

01;03

## Неустойчивость и распад тонкого слоя вязкой магнитной жидкости в наклонном магнитном поле

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 29 мая 1998 г.)

В рамках системы уравнений феррогидродинамики и магнитостатики выведено линейное уравнение в частных производных, описывающее эволюцию начального возмущения плоской свободной поверхности тонкого слоя вязкой магнитной жидкости, покрывающего горизонтальную пластину, при наличии однородного магнитного поля. Исследовано влияние эффекта намагничивания пластины на устойчивость плоской свободной поверхности. Получена оценка нижней границы величины тангенциальной составляющей вектора намагниченности жидкости, вызывающей радикальную перестройку финальной картины распада сплошного слоя.

### Введение

Из теоретических исследований и экспериментов известно [1–4], что достаточно сильное однородное магнитное поле, перпендикулярное плоской свободной поверхности покоящейся магнитной жидкости (либо плоской поверхности раздела несмешивающихся жидкостей с различными магнитными проницаемостями), вызывает неустойчивость. В результате происходит переход от гидростатического состояния жидкости с плоской свободной поверхностью к другому гидростатическому состоянию. При этом в случае толстых слоев образуется периодическая поверхностная структура, состоящая из гексагональных ячеек, а тонкий слой на твердой подложке распадается на отдельные капли [3,4].

Теоретический анализ [4] поведения устойчиво стратифицированной (в отсутствие поля) конфигурации, состоящей из двух расположенных один поверх другого слоев магнитных жидкостей, находящихся в наклонном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , нормальная компонента которого превышает критическое значение, показывает, что тангенциальная компонента  $\mathbf{H}_\tau$  стабилизирует некоторый диапазон гармонических возмущений, распространяющихся вдоль  $\mathbf{H}_\tau$ . При этом на возмущения, распространяющиеся поперек  $\mathbf{H}_\tau$ , тангенциальная компонента поля не оказывает влияния. На этом основании в [4] сделан вывод о формировании гофрообразной поверхности раздела с параллельными  $\mathbf{H}_\tau$  осями гофров, однако оценка величины  $\mathbf{H}_\tau$ , необходимой для фактической реализации такого сценария развития неустойчивости плоской поверхности раздела, в [4] не получена.

В имеющихся работах исследование неустойчивости плоской свободной поверхности магнитной жидкости, вызываемой ортогональным магнитным полем, проводилось в рамках теории плоскопараллельных потенциальных движений невязкой жидкости. В этой связи следует отметить, что в близкой гидродинамической задаче о затухании гравитационных [5] (равно как и капиллярно-гравитационных [6]) волн малой амплитуды на свобод-

ной поверхности немагнитной ньютоновской жидкости бесконечной глубины (при  $kd \rightarrow \infty$ , где  $k$  — волновое число,  $d$  — глубина) модель идеальной жидкости применима лишь в случае  $\lambda^2|\omega| \gg \nu$ , где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны,  $\omega$  — частота,  $\nu$  — кинематическая вязкость рассматриваемой жидкости. Если же  $d/\lambda \sim 1$ ,  $|\omega|\tau_d \sim 1$ , где  $\tau_d = d^2/\nu$  — характерное время диффузии завихренности поперек жидкого слоя, то существенно проявляется затухание волн, обусловленное вязкостью жидкости. При этом, естественно, движение является вихревым.

В общем случае частота  $\omega(k)$  является комплекснозначной функцией действительного волнового числа, однако для любого  $\nu > 0$  существует предельная толщина слоя  $d_m$ , такая что при  $d \leq d_m$  частота становится чисто мнимой, так что при  $d \leq d_m$  синусоидальные прогрессивные волны не существуют [6]. При этом с ростом  $\nu$  значение  $d_m$  увеличивается.

В отличие от имеющихся работ в данной работе исследованы вызываемые наклонным магнитным полем неустойчивость и распад тонкого ( $d/\lambda \ll 1$ ) слоя ньютоновской магнитной жидкости в случае  $\tau_d/\tau_i \ll 1$ , где  $\tau_i$  — характерное время развития неустойчивости.

### Исходные уравнения и постановка задачи

Рассматривается находящийся в однородном наклонном магнитном поле слой покоящейся магнитной жидкости на горизонтальной немагнитной пластине, имеющий плоскую свободную поверхность (рис. 1). Предполагаем, что жидкость однородна по составу и ее магнитная проницаемость  $\mu$  зависит лишь от модуля поля.

Введем декартову систему координат  $x_1, x_2, x_3$ , ось  $x_1$  которая направлена вдоль горизонтальной составляющей поля, ось  $x_3$  — вертикально вверх, а плоскость  $x_3 = 0$  совпадает со свободной поверхностью жидкости. Пусть  $f_0$  — потенциал поля в области с плоскими границами, занятой магнитной жидкостью, а  $f_{01}, f_{02}$  — потенциалы

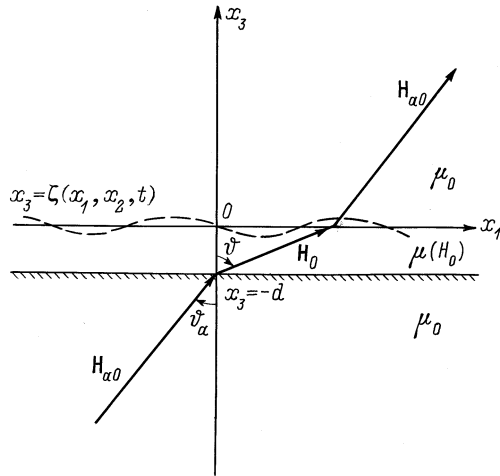


Рис. 1. Геометрия задачи.

полей в областях, лежащих соответственно выше и ниже этого слоя. Толщину слоя обозначим  $d$ . В рассматриваемой системе координат имеем

$$\begin{aligned} f_0 &= H_0(x_1 \sin \vartheta + x_3 \cos \vartheta), \\ f_{01} &= H_{a0}(x_1 \sin \vartheta_a + x_3 \cos \vartheta_a), \\ f_{02} &= f_{01} - d(H_0 \cos \vartheta - H_{a0} \cos \vartheta_a), \end{aligned} \quad (1)$$

где модули полей  $H_0, H_{a0}$  соответственно внутри слоя магнитной жидкости и вне его и показанные на рис. 1 углы  $\vartheta, \vartheta_a$  наклонов  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_{a0}$  к оси  $x_3$  связаны известными из магнитостатики условиями на поверхности раздела сред с различными магнитными свойствами

$$H_{a0} \sin \vartheta_a = H_0 \sin \vartheta, \quad \mu_0 H_{a0} \cos \vartheta_a = \mu(H_0) H_0 \cos \vartheta, \quad (2)$$

а  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/м — магнитная постоянная.

