

Изучение равновесия и движений среды во вращающейся звезде с магнитным полем на основе аппарата теории углового момента

© Ю.В. Вандакуров

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 14 января 1999 г.)

Рассматриваются сложные процессы, происходящие во вращающейся намагниченной среде, путем представления всех векторных величин в виде разложений по полной системе ортогональных векторных сферических гармоник. В итоге разделение переменных достигается без потери точности, несмотря на присутствие нелинейных сил (магнитной и кориолисовой). В качестве примера изучается распределение скорости вращения и циркуляционных движений в адиабатически стратифицированной медленно вращающейся звездной или атмосферной конвективной зоне. Применяется постулат неравновесной термодинамики о минимальном производстве энтропии для нахождения наиболее вероятной стационарной конфигурации. Одно решение удовлетворительно описывает наблюдаемое на Солнце дифференциальное вращение. Предварительные данные говорят в пользу того, что сверхбыстрое вращение типа наблюдаемого в атмосфере Венеры также может быть объяснено в рамках обсуждаемой теории.

Современные гелиосейсмологические данные [1,2] свидетельствуют, что вся солнечная конвективная зона вращается дифференциально с более быстрым вращением среды в экваториальной области. Обычно принимается, что такое нетвердотельное вращение формируется под действием турбулентной вязкой силы, генерируемой конвективными движениями среды. Грубые оценки показывают, что турбулентная вязкость должна быть приблизительно на 14 порядков больше молекулярной вязкости среды (аналогичные оценки, обусловленные условиями конвективного переноса тепла, приводят к заметно меньшим значениям турбулентной вязкости [3]).

Однако при столь сильном возрастании вязкости резко увеличивается производство энтропии (или, иначе, рассеяние энергии), а, согласно основному постулату неравновесной термодинамики, производство энтропии должно быть минимальным [4]. В связи с этим мы полагаем, что распределение скорости вращения в звездных или атмосферных конвективных зонах должно устанавливаться по возможности в соответствии с упомянутым постулатом. Ниже показано, что такой подход позволяет получить решения, удовлетворительно описывающие данные наблюдений.

Поскольку звездные и атмосферные конвективные зоны обычно характеризуются малой величиной сверхадиабатичности, то, мы изучаем адиабатически стратифицированную конвективную зону и находим структуру движений, при которой средняя вихревая вязкая сила, жестко связанная с вихревой кориолисовой силой, является минимальной. При этом сами конвективные движения предполагаются несущественными, хотя, конечно, только в присутствии последних может возникнуть неустойчивость, инициирующая самопроизвольный переход от твердотельного вращения к дифференциальному. Кроме того, мы предполагаем, что вращение рассматриваемой конвективной зоны является медленным.

В случае стационарной адиабатически стратифицированной среды давление является функцией плотности и из уравнения движения

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{W} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi = \mathbf{F} \quad (1)$$

вытекает соотношение

$$\text{rot } \mathbf{W} \approx \mathbf{D}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{W} = (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v}, \quad (3)$$

$\mathbf{D} = \text{rot } \mathbf{F}$, \mathbf{v} — гидродинамическая скорость, \mathbf{F} — вязкая сила, p — давление, ρ — плотность, Φ — гравитационный потенциал.

Уравнение (2) характеризует упоминавшуюся жесткую связь между вихревыми составляющими сил. Очевидно, что с уменьшением среднего по конвективной зоне значения функционала $|\text{rot } \mathbf{W}|$ средняя вязкая сила убывает, следовательно, становится более низким производство энтропии. В связи со сказанным выше наша задача состоит в нахождении такого распределения скоростей, при котором эта средняя сила будет минимальной (поскольку речь идет об очень малых изменениях скоростей, то условие, что средний угловой момент является заданным, удовлетворяется автоматически).

