

01;09

Воздействие импульсного возбуждения ограниченной среды на плоскую электромагнитную волну

© А.Г. Нерух, О.Н. Рыбин, И.В. Щербатко

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники
310726 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 9 декабря 1997 г.)

Рассмотрено преобразование плоской монохроматической электромагнитной волны, вызванное изменением во времени диэлектрической проницаемости и проводимости полуграниченной среды. Изменение параметров среды представляет собой прямоугольный импульс произвольной длительности и амплитуды. Получена детальная структура электрического поля, его эволюционная перестройка. Показано асимптотическое образование обратной волны, амплитуда которой в случае типичных значений параметров полупроводника может превосходить амплитуду первичной волны.

Введение

Широкий интерес к проблеме трансформации электромагнитных волн в средах с меняющимися во времени параметрами обусловлен целым рядом приложений (распространение электромагнитных волн в нестационарной среде, радиосвязь, геофизическое зондирование зондирование нестойких объектов короткими электромагнитными импульсами, усилительная и преобразовательная техника и т. д.). Необходимость решения таких задач возникает также при исследовании сверхбыстрых электромагнитных явлений в полупроводниковой и квантовой электронике. Например, управление генерацией оптических импульсов в полупроводниковых структурах может осуществляться с такой скоростью, что возникающие при этом переходные процессы уже нельзя игнорировать [1].

Преобразование электромагнитных полей при изменении во времени параметров среды исследовано в целом ряде работ, например [2–6], а наиболее подробно оно проведено для скачкообразного изменения обычно одного параметра среды [7,8]. В настоящей работе исследуется воздействие на плоскую монохроматическую электромагнитную волну синхронного импульсного изменения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(t)$ и проводимости $\sigma(t)$ среды, которое происходит в области полупространства $x \geq 0$ и начинается в нулевой момент времени. До нулевого момента времени среда была однородной, непоглощающей, с диэлектрической проницаемостью ε_0 . Импульс имеет прямоугольную форму и длительность τ , так что в области полупространства $x \geq 0$ изменение параметров среды описывается формулами

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0[\Theta(-t) + \Theta(t - \tau)] + \varepsilon_1[\Theta(t) - \Theta(t - \tau)],$$

$$\sigma(t) = \sigma_1[\Theta(t) - \Theta(t - \tau)], \quad (1)$$

где ε_1 и σ_1 — диэлектрическая проницаемость и проводимость среды в полупространстве $x \geq 0$ на временном интервале $t \in [0, \tau]$, $\Theta(t)$ — единичная функция Хевисайда; среда в полупространстве $x < 0$ все время остается непроводящей и имеет диэлектрическую проницаемость ε_0 .

Если $E_0(t, x)$ есть первичное поле в невозмущенной среде, то электромагнитное поле в нестационарной среде, занимающей полупространство $x \geq 0$, описывается интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое в данном случае имеет вид [4]

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' K(t, t', x, x') E(t', x'). \quad (2)$$

Здесь $K(t, t', x, x')$ — ядро интегрального уравнения,

$$K(t, t', x, x') = - (1/\bar{a}^2(t)) \left\{ \bar{\sigma}(t) + (1/2)(1 - \bar{a}^2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \times \delta(\nu_0(t - t') - |x - x'|), \quad (3)$$

$\bar{a}(t) = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon(t)}$, $\nu_0 = c/\sqrt{\varepsilon_0}$, $\bar{\sigma}(t) = 2\pi\sigma(t)/\varepsilon_1$; c — скорость света в вакууме; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Решение уравнения (2) в области $x \geq 0$ записывается через резольвенту $R(t, t', x, x')$ посредством интеграла

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' R(t, t', x, x') E_0(t', x'). \quad (4)$$

Резольвента может быть найдена из уравнения

$$R(t, t', x, x') = K(t, t', x, x') + \int_0^\infty dt'' \int_0^\infty dx'' K(t, t'', x, x'') R(t'', t', x'', x') \quad (5)$$

и в случае $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 = \text{const}$, $\sigma(t) = \sigma_1 = \text{const}$ состоит из двух слагаемых

$$R(t, t', x, x') = R_1(t, t', x, x') + R_2(t, t', x, x'), \quad (6)$$

которые определяются с помощью обратного преобразования Лапласа следующим образом:

$$R_n(t, t', x, x') = \exp(-\bar{\sigma}_1(t - t')) \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} (dp/2\pi i) \times S_n(p, t, t', x, x') \exp(p(t - t')), \quad n = 1, 2.$$