Далее  $H_{a0}, \vartheta_a$  в (1) считаются заданными, а равенства (2) служат для вычисления  $H_0, \vartheta$ .

Индукция внутри плоского слоя  $\mathbf{B}_0 = \mu(H_0)\mathbf{H}_0$  и намагниченность жидкости  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0 - \mathbf{H}_0$  однородны, а давление линейно растет с удалением от свободной поверхности  $P_0 = p_a - \rho g x_3 - \mu_0 M_{03}^2/2$ , где  $p_a$  — давление воздуха вблизи свободной поверхности,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести. Последнее слагаемое в выражении для  $P_0$  представляет магнитный скачок давления [4].

Сформулируем линейную задачу об устойчивости гидростатического состояния  $P_0, \mathbf{M}_0$  слоя жидкости с плоской свободной поверхностью. Пусть  $x_3 = \zeta(x_1, x_2, t)$  представляет уравнение свободной поверхности при наличии волн малой амплитуды; через  $t$  обозначено время. Вводя потенциалы малых возмущений магнитных полей в жидкости  $f(x_1, x_2, x_3, t)$  и вне ее  $f_1(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $j = 1, 2$ , магнитные поля, а также индукцию и намагниченность жидкости, возмущенные за счет вызываемой волнами деформации свободной поверхности, запишем

соответственно в виде

$$\mathbf{H} = \nabla(f_0 + f), \quad \mathbf{H}_j = \nabla(f_{0j} + f_j), \quad j = 1, 2,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}.$$

Аналогичным образом представим распределение давления  $P$  в жидкости при наличии волн  $P = P_0 + p(x_1, x_2, x_3, t)$ . С точностью до малых первого порядка имеем

$$H - H_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cos \vartheta,$$

$$M - M_0 = m_1 \sin \vartheta + m_3 \cos \vartheta,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{a}_1 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} (\chi_0 \cos^2 \vartheta + \chi_t^0 \sin^2 \vartheta) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3} (\chi_t^0 - \chi_0) \sin 2\vartheta \right] + \mathbf{a}_2 \chi_0 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ &+ \mathbf{a}_3 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} (\chi_t^0 - \chi_0) \sin 2\vartheta \right. \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial x_3} (\chi_0 \sin^2 \vartheta + \chi_t^0 \cos^2 \vartheta) \right], \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \mu_0(\mathbf{m} + \nabla f), \quad \chi_0 = \frac{M_0}{H_0}, \quad \chi_t^0 = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=H_0},$$

$$\mu_r^0 = 1 + \chi_0, \quad \mu_{rt}^0 = 1 + \chi_t^0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  — единичные векторы вдоль соответствующих осей координат.

Ограничимся исследованием неустойчивости тонкого слоя, когда  $\varepsilon = d/\lambda \ll 1$ . В этом случае, пренебрегая в уравнении  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ , записанном относительно  $f$ , членами порядков  $\varepsilon$  (возникающими за счет нелинейности закона намагничивания) и выше, имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0, \quad \Delta f_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (4)$$

С учетом первого выражения (3) линеаризованное уравнение движения ньютоновской магнитной жидкости принимает вид

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mu_0 M_0 \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cos \vartheta \right), \quad (5)$$

где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  — скорость,  $\eta$  — динамическая вязкость.

Отметим, что при волновом движении жидкости, образующей тонкий слой, для линеаризации уравнения движения необходимо  $\zeta_*/d \ll 1$ , где  $\zeta_*$  — характерная амплитуда волн. Далее это условие считается выполненным.

В рассматриваемом случае уравнение (5) упрощается: с точностью, принятой при записи первого уравнения (4), в уравнении движения (5) допустима замена  $\Delta \mathbf{v}$  на  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial x_3^2$ . Далее, оценивая по порядку величины отношение инерционного члена в уравнении (5) к вязкому, имеем

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} \left( \eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3^2} \right)^{-1} \sim \frac{\tau_d}{\tau_i}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\tau_d = \frac{d^2}{\nu}; \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (6)$$

В случае возникновения неустойчивости  $\tau_i$  является характерным временем развития наиболее быстро растущей гармоники (см. соответствующую формулу (21)). Если же при заданном  $\mathbf{H}_{a0}$  плоская свободная поверхность магнитной жидкости устойчива, то  $\tau_i$  представляет характерное время затухания возмущений.

В дальнейшем рассматривается случай  $\tau_d / \tau_i \ll 1$ . Ввиду того что характерное время  $\tau_d$  диффузии завихренности поперек слоя (6) падает с увеличением  $\nu$ , естественно ожидать, что условие  $\tau_d / \tau_i \ll 1$  выполняется для не слишком толстых слоев достаточно вязких жидкостей. При этом движение магнитной жидкости описывается системой, состоящей из уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_3^2} = \nabla \left[ p - \mu_0 M_0 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cos \vartheta \right) \right] \quad (7)$$

и уравнений (4). Условие применимости уравнения движения в форме (7) выписано ниже — формула (22).

Кинематическое и динамические условия, а также условия непрерывности касательной составляющей магнитного поля и нормальной составляющей индукции на свободной поверхности в рассматриваемом приближении записываются следующим образом:

$$x_3 = 0: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_3, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0,$$

$$p = \rho g \zeta + 2\eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) + \mu_0 M_0 \cos \vartheta \left[ M_0 \sin \vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - \gamma \frac{\partial f}{\partial x_3} \right],$$

$$f - f_1 = M_0 \zeta \cos \vartheta,$$

$$(1 + \gamma) \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = M_0 \sin \vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \quad (8)$$

где  $\gamma = \chi_0 \sin^2 \vartheta + \chi_t^0 \cos^2 \vartheta$ .