Будем искать решение сформулированной задачи, предполагая осевую симметрию и симметрию относительно экваториальной плоскости всех рассматриваемых движений среды и представляя все векторные величины в виде рядов по ортонормальной системе векторных сферических гармоник $\mathbf{Y}_{j0}^{(\lambda)}$, зависящих лишь от угловых переменных, причем $\lambda = -1, 0$ или 1 , а обозначения те

же, что в работе [5]. Например,

$$\mathbf{v} = \sum_J v_{J_0}^{(\lambda)} \mathbf{Y}_{J_0}^{(\lambda)} = \sum_J \{ \mathbf{i}_r v_{J_0}^{(-1)} Y_{J_0} + I^{-1} [\mathbf{i}_\vartheta v_{J_0}^{(+1)} - \mathbf{i}_\varphi i v_{J_0}^{(0)}] (\partial Y_{J_0} / \partial \vartheta) \}, \quad (4)$$

где $v_{J_0}^{(\lambda)} = v_{J_0}^{(\lambda)}(r)$, $I = [J(J+1)]^{1/2}$; \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_ϑ и \mathbf{i}_φ — единичные векторы сферической системы координат; Y_{J_0} — сферическая функция.

Важно, что обсуждаемая методика позволяет осуществить разделение переменных в рамках точных уравнений, несмотря на присутствие нелинейной кориолисовой силы. Вопрос о приведении возникающих громоздких выражений к более простому виду обсуждался в нашей работе [6]. Ряд для вектора \mathbf{W} , определяющегося формулой (3), выписан также в работе [7].

В рассматриваемом случае задача приводится к нахождению минимума функционала $|\text{rot } \mathbf{W}|$, квадратичного относительно $v_{J_0}^{(\lambda)}$, и радиальных производных от этих коэффициентов. Мы рассмотрим простейшее решение, которому соответствует одинаковая радиальная зависимость всех упомянутых коэффициентов, т. е.

$$v_{J_0}^{(\lambda)} = \text{const } r^\alpha, \quad (5)$$

где α — постоянная и действительная величина.

Это приближение не вносит других ограничений на равновесную конфигурацию, если полоидальная составляющая скорости несущественна. В противном случае мы должны учитывать вытекающее из уравнения непрерывности соотношение

$$\text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (6)$$

В нашем приближении медленного вращения плотность можно приближенно заменить ее сферически симметричной составляющей, тогда получим, что плотность аппроксимируется как

$$\rho = \text{const } r^{-\beta}, \quad (7)$$

где β — постоянная величина.

В результате будем иметь

$$v_{J_0}^{(+1)} = [(\alpha - \beta + 2)/I] v_{J_0}^{(-1)}. \quad (8)$$

С учетом этих соотношений получим для вектора $\text{rot } \mathbf{W}$, который мы будем обозначать через \mathbf{R} ,

$$R_{J_0}^{(-1)} = \frac{I}{2\alpha} R_{J_0}^{(+1)} = \frac{i}{r^2} I \sum_{J_1 J_2} G_{J_1 J_2}^J \{ (\alpha + 1) I_2 Z_{J_1 J_2}^J - (\alpha - \beta + 2) I_1^2 I_2^{-1} Z_{J_1 J_2}^J \} v_{J_1 0}^{(0)} v_{J_2 0}^{(-1)}, \quad (9)$$

$$R_{J_0}^{(0)} = -\frac{i}{r^2} \sum_{J_1 J_2} G_{J_1 J_2}^J \left\{ [(\alpha + 1) I^2 Z_{J_1 J_2}^J + 2\alpha I_1^2 Z_{J_1 J_2}^J] \times v_{J_1 0}^{(0)} v_{J_2 0}^{(0)} + [I_1 - (\alpha + 1)(\alpha - \beta + 2) I_1^{-1}] \times [(\alpha - \beta + 2) I^2 I_2^{-1} Z_{J_1 J_2}^J + 2\alpha I_2 Z_{J_1 J_2}^J] v_{J_1 0}^{(-1)} v_{J_2 0}^{(-1)} \right\}, \quad (10)$$

где

$$G_{J_1 J_2}^J = \frac{(C_{J_1 0 J_2 0}^J)^2}{4I_1 I_2} \left[\frac{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)}{\pi(2J + 1)} \right]^{1/2},$$

$Z_{ab} = a(a+1) + b(b+1) - c(c+1)$, $I_k = [J_k(J_k + 1)]^{1/2}$, C_{ab}^c — коэффициент Клебша–Гордана, $k = 1$ или 2 .

При этом в уравнениях (9), (10) $J > 0$ и сумма индексов $J + J_1 + J_2$ — четная величина (иначе результат будет нулевым). Кроме того, при условии симметрии относительно экваториальной плоскости коэффициенты $v_{J_0}^{(0)}$ имеют нечетные нижние индексы J , а у других коэффициентов скорости J является четным.