Здесь

$$S_1(p) = \frac{a}{2\nu_0} \left(a^2 \frac{p - \bar{\sigma}_1}{p + \bar{\sigma}_1} - 1 \right) \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \times \exp \left\{ -pt' - \frac{|x - x'|}{\nu_1} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right\},$$

$$S_2(p) = \frac{a}{2\nu_0} \left(a \sqrt{\frac{p - \bar{\sigma}_1}{p + \bar{\sigma}_1}} - 1 \right)^2 \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \times \exp \left\{ -pt' - \frac{x + x'}{\nu_1} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right\}, \quad (7)$$

где $a = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1}$, $\alpha > \bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_1 = 2\pi\sigma_1/\varepsilon_1$, $\nu_1 = \sqrt{c/\varepsilon_1}$, $\text{Re} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} > 0$.

Первое слагаемое в (6) есть резольвента безграничной задачи, второе слагаемое учитывает влияние границы, образовавшейся в нулевой момент времени и разделяющей стационарное и нестационарное полупространства. Таким образом, выражение (4) с резольventой (6) определяет поле внутри нестационарной среды после скачкообразного изменения ее параметров до значений $\bar{\sigma}_1$ и ε_1 на всем временном промежутке $t \in [0, \tau]$ возбуждения среды.

В области $x < 0$ поле определяется с помощью того же соотношения (2), которое в этом случае представляет собой интегральную формулу, выражающую внешнее поле через внутреннее.

Поле в области возбужденной среды на временном промежутке $[0, \tau]$

Пусть первичное поле представляет собой плоскую монохроматическую волну $E_0(t, x) = \exp\{i(\omega t - kx)\}$, $k = \omega/\nu_0$. После скачкообразного возбуждения среды (т.е. после скачка диэлектрической проницаемости и проводимости среды в области $x \geq 0$) на временном интервале $t \in [0, \tau]$ поле описывается интегралом, получаемом и (4) при подстановке в него выражений (6) и (7),

$$E_2(t, x) = E_1(t, x) - a \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{p - \bar{\sigma}_1 + i\omega}{p - \bar{\sigma}_1 - i\omega} \times \frac{a(p - \bar{\sigma}_1) - \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}}{p^2 - \bar{\sigma}_1^2 + k^2\nu_1^2} \times \exp \left((p - \bar{\sigma}_1)t - (x/\nu_1) \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right),$$

$$\text{Re} \left(\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) > 0. \quad (8)$$

Здесь $E_1(t, x)$, результат интегрирования первой части резольventы R_1 , представляет собой сумму двух плоских

волн

$$E_1(t, x) = B_1^+ \exp(-\bar{\sigma}_1 t) \exp\{i(\Omega t - kx)\} + B_1^- \exp(-\bar{\sigma}_1 t) \exp\{-i(\Omega t + kx)\} \quad (9)$$

с амплитудами

$$B_1^\pm = -a^2 [(a^2 - 1)\omega^2 \pm 2\bar{\sigma}_1(i\Omega \mp \bar{\sigma}_1)] \times \{2i\Omega [i\Omega \mp (\bar{\sigma}_1 + i\omega)]\}^{-1}$$

и частотой $\Omega = \sqrt{a^2\omega^2 - \bar{\sigma}_1^2}$.

Волны (9) представляют собой также преобразованное поле в случае безграничной среды и представляют известный результат [7,8] — первичная плоская волна, волна I на рис. 1 (здесь и далее название волн будет совпадать с их амплитудными коэффициентами). Волна I после скачкообразного изменения параметров среды в нулевой момент времени расщепляется на две плоские волны: прямую и обратную. Прямая волна (первое слагаемое в выражении (9), B_1^+ на рис. 1, а) распространяется в том же направлении, что и первичная волна $E_0(t, x)$, а обратная (второе слагаемое в выражении (9), B_1^- на рис. 1, а) распространяется к образовавшейся границе раздела двух сред $x = 0$. Эти волны имеют такое же, как и у первичной волны, волновое число, но новую частоту Ω . В случае большой проводимости $\bar{\sigma}_1 > k\nu_1$ частота становится мнимой, а преобразованная волна — аperiodической. Обе волны убывают со временем по экспоненциальному закону вследствие появления в области $x \geq 0$ проводимости σ_1 . В данном случае ограниченной среды выражение (9) описывает все преобразованное поле в области $x \geq 0$ непосредственно сразу после возбуждения среды.