Краевые условия на поверхности немагнитной пластины имеют вид

$$x_3 = -d: \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0,$$

$$f = f_2, \quad (1 + \gamma) \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}. \quad (9)$$

Возмущения магнитного поля при удалении точки наблюдения от свободной поверхности жидкости, естественно, исчезают

$$\nabla f_1 \rightarrow 0 \text{ при } x_3 \rightarrow \infty, \quad \nabla f_2 \rightarrow 0 \text{ при } x_3 \rightarrow -\infty. \quad (10)$$

Постановка задачи о неустойчивости гидростатического состояния слоя жидкости с плоской свободной поверхностью (4), (7)–(10) включает также задание начального условия для искомой функции  $\zeta(x_1, x_2, t)$ .

## Эволюция начального возмущения формы свободной поверхности и вычисление поля скоростей и возмущения давления

Для упрощения дальнейших выкладок сведем систему гидродинамических уравнений (7) с соответствующими краевыми условиями (8), (9) к одному уравнению в частных производных, связывающему функции  $\zeta(x_1, x_2, t)$  и  $f(x_1, x_2, x_3, t)$ . С этой целью в качестве первого шага проинтегрируем проекцию на ось  $x_3$  упрощенного уравнения движения (7). С учетом первого уравнения (4), из которого следует, что  $\partial f / \partial x_3$  не зависит от  $x_3$ , получаем

$$p = \eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \mu_0 M_0 \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial x_1} + C(x_1, x_2, t).$$

Неизвестная функция  $C(x_1, x_2, t)$  определяется из краевого условия (8) для возмущения давления на свободной поверхности

$$C(x_1, x_2, t) = \Sigma(x_1, x_2, t) + \eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0},$$

$$\Sigma(x_1, x_2, t) = \rho g \zeta$$

$$- \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_0^2 \sin 2\vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - \mu_0 M_0 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_3=0} \sin \vartheta + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_3} \cos \vartheta \right). \quad (11)$$

В результате имеем

$$p = \Sigma + \mu_0 M_0 \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} \right). \quad (12)$$

После подстановки решения (12) в проекции уравнения движения (7) на оси  $x_1, x_2$  и отбрасывания величин порядка  $\varepsilon^2$  получаем

$$\eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \quad \sigma = \Sigma - \mu_0 M_0 \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial x_3}. \quad (13)$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие условиям отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности (8) и условиям прилипания жидких частиц на

поверхности стенки (9), имеют простой вид

$$v_j = \frac{x_3^2 - d^2}{2\eta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

При записи (14) опущены величины порядка  $\varepsilon^2$ . Учитывая (14), из уравнения неразрывности (7) находим распределение вертикальной скорости, удовлетворяющее на стенке условию непротекания (9),

$$v_3 = \frac{1}{6\eta} (2d^3 + 3d^2x_3 - x_3^3) \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right). \quad (15)$$

Принимая во внимание это выражение, легко видеть, что последнее слагаемое в правой части (12) следует опустить, поскольку оно имеет порядок  $\varepsilon^2$  по сравнению с первым слагаемым.

Подставляя решение (15) в кинематическое условие на свободной поверхности — первое выражение (8), с учетом (11), (13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{d^3}{3\eta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \\ \times \left\{ \rho g \zeta - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_0^2 \sin 2\vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right. \\ \left. - \mu_0 M_0 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_3=0} \sin \vartheta + (1 + \gamma) \frac{\partial f}{\partial x_3} \cos \vartheta \right] \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким образом, временная эволюция заданного в начальный момент времени малого возмущения формы первоначально плоской свободной поверхности жидкости определяется системой уравнений (4), (16) совместно с условиями сопряжения магнитных полей на поверхностях раздела сред с различными магнитными свойствами (8), (9) и условиями в бесконечности (10). После решения этой задачи возмущение давления в слое жидкости и поле скоростей вычисляются по формулам (12), (14), (15).

## Анализ неустойчивости

Возникшее в начальный момент времени возмущение формы свободной поверхности  $\zeta(x_1, x_2, 0)$ , достаточно быстро убывающее при  $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$ , можно представить в виде интеграла Фурье. В линейной постановке дальнейшая временная эволюция каждой фурье-компоненты происходит независимо от других фурье-компонент, так что решение сформулированной выше задачи можно построить в виде суперпозиции частных решений вида

$$\begin{aligned} (\zeta, f, f_j) = \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)] [a, F(x_3), F_j(x_3)]; \\ i = \sqrt{-1}; \quad j = 1, 2. \quad (17) \end{aligned}$$

Комплексные амплитудные функции  $a, F, F_j$  помимо  $x_3$  зависят также от действительных параметров  $k_1, k_2$  — компонент волнового вектора  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$ .

После подстановки выражений (17) в упрощенную систему уравнений магнитостатики (4) с соответствующими краевыми условиями (8), (9) получаем

$$\begin{aligned} F'' = 0, \quad F_j'' - k^2 F_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ x_3 = 0: \quad F - F_1 = M_0 a \cos \vartheta, \\ (1 + \gamma) F' - F_1' = ik_1 a M_0 \sin \vartheta, \\ x_3 = -d: \quad F = F_2, \quad (1 + \gamma) F' = F_2'. \end{aligned}$$

В рассматриваемом приближении решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} F = \frac{a}{2} M_0 (ik_1 \sin \vartheta + k \cos \vartheta) \left( \frac{x_3}{1 + \gamma} + \frac{1}{k} \right), \\ F_1 = \frac{a}{2k} M_0 (ik_1 \sin \vartheta - k \cos \vartheta) \exp(-kx_3), \\ F_2 = \frac{a}{2k} M_0 (ik_1 \sin \vartheta + k \cos \vartheta) \exp(kx_3). \quad (18) \end{aligned}$$

Подставив найденное решение (17), (18) в уравнение (16), получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \omega = is, \\ s = \frac{d^3}{3\eta} \left\{ -\rho g (k_1^2 + k_2^2) + \frac{\mu_0}{2} [M_{03}^2 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2} \right. \\ \left. - M_{01}^2 k_1^2 (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}] - \alpha (k_1^2 + k_2^2)^2 \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $M_{01} = M_0 \sin \vartheta$ ,  $M_{03} = M_0 \cos \vartheta$  — компоненты вектора невозмущенной намагниченности жидкого слоя  $\mathbf{M}_0$ .