В рассматриваемом случае одинаковой радиальной зависимости всех мод для нахождения средней величины скалярного произведения $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*$ достаточно провести усреднение по всей сферической поверхности. Здесь индекс $*$ обозначает комплексно-сопряженную величину. С учетом ортогональности векторных сферических гармоник получим

$$[r/v_{10}^{(0)}]^4 \sum_{\lambda J} R_{J_0}^{(\lambda)} R_{J_0}^{(\lambda)*} = \sum_n \varepsilon_{2n} \varepsilon_{2n}^*, \quad (11)$$

где ε_{2n} — безразмерная переменная; $n = 1, 2, \dots$ — номер уравнения, т. е. $2n$ равно J при четном J и $J + 1$, если J — нечетное число.

Явное выражение для ε_{2n} может быть получено после подстановки соотношений (9) и (10). Конечно, уравнение (11) должно быть приравнено соответствующей вязкой силе, приведенной к безразмерному виду, однако наша задача заключается в нахождении тех распределений скоростей, при которых среднеквадратичное из всех ε_{2n} , т. е. $\bar{\varepsilon}$ является минимальным. Очевидно, что $N|\bar{\varepsilon}|^2$ равно правой части уравнения (11), если в нем оставлено лишь N членов.

Поскольку $G_{11}^2 = 1/[4(30\pi)^{1/2}]$, то видно, что в случае твердотельного вращения, когда $\alpha = 1$ и только один коэффициент $v_{10}^{(0)}$ из всей последовательности коэффициентов скорости отличен от нуля, все величины ε_{2n} равны нулю. При этом $v_{10}^{(0)} = -ir\Omega(8\pi/3)^{1/2}$, где Ω — угловая скорость вращения. Такое состояние является, по видимому, неустойчивым в присутствии даже медленных конвективных движений. Наши расчеты свидетельствуют в пользу существования такой неустойчивости, хотя этот вопрос еще нуждается в более детальном исследовании.

Будем полагать, что $v_{J_0}^{(0)}/v_{10}^{(0)} = u_J = u_{2k-1}$ и $v_{J_0}^{(-1)}/|v_{10}^{(0)}| = f_J = f_{2k}$, где k равно $1, 2, \dots, N$, тогда коэффициенты u_J и f_J будут действительными величинами, причём $u_1 = 1$. Очевидно, что в уравнении (11) будет $1 \leq n \leq N$.

Для решения сформулированной задачи мы сравнивали различные модели, варьируя либо один из коэффициентов u_f , f_f , либо параметр α и разыскивая модель с наименьшей величиной $\bar{\varepsilon}$. При этом рассматривались модели с числом вращательных мод до 30. На первом этапе изучались близкие к твердотельно вращающейся

Параметры моделей вращения

Модель	№ модели	α	$u_3 \cdot 100$	$u_5 \cdot 100$	$u_{(2N-1)}$	$J_{\max \varepsilon}$	$ \varepsilon_{J \max} $	$\bar{\varepsilon}$	r_Ω
1	11	1.28021	-4.9639	-1.1622	$-6.8 \cdot 10^{-5}$	22	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	1.92
2	20	1.28014	-4.9630	-1.1621	$-5.3 \cdot 10^{-6}$	32	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	2.24
3	29	1.28019	-4.9636	-1.1621	$-3.2 \cdot 10^{-7}$	30	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	2.27

модели в приближении пренебрежимо малых полюидальных скоростей, когда все $f_j \approx 0$ и в уравнении (11) $2n = J$. Были найдены решения при значениях α в районе 1.28 и 1.34. Первое из них описывает вращение, близкое к наблюдаемому на Солнце, и мы его рассмотрим более детально.

