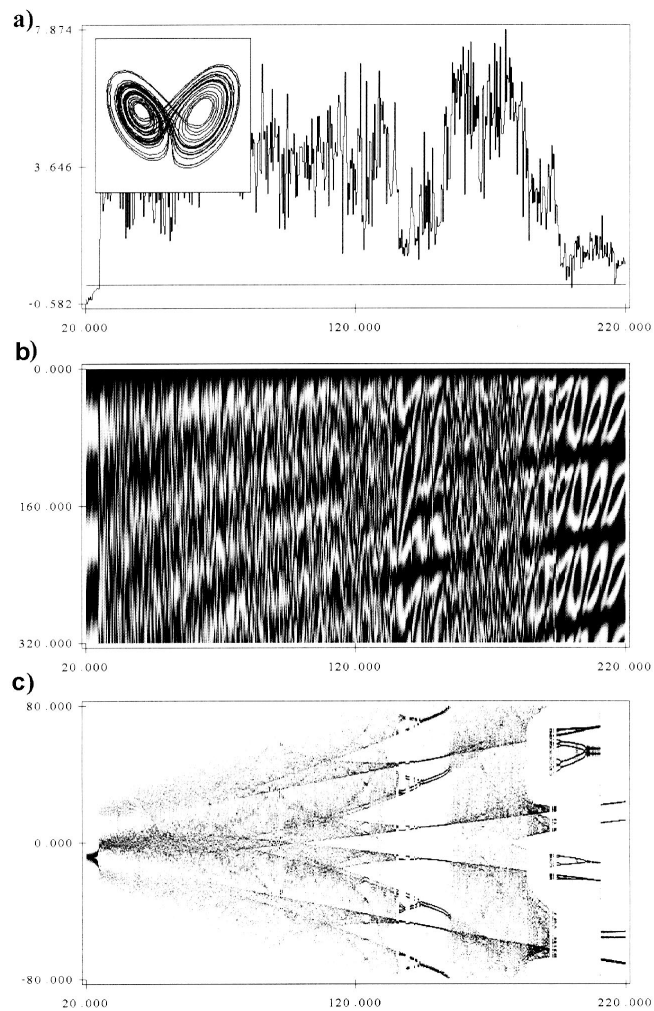


Рис. 2. Зависимости характеристик аттрактора Лоренца от значений управляющего параметра r : a — максимальный показатель Ляпунова, на вставке — общий вид аттрактора; b — эволюция трассировочной кривой. Темным участкам рисунка отвечает $\cos \alpha_R = +1$, светлым — $\cos \alpha_R = -1$. По оси ординат отложена длина трассировочного участка фазовой траектории R ; c — бифуркационная диаграмма компоненты y .

К недостаткам показателей Ляпунова, как и хаусдорфовой размерности, которые рассчитываются для фазового портрета в целом (т.е. с учетом всех фазовых переменных), следует отнести малую информативность, поскольку по их знаку либо величине судят только о степени устойчивости системы. Бифуркационная диаграмма хотя и обладает большей наглядностью, однако также не лишена недостатков — обычно она рассчитывается для итерационных процессов [4] или, как в нашем случае, для одной фазовой переменной и дает возможность определять только несколько первых (реально — трех, максимум — четырех) значений управляющего параметра, при которых происходят бифуркации удвоения периода колебаний.

Предлагаемый метод трассировки приводит к результатам, которые имеют существенные преимущества в сравнении с ляпуновскими показателями (подобно как и хаусдорфовой размерностью) и бифуркационной диаграммой. Действительно, из рис. 1, *b* видно, что изображение эволюции трассировочной кривой является более наглядным не только по сравнению с функциональной зависимостью максимального ляпуновского показателя, но и с бифуркационной диаграммой. Это изображение также дает возможность определять с достаточной точностью большее (по крайней мере — не меньшее) по сравнению с бифуркационной диаграммой число значений управляющего параметра, при которых происходят бифуркации удвоения периода колебаний, и, что самое важное, оно явно показывает, что даже в хаотическом состоянии система содержит информацию о своей топологической сущности. О последнем, в частности, свидетельствует то, что в рассматриваемом случае аттрактора Ресслера при хаосе происходят случайные изменения (сдвиги и растяжения) присущей системе топологической формы аттрактора, которая на рис. 1, *b* представлена чередующимися с определенным периодом темными и светлыми полосами. Иными словами, предложенный метод трассировки дает возможность наглядно продемонстрировать так называемый детерминированный хаос [5].

Все изложенное выше, за одним исключением, можно отнести и к аттрактору Лоренца (рис. 2). Прежде чем указать исключение, отметим, что этот аттрактор является существенно хаотизированным по сравнению с аттрактором Ресслера [1,4]. Это наглядно видно из данных, представленных на рис. 2: в исследуемом интервале значений управляющего параметра величины максимального ляпуновского показателя более чем на порядок превосходят соответствующие величины

для аттрактора Ресслера, бифуркационная диаграмма преимущественно включает состояния хаоса, разделенные между собой небольшим интервалом устойчивого состояния. Поэтому сценарий перехода от порядка к хаосу в аттракторе Лоренца можно, скорее всего, классифицировать как перемежаемость состояний [2]. При этом видно, что интервалы упорядоченного движения на изображении трассировочных кривых (рис. 2, *c*) и бифуркационной диаграмме (рис. 2, *b*) совпадают между собой. Смысл исключения заключается в том, что в хаотизированном состоянии при значениях управляющего параметра в пределах $20 \leq r \leq 165$ для аттрактора Лоренца происходит конкуренция между двумя равносильными притягивающими центрами [1,4], и поэтому даже незначительное изменение величины управляющего параметра может изменить порядок обхода траектории фазовой точкой. На рис. 2, *b* этому соответствует тот факт, что существующие при $r > 180$ устойчивые структуры при уменьшении величины управляющего параметра распадаются на два типа чередующихся темных и светлых полос, конкурирующих между собой по влиянию (ширине). Таким образом, предложенный метод трассировки также позволяет наглядно продемонстрировать динамику образования устойчивых структур из конкурирующих между собой возможностей.

Следует отметить, что вычисления с помощью разработанных нами алгоритмов как для трассировочных кривых, так и для бифуркационной диаграммы происходят почти в полтора раза быстрее, чем вычисление хаусдорфовой размерности, и в два и более раз быстрее (в зависимости от количества рассматриваемых шагов эволюции фазового вектора), чем вычисление максимальных ляпуновских показателей.

Таким образом, в работе предложен новый эффективный метод исследования эволюции состояний неравновесных динамических систем, преимуществами которого по сравнению с показателями Ляпунова, размерностью Хаусдорфа и бифуркационными диаграммами являются информативность, наглядность, простота алгоритмической реализации и высокая скорость вычислений.

Работа выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант № 2.4/745, 1997г.).

Список литературы

- [1] *Хакен Г.* Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 423 с.
- [2] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
- [3] *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
- [4] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [5] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [6] *Горлей П.Н., Горлей П.П., Томчук П.М.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 20. С. 82–86.
- [7] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.