С учетом (19) и начального условия  $\zeta(x_1, x_2, 0) = \zeta_0(x_1, x_2)$  возмущение формы свободной поверхности жидкости при  $t > 0$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_1, k_2) \exp[i(k_1 x_1 \\ + k_2 x_2) + s(k_1, k_2)t] dk_1 dk_2, \\ A(k_1, k_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(x_1, x_2) \\ \times \exp[-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] dx_1 dx_2. \quad (20) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $s(k_1, k_2) < 0$  начальное возмущение с течением времени затухает, а при  $s(k_1, k_2 > 0)$  растет, и этот рост, как видно из (19), вызывается нормальной компонентой  $\mathbf{M}_{0n} = M_{03} \mathbf{a}_3$  намагниченности жидкого слоя.

Из выражения (19) следует также, что в случае, когда угол  $\varphi$  между касательной составляющей  $\mathbf{M}_{0\tau} = M_{01} \mathbf{a}_1$  намагниченности и волновым вектором  $\mathbf{k}$  отличен от  $\pi/2$  и  $3\pi/2$ ,  $\mathbf{M}_{0\tau}$  ослабляет дестабилизирующее воздействие

$M_{0n}$  на гармонику с рассматриваемым  $\mathbf{k}$  при фиксированном  $\mathbf{H}_{0\tau}$  и квазистатическом увеличении вертикальной составляющей невозмущенного поля  $\mathbf{H}_{0n}$  от начального нулевого значения. Ввиду этого при  $\mathbf{H}_{0\tau} \neq 0$  наиболее благоприятные условия для возникновения неустойчивости имеют те гармоники, для которых  $\varphi = \pi/2$ ,  $\varphi = 3\pi/2$ . Таким образом, при увеличении  $\mathbf{H}_{0n}$  в первую очередь начинают нарастать гармоники с  $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_{0\tau}$ .

Анализ дисперсионного соотношения (19) показывает, что неустойчивость наступает при превышении  $M_{03}$  критического значения  $M_c = 2\sqrt[4]{\rho g \alpha / \mu_0^2}$ . Для сравнения приведем [3,4] критическое значение намагниченности находящейся в вертикальном поле магнитной жидкости, имеющей плоскую свободную поверхность и занимающей все нижнее полупространство  $M_{c\infty} = \sqrt{2/\mu_0} \sqrt[4]{\rho g \alpha} \sqrt{1 + (\mu_r^0 \mu_{rt}^0)^{-1/2}}$ , где  $\mu_r^0$ ,  $\mu_{rt}^0$  определяются выражениями (3). Из выписанных формул следует  $M_c/M_{c\infty} = \sqrt{2/[1 + (\mu_r^0 \mu_{rt}^0)^{-1/2}]} > 1$ , т.е. тонкий слой вязкой магнитной жидкости более устойчив по сравнению с глубоким слоем той же самой жидкости.

В случае  $M_{03}/M_c > 1$  из дисперсионного соотношения (19) нетрудно найти характерное время развития неустойчивости

$$\tau_i = \left[ \max_{\substack{-\infty < k_1 < \infty \\ -\infty < k_2 < \infty}} \text{Im} \omega(k_1, k_2) \right]^{-1}$$

и волновые векторы  $\mathbf{k}_m$  наиболее быстро растущих гармоник

$$\mathbf{k}_m = \pm k_m \mathbf{a}_2, \quad k_m = \sqrt{\frac{\rho g}{\alpha}} K(\Pi_n), \quad \tau_i = s^{-1}(0, \pm k_m),$$

$$s(0, \pm k_m) = \frac{\rho^2 g^2 d^3}{\alpha \eta} S(\Pi_n), \quad \Pi_n = \frac{M_{03}}{M_c},$$

$$K(\Pi_n) = \frac{3}{4} \Pi_n^2 + \sqrt{\frac{9}{16} \Pi_n^4 - \frac{1}{2}},$$

$$S(\Pi_n) = \frac{1}{6} K^2(\Pi_n) [\Pi_n^2 K(\Pi_n) - 1]. \quad (21)$$

Графики функций  $K(\Pi_n)$ ,  $S(\Pi_n)$  представлены на рис. 2.

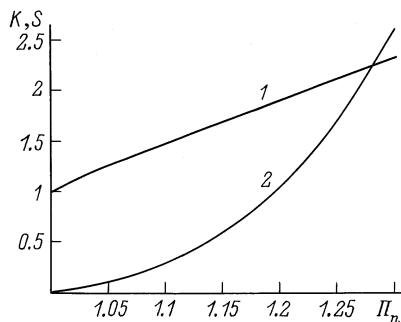


Рис. 2. Графики функций  $K(\Pi_n)$  (1) и  $S(\Pi_n)$  (2).

С учетом (21) условие применимости упрощенного уравнения движения (7) записывается следующим образом:

$$TS(\Pi_n) \ll 1, \quad T = \frac{\rho^3 g^2 d^5}{\alpha \eta^2}. \quad (22)$$

В качестве примера коммерческих магнитных жидкостей рассмотрим перфторуглеродную жидкость, для которой имеем [3]:  $\rho = 2050 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta = 2.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ,  $\alpha = 0.018 \text{ N/m}$ . Исходя из этих величин находим  $M_c = 7.78 \text{ kA/m}$ , что меньше табличного значения намагниченности насыщения  $M_s = 7.96 \text{ kA/m}$  жидкости этого типа. Таким образом, в рассматриваемом случае  $\Pi_n \leq 1.023$ ,  $S(1.023) = 0.034$ . Ввиду малости этой величины толщина слоя, при которой выполняется ограничение (22), по порядку величины находится из условия  $T \sim 1$ . В результате получаем  $d \sim 1 \text{ mm}$ . При  $d = 1 \text{ mm}$  имеем  $\tau_d = 0.007 \text{ s}$  и в случае  $M_{03} = M_s$  из формул (21) получаем  $k_m = 12 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau_i = 2.7 \text{ s}$ .