В таблице приведены основные параметры трех рассчитанных моделей с различными N , где N равно числу оставленных вращательных мод (все u_j с индексами $J > 2N - 1$ принимаются равными нулю). Мы приводим параметр α , два основных коэффициента u_3 и u_5 (напомним, что $u_1 = 1$), последний коэффициент $u_{(2N-1)}$, тот индекс $J = J_{\max \varepsilon}$, при котором $|\varepsilon_j| = \varepsilon_2$, по сравнению с другими такими же величинами достигает наибольшей величины $|\varepsilon_{J_{\max \varepsilon}}|$, саму эту величину, найденную минимальную среднеквадратичную величину $\bar{\varepsilon}$ и отношение экваториальной угловой скорости вращения к таковой на полюсах r_Ω . Изменение отношения соседних коэффициентов в последовательности u_j при увеличении J может быть волнообразным, как это следует из рис. 1. Широтная зависимость угловой скорости вращения представлена на рис. 2, на котором крестиками отмечены экспериментальные данные, полученные путем измерения доплеровских сдвигов линий [8]. Удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных данных свидетельствует в пользу того, что обсуждаемое состояние с минимальной средней вихревой вязкой силой действительно реализуется на Солнце.

Заслуживает внимания факт повышенной чувствительности к числу N величины угловой скорости вращения в непосредственной окрестности оси вращения. Только если N больше или порядка 20, исчезает зависимость распределения вращения и других параметров от числа N . Следует еще подчеркнуть, что в случае бесконечно больших N , по-видимому, не будет удовлетворяться требование достаточно быстрого убывания коэффициентов u_j . Последнее необходимо из-за того, что в приосевой зоне производная $(\partial Y_{j0}/\partial \vartheta)$ в формуле (4) пропорциональна $\vartheta J^{3/2}$, т.е. она растет с увеличением J . Иначе говоря, в реальных условиях амплитуда мод очень высокого порядка будет вероятно меньше той, которая определяется минимизационной процедурой. Даже в этом случае уменьшение средней вихревой вязкой силы по сравнению с той, которая соответствует неминимизированной модели, может быть весьма значительным, поскольку $\bar{\varepsilon}$, как следует из таблицы, убывает с увеличением N .

В случае планетарных конвективных атмосфер плотность обычно резко убывает с высотой (в формуле (7) $\beta \gg 1$) и интерес представляют модели с интенсивными меридиональными течениями среды. Предварительное изучение модели с $\beta = 800$ свидетельствует в пользу существования минимума $\bar{\varepsilon}$ при условии, что параметр α близок и несколько меньше β . Если еще принять, что толщина конвективной зоны в 4–5 раз больше отношения r/β , то угловая скорость вращения верхних слоев зоны будет на два порядка больше, чем нижних. Такая модель могла бы описывать сверхбыстрое вращение верхних слоев венерианской атмосферы, в этом случае конвекция возбуждается из-за больших горизонтальных градиентов температуры [9,10]. Эта проблема заслуживает более детального изучения.

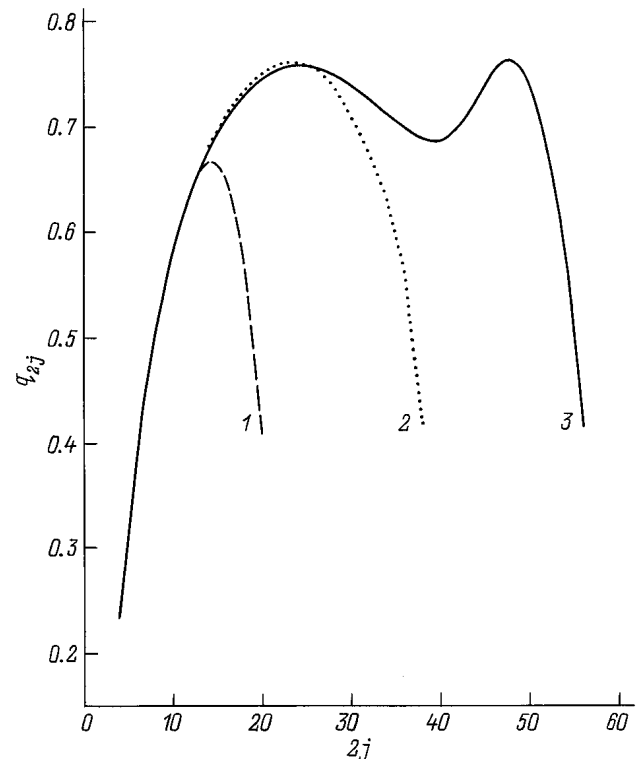


Рис. 1. Отношение амплитуд соседних коэффициентов $q_{2j} = u_{2j+1}/u_{2j-1}$ в зависимости от среднего значения нижнего индекса этих двух коэффициентов. Здесь $j = 1, 2, 3, \dots, (N - 1)$. Первое отношение q_2 отрицательно и на рисунке не показано. Номера кривых соответствуют номерам моделей в таблице.