## Распад слоя в наклонном магнитном поле

Обращаясь к случаю  $M_{03} > M_c$ , рассмотрим развитие начального малого возмущения формы свободной поверхности магнитной жидкости в наклонном магнитном поле. Переходя в дисперсионном соотношении (19) к безразмерным переменным

$$k_* = k \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}, \quad \omega_* = \frac{3\alpha\eta}{\rho^2 g^2 d^3} \omega,$$

$$s_* = \frac{3\alpha\eta}{\rho^2 g^2 d^3} s, \quad \Pi_\tau = \frac{M_{01}}{M_c},$$

получаем

$$\omega_* = i s_*, \quad s_* = -(k_{1*}^2 + k_{2*}^2) + 2\sqrt{k_{1*}^2 + k_{2*}^2} \times [\Pi_n^2(k_{1*}^2 + k_{2*}^2) - \Pi_\tau^2 k_{1*}^2] - (k_{1*}^2 + k_{2*}^2)^2. \quad (23)$$

В частных случаях  $\mathbf{k}_* = k_{2+} \mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{k}_* = k_{1*} \mathbf{a}_1$  семейства кривых  $s_*(0, k_{2*})$  и  $s_*(k_{1*}, 0)$  при различных  $\Pi_n$ ,  $\Pi_\tau$  показаны на рис. 3, 4. Каждый из представленных графиков продолжается в левую полуплоскость симметрично относительно вертикальной оси. Отметим, что кривая 4 на рис. 3 и кривая 1 на рис. 4 одинаковы. Одинаковы также кривая 1 на рис. 3 и кривая 3 на рис. 4, соответствующая  $\Pi_\tau = \sqrt{\Pi_n^2 - 1}$ ,  $\Pi_n = 1.02$ .

В случае вертикального магнитного поля (при  $\Pi_\tau = 0$ ) выражение (23) принимает вид  $s_* = \Omega(\sqrt{k_{1*}^2 + k_{2*}^2}, \Pi_n)$  и при фиксированном  $\Pi_n$  геометрически представляется поверхностью, образуемой при вращении вокруг вертикальной оси кривой, соответствующей на рис. 3 выбранному значению  $\Pi_n$ . При  $\Pi_n = \text{const}$  линии уровня функции  $\Omega$  являются, естественно, семейством concentрических окружностей с центром в начале координат в плоскости переменных

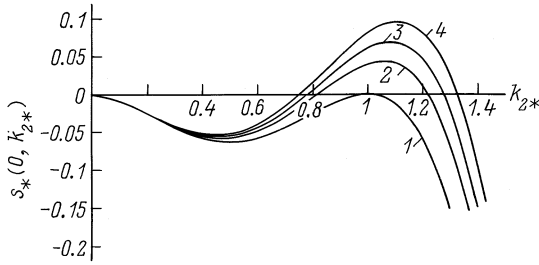


Рис. 3. Зависимость  $s_*(0, k_{2*})$ .  $\Pi_n$ : 1 — 1, 2 — 1.01, 3 — 1.015, 4 — 1.02.

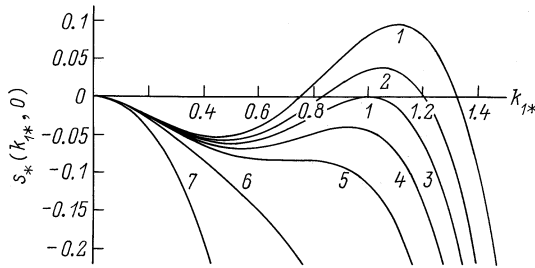


Рис. 4. Зависимость  $s_*(k_{1*}, 0)$  при фиксированном  $\Pi_n = 1.02$ .  $\Pi_\tau$ : 1 — 0, 2 — 0.15, 3 — 0.201, 4 — 0.25, 5 — 0.312, 6 — 0.5, 7 — 1.02.

$(k_{1*}, k_{2*})$ . В этом случае временная эволюция каждой из гармоник, фигурирующих в подынтегральном выражении (20), определяется лишь  $|\mathbf{k}|$ , т.е. не зависит от направления  $\mathbf{k}$ . Эксперимент показывает [4], что в результате распада достаточно тонкого слоя магнитной жидкости, помещенного в вертикальное магнитное поле, чтобы образовалась система гексагональных ячеек, состоящих из центральной конусообразной капли и шести окружающих ее подобных капель. Отметим, что аналогичная картина наблюдается при распаде тонкого слоя вязкой жидкости вследствие неустойчивости Рэлея–Тейлора [7].

На рис. 5 в качестве примера показана поверхность  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$  при  $\Pi_n = 1.02$ ,  $\Pi_\tau = \sqrt{\Pi_n^2 - 1} = 0.201$ , а на рис. 6 — линии уровня функции  $s_*(k_{1*}, k_{2*})$ , соответствующие случаю неустойчивости ( $s_* > 0$ ). Из рис. 5, 6 видно, что при  $\mathbf{H}_\tau \neq 0$  наряду с вершинами (точками  $C_{1,2} = [0, \pm K(\Pi_n), S(\Pi_n)]$ , соответствующими на рис. 3 максимумам кривой 4, продленной в левую полуплоскость) имеются также седловые точки  $D_{1,2} = [\pm K(\sqrt{\Pi_n^2 - \Pi_\tau^2}), 0, S(\sqrt{\Pi_n^2 - \Pi_\tau^2})]$ . При  $\Pi_\tau = \sqrt{\Pi_n^2 - 1}$ ,  $\Pi_n \geq 1$  седловые точки соответствуют на рис. 4 точкам  $(\pm 1, 0)$ , в которых кривая 3 касается оси абсцисс. При фиксированном  $\Pi_n$  с увеличением  $\Pi_\tau$  от нулевого значения седловые точки поверхности  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$ , соответствующие наиболее удаленным от начала координат критическим точкам кривых на рис. 4, переходят из верхнего в нижнее полупространство. При  $\Pi_\tau = \sqrt{\Pi_n^2 - 2\sqrt{2}/3}$  (кривая 5 на рис. 4) вследствие слияния двух кри-

тических точек, отличных от начала координат (из имеющихся при  $\Pi_\tau < \sqrt{\Pi_n^2 - 2\sqrt{2}/3}$  трех критических точек на каждой кривой рис. 4), седловые точки на поверхности  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$  перестают существовать.

Рис. 7, на котором при фиксированном  $\Pi_n = 1.02$  представлено семейство линий уровня  $s_*(k_{1*}, k_{2*}) = 0$ , иллюстрирует влияние тангенциальной составляющей намагниченности слоя на форму области неустойчивости в плоскости переменных  $(k_{1*}, k_{2*})$ . В случае строго вертикального ( $\Pi_\tau = 0$ ) магнитного поля, превышающего критическое значение, область неустойчивости  $\Pi_n^2 - \sqrt{\Pi_n^4 - 1} < k_{1*}^2 + k_{2*}^2 < \Pi_n^2 + \sqrt{\Pi_n^4 - 1}$  представляет кольцо, заключенное между концентрическими окружностями — кривыми 1. По мере роста  $\Pi_\tau$  область неустойчивости, оставаясь при  $0 \leq \Pi_\tau \leq \sqrt{\Pi_n^2 - 1}$  связной, деформируется таким образом, что при всех  $k_{1*} \neq 0$  расстояние между ее границами уменьшается. При  $\Pi_\tau = \sqrt{\Pi_n^2 - 1}$  внешняя и внутренняя границы исходного кольца сливаются в точках, являющихся проекциями седловых точек  $D_{1,2}$  на плоскость  $(k_{1*}, k_{2*})$ . В результате такого слияния область неустойчивости принимает вид двух полумесяцев, ограниченных кривыми 3. Именно этому случаю соответствует поверхность  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$ , построенная на рис. 5, а также кривая 3 на рис. 4. При дальнейшем увеличении  $\Pi_\tau$  область неустойчивости распадается на две компоненты связности, каждая из которых ограничена кривыми 4–7.

На рис. 8 представлена поверхность  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$  при  $\Pi_n = 1.02$ ,  $\Pi_\tau = \sqrt{\Pi_n^2 - 2\sqrt{2}/3} = 0.312$ . Этим же значениям параметров  $\Pi_n$  и  $\Pi_\tau$  соответствуют кривые 5 на рис. 4 и 7. Из рис. 8 и 7 видно, что при  $\Pi_n > 1$ ,  $\Pi_\tau \geq \sqrt{\Pi_n^2 - 2\sqrt{2}/3}$  поверхность  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$  имеет два отчетливо выраженных пика. Вследствие этого при достаточно больших  $t$  основной вклад в интегральном представлении формы свободной поверхности (20) создают гармоники с волновыми векторами, концы которых лежат в окрестностях точек, являющихся проекциями на плоскость  $(k_{1*}, k_{2*})$  вершин  $C_{1,2}$ , т.е. гармоники, направления волновых векторов которых составляют с направлением  $\mathbf{H}_\tau$  углы, близкие к  $\pi/2$  и  $3\pi/2$ . Это означает, что при  $\Pi_n > 1$ ,  $\Pi_\tau \gtrsim \sqrt{\Pi_n^2 - 2\sqrt{2}/3}$  на линейной стадии развития неустойчивости форма свободной поверхности жидкости изменяется в поперечном к  $\mathbf{H}_\tau$  направлении значительно быстрее, чем вдоль  $\mathbf{H}_\tau$ .

Таким образом, при  $M_{03} > M_c$ ,  $M_{01} \gtrsim \sqrt{M_{03}^2 - 2\sqrt{2}M_c^2/3}$  линейная теория распада тонкого слоя вязкой магнитной жидкости в наклонном магнитном поле предсказывает формирование системы вытянутых вдоль  $\mathbf{H}_\tau$  валов жидкости, расстояние между гребнями которых имеет порядок  $2\pi/k_m$ . В отличие от гофров на поверхности раздела глубоких слоев магнитных

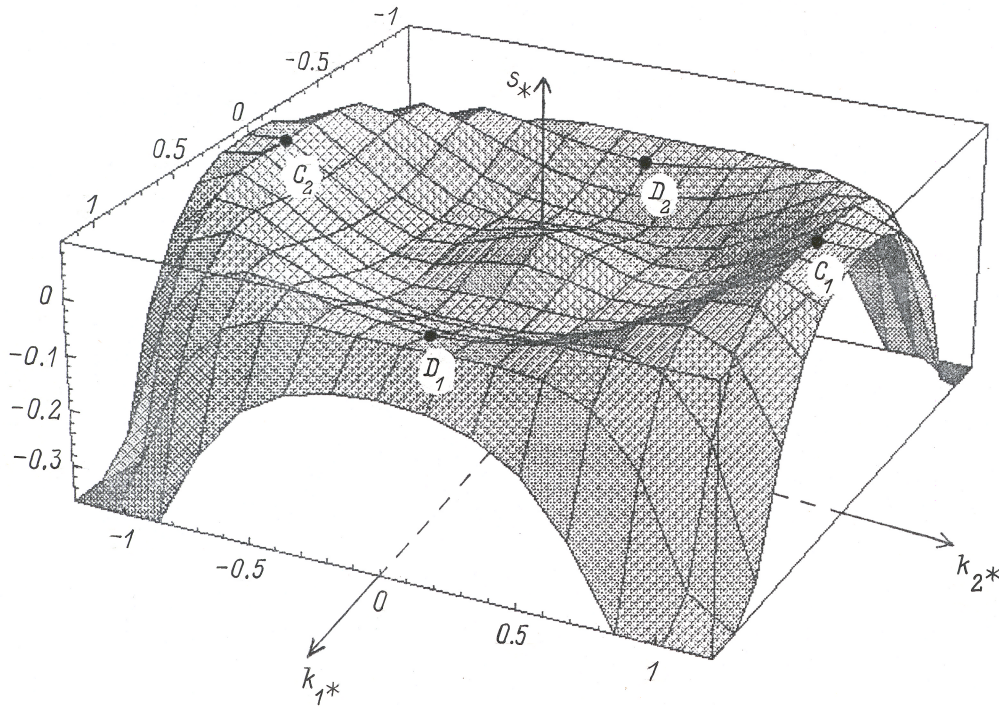


Рис. 5. Поверхность  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$  при  $\Pi_n = 1.02$ ,  $\Pi_r = 0.201$ .

жидкостей в наклонном поле [4] в рассматриваемом случае финальная картина распада слоя будет состоять, грубо говоря, из системы параллельных  $\mathbf{H}_r$  валов, в которых локализована магнитная жидкость, разделенных полосками, представляющими не покрытую жидкостью поверхность пластины.

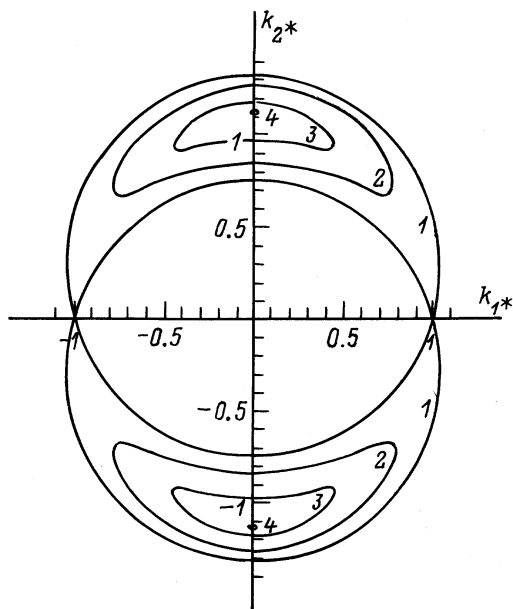


Рис. 6. Линии уровня функции  $s_*(k_{1*}, k_{2*})$  при  $\Pi_n = 1.02$ ,  $\Pi_r = 0.201$ .  $s_*$ : 1 — 0, 2 — 0.035, 3 — 0.07, 4 — 0.096.