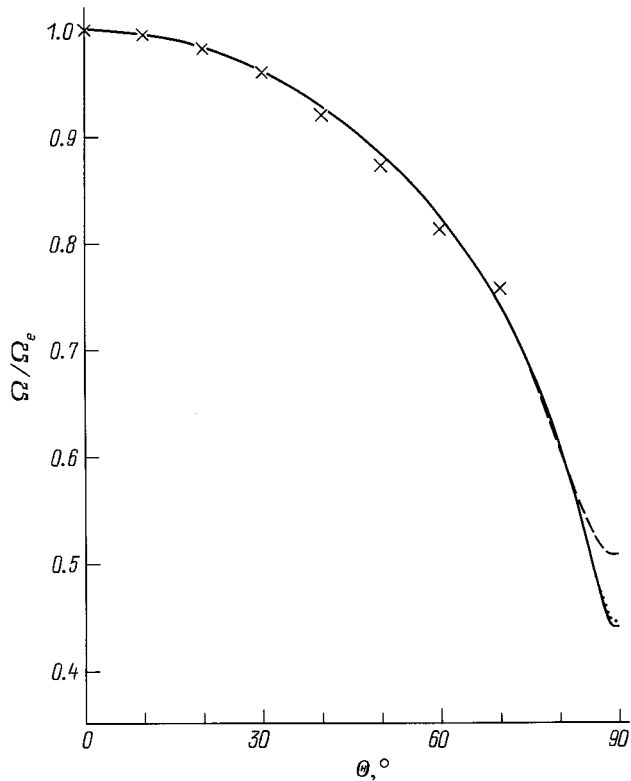


Рис. 2. Зависимость от широты Θ угловой скорости вращения Ω , нормированной на угловую скорость на экваторе Ω_e , в случае моделей 1–3 в таблице (соответственно штриховая, пунктирная и сплошная кривые). Крестики — экспериментальные результаты Говарда [8].

Если речь идет о намагниченной невращающейся конвективной зоне, то вместо \mathbf{W} в уравнение (2) войдет магнитная сила. Нетрудно показать, что это уравнение будет разрешимым только в случае дипольного магнитного поля [6]. При этом чем выше мультипольность поля, тем больше разность между числом уравнений и числом искомых переменных. Не исключено, что решение следует искать в рамках гипотезы о таком малом характерном диаметре магнитной трубки, который сопоставим с размером хаотических флуктуаций [6]. Возможно, что на этом пути удастся найти разгадку существования на Солнце маломасштабных магнитных трубок с большими потоками поля.

Часть работы была выполнена при финансовой поддержке фонда Санкт-Петербургского учебно-научного центра Минобразования РФ и РАН "Электрофизика токов большой плотности и сильных магнитных полей".

Список литературы

- [1] *Brown T.M., Chricensen-Dalsgaard J., Dziembowski W.A. et al.* // *Astrophys. J.* 1989. Vol. 343. P. 526–546.
- [2] *Tomczyk S., Schou J., Thompson M., J.* // *Astrophys. J.* 1995. Vol. 448. P. L57–L60.
- [3] *Вандакуров Ю.В.* Конвекция на Солнце и 11-летний цикл. Л.: Наука, 1976.
- [4] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. (Gyarmati I., *Non-Equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1970).
- [5] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. (Varshalovich D.A., Moskalev A.N., and Khersonskii V.K. *Quantum Theory of Angular Nomentum*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1988).
- [6] *Вандакуров Ю.В.* // *Астрон. журн.* 1999. Т. 76. № 1. С. 29–44.
- [7] *Вандакуров Ю.В.* // *Письма в Астрон. журн.* 1998. Т. 24. С. 450–460.
- [8] *Howard R.* // *Ann. Rew. Astron. Aastrophys.* 1984. Vol. 22. P. 131–155.
- [9] *Кузьмин А.Д., Маров М.Я.* Физика планеты Венера. М.: Наука, 1974.
- [10] *Бурангулов Н.И., Зилитинкевич С.С., Кержанович В.В. и др.* // *Динамика атмосферы Венеры*. Л.: Наука, 1974.