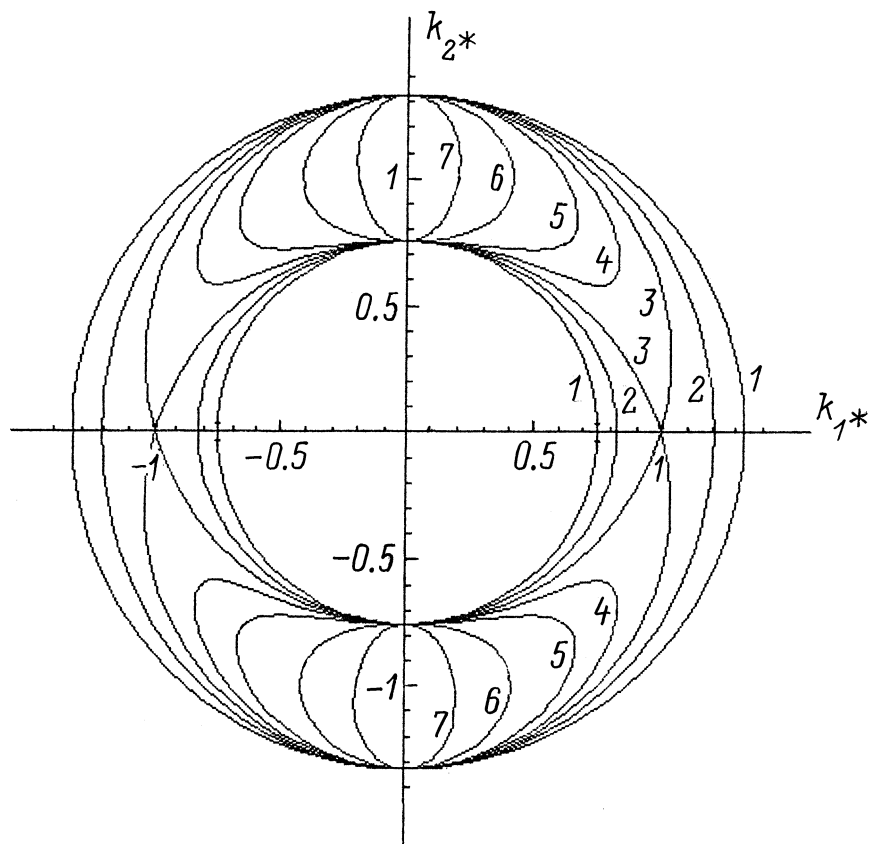
### Неустойчивость слоя феррожидкости, покрывающего намагничивающуюся пластину при наличии ортогонального поля

Исследуем влияние эффекта намагничивания толстой (по сравнению с характерной длиной волны неустойчивых гармоник) пластины на неустойчивость плоского тонкого слоя вязкой магнитной жидкости, находящегося в ортогональном магнитном поле. Считаем, что материал пластины имеет линейный закон намагничивания, в то время как жидкость намагничивается нелинейно. В рассматриваемой конфигурации при заданном вдали над жидкостью однородном поле  $\mathbf{H}_{01} = (0, 0, H_{01})$  поля в слое жидкости с плоской свободной поверхностью  $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$  и внутри пластины  $\mathbf{H}_{02} = (0, 0, H_{02})$  вычисляются из условия непрерывности нормальной составляющей индукции на поверхностях раздела сред с различными магнитными свойствами.

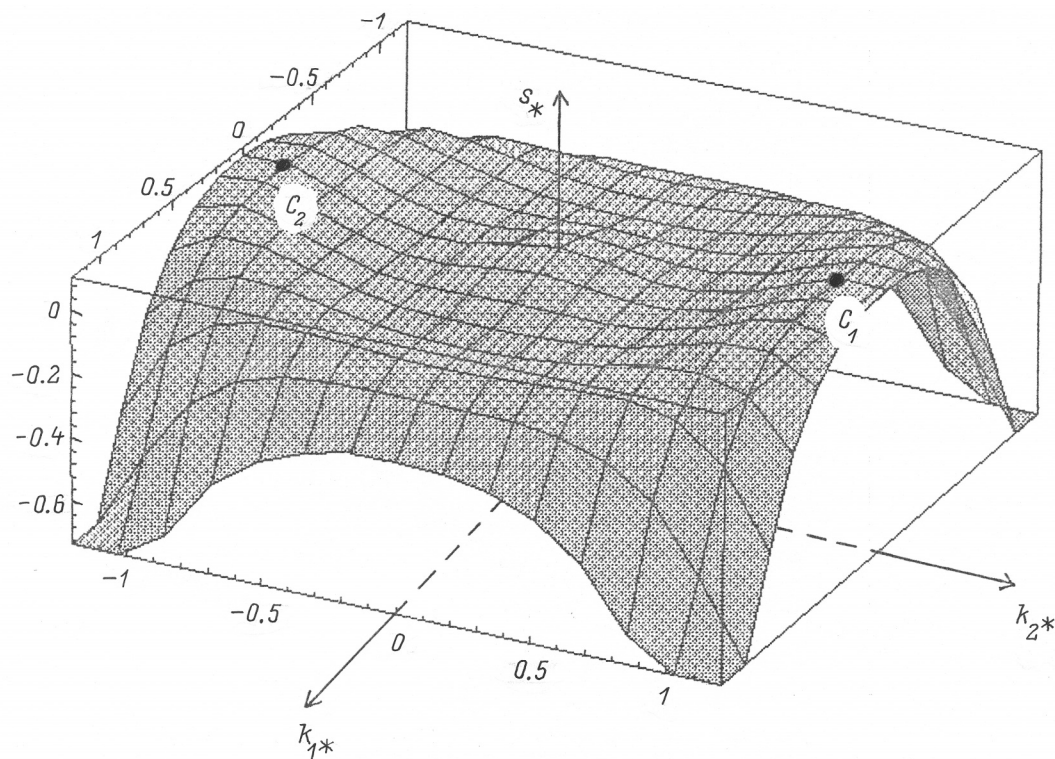
Потенциалы вызываемых деформацией свободной поверхности возмущений магнитных полей описываются системой уравнений (4), для которых краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} x_3 = 0: \quad f - f_1 &= M_0 \zeta, \quad \mu_{r1}^0 \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \\ x_3 = -d: \quad f &= f_2, \quad \mu_{r1}^0 \frac{\partial f}{\partial x_3} = \mu_{r2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\mu_{r2} = \mu_2/\mu_0$  — относительная магнитная проницаемость материала пластины.



**Рис. 7.** Семейство линий уровня  $s_*(k_{1*}, k_{2*}) = 0$  при фиксированном  $\Pi_n = 1.02$ .  $\Pi_\tau$ : 1 — 0, 2 — 0.15, 3 — 0.201, 4 — 0.25, 5 — 0.312, 6 — 0.5, 7 — 1.02.



**Рис. 8.** Поверхность  $s_* = s_*(k_{1*}, k_{2*})$  при  $\Pi_n = 1.02$ ,  $\Pi_\tau = 0.312$ .



Учитывая представления (17), нетрудно выписать исчезающее при  $x_3 \rightarrow \pm\infty$  решение задачи (4), (24). В рассматриваемом приближении имеем

$$\begin{aligned} f &= \frac{\zeta}{\mu_{r2} + 1} M_0 \left[ \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}^0} k(x_3 + d) + 1 \right], \\ f_1 &= -\frac{\mu_{r2}\zeta}{\mu_{r2} + 1} M_0 \exp(-kx_3), \\ f_2 &= \frac{\zeta}{\mu_{r2} + 1} M_0 \exp(kx_3). \end{aligned} \quad (25)$$

Из выражений (17), (18), (25) легко видеть, что при одинаковых вертикальных полях  $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$  и деформациях плоских свободных поверхностей одинаковых слоев возмущение поля в жидкости, покрывающей намагничивающуюся пластину ( $\mu_{r2} > 1$ ), оказывается больше, чем в случае ненамагничивающейся пластины (при  $\mu_{r2} = 1$ ). Отметим, что для сравниваемых плоских конфигураций при фиксированном  $\mathbf{H}_{01} = (0, 0, H_{01})$  поля  $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$  внутри жидких слоев одинаковы.

При подстановке первого из выражений (25) в уравнение (16), рассматриваемое при  $\vartheta = 0$ ,  $\gamma = \chi_r^0$ , с учетом (17) получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \omega = is, \quad s &= \frac{d^3}{3\eta} \left[ -\rho g(k_1^2 + k_2^2) \right. \\ &\left. + \frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\mu_{r2} + 1} M_0^2 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2} - \alpha(k_1^2 + k_2^2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя (26) для вычисления критического значения  $M_{cm}$  намагниченности жидкого слоя, получаем

$$M_{cm} = \sqrt[4]{\rho g \alpha} \sqrt{\frac{2(\mu_{r2} + 1)}{\mu_0 \mu_{r2}}}.$$

При этом волновое число наиболее быстро растущих гармоник и характерное время развития неустойчивости по-прежнему определяются формулами (21), в которые вместо  $\Pi_n$  надо подставить  $\Pi_m = M_0/M_{cm}$ .

Сравнивая относящиеся к случаям  $\mu_{r2} > 1$  и  $\mu_{r2} = 1$  значения  $M_{cm}$  и  $M_c$ , имеем  $M_{cm}/M_c = \sqrt{(\mu_{r2} + 1)/(2\mu_{r2})} < 1$ . Таким образом, в случае высокой магнитной проницаемости материала пластины ( $\mu_{r2} \gg 1$ ) порог возникновения неустойчивости и распада тонкого слоя вязкой магнитной жидкости снижается примерно на 30% по сравнению со случаем ненамагничивающейся пластины.

## Заключение

Проведены оценки порядков величин в линеаризованной системе уравнений и краевых условий феррогидродинамики и магнитостатики, описывающей трехмерные волновые движения в тонком слое нелинейно намагничивающейся вязкой жидкости, находящейся на горизонтальной немагнитной пластине при наличии фиксированного вдали от жидкого слоя однородного наклонного

магнитного поля. Выписано условие реализации режима движения жидкости, при котором существенную роль играет диффузия завихренности поперек слоя.

Применительно к такому случаю выведено уравнение в частных производных, связывающее возмущение формы первоначально плоской свободной поверхности магнитной жидкости с возмущением потенциала магнитного поля, вызываемого искривлением свободной поверхности, являющейся границей раздела сред с различными магнитными свойствами. На базе этого уравнения в рамках постановки задачи о неустойчивости плоского слоя, отличной от постановки в приближении плоскопараллельного потенциального движения невязкой магнитной жидкости [3,4], получено дисперсионное соотношение и проведен его анализ.

Вычислено критическое значение вертикальной составляющей намагниченности слоя и установлено, что тонкий слой вязкой магнитной жидкости более устойчив по сравнению с глубоким слоем той же самой жидкости. Найдено характерное время развития неустойчивости. Получена оценка величины тангенциальной компоненты намагниченности слоя в случае, когда за счет вызываемой ею анизотропии развития неустойчивых гармоник начального возмущения формы свободной поверхности распад сплошного слоя магнитной жидкости сопровождается формированием системы валов, параллельных тангенциальной компоненте приложенного поля. Дана оценка характерного расстояния между валами. Установлено, что эффект намагничивания толстой пластины из материала с высокой магнитной проницаемостью снижает примерно на 30% критическое значение вертикальной составляющей намагниченности жидкого слоя (по сравнению со случаем пластины из немагнитного материала).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01747).

## Список литературы

- [1] Cowley M.D., Rosensweig R.E. // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. Pt 4. P. 671–688.
- [2] Zelazo R.E., Melcher J.R. // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 39. Pt 1. P. 1–24.
- [3] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [4] Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 238 с.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [6] LeBlond P.H., Mainardi F. // Acta Mech. 1987. Vol. 68. N 3–4. P. 203–222.
- [7] Fermigier M., Limat L., Wesfreid J.E. et al. // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 236. P. 349–383.