Влияние образовавшейся границы возбужденного полупространства дается интегральным слагаемым в формуле (8). Оно отлично от нуля только в полосе

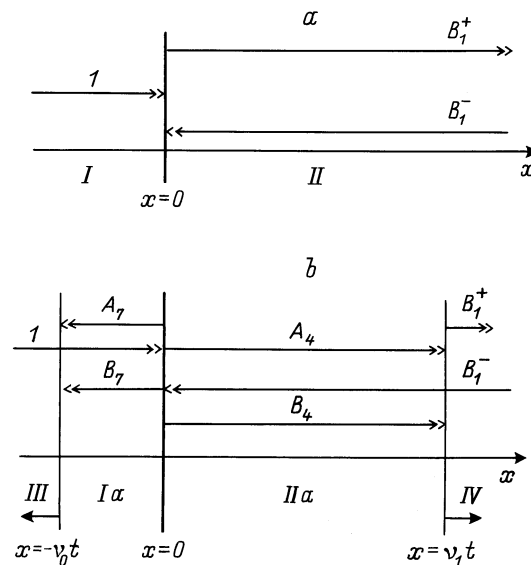


Рис. 1.

$x \in [0, \nu_1 t]$, которая представляет собой область влияния границы нестационарного полупространства на поле. При $t \rightarrow \infty$ полюса подынтегрального выражения в (8) сразу дают установившиеся волны, так как интегралы по разрезам асимптотически обращаются в нуль. Но при этом весь переходный процесс остается вне поля зрения, и в случае кратковременного возбуждения среды теряется существенная информация о структуре поля. Поэтому представляет интерес эволюция поля на всех этапах изменения среды. С этой целью рассмотрим приближения выражения (8) в двух предельных случаях: $x \approx \nu_1 t$ ($x < \nu_1 t$), т.е. поле вблизи движущегося фронта влияния границы, и $x \ll \nu_1 t$, т.е. позднерременное приближение. Перепишем выражение (8) в виде

$$\begin{aligned} E_2(t, x) = & E_1(t, x) + A_2 e(t, x, -\bar{\sigma}_1 - i\omega) + B_2^+ e(t, x, -i\Omega) \\ & + B_2^- e(t, x, i\Omega) - \Theta(t - x/\nu_1) a I_0 \left(\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right) \\ & + A_3 f(t, x, -\bar{\sigma}_1 - i\omega) + B_3^+ f(t, x, -i\Omega) \\ & + B_3^- f(t, x, i\Omega), \end{aligned} \quad (10)$$

где $I_0(t)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, а константы определяются формулами

$$\begin{aligned} A_2 = & -a^2 \frac{2\omega}{(1-a^2)\omega - 2i\bar{\sigma}_1}, \\ B_2^\pm = & \pm a^2 \frac{\Omega \mp \bar{\sigma}_1}{2i\Omega} \frac{i\Omega \mp (\bar{\sigma}_1 - i\omega)}{i\Omega \mp (\bar{\sigma}_1 + i\omega)}, \\ A_3 = & -a^3 \frac{2i\omega^2}{(1-a^2)\omega - 2i\bar{\sigma}_1}, \\ B_3^\pm = & \pm a^3 \frac{\omega^2}{2i\Omega} \frac{i\Omega \mp (\bar{\sigma}_1 - i\omega)}{i\Omega \mp (\bar{\sigma}_1 + i\omega)}. \end{aligned}$$

Функции e и f в (10) отличны от нуля в области $x < \nu_1 t$ и определены выражениями в соответствии с работой [9]

$$\begin{aligned} e(t, x, \beta) = & \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} (dp/2\pi i) \\ & \times \exp \left\{ pt - (x/\nu_1) \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right\} (p + \beta)^{-1}, \\ f(t, x, \beta) = & - \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} (dp/2\pi i) \exp \left\{ pt - (x/\nu_1) \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right\} \\ & \times (p + \beta)^{-1} (p^2 - \bar{\sigma}_1^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Применяя теорему Эфроса [10] к этим функциям, запишем выражение (10) в виде

$$\begin{aligned} E_2(t, x) = & E_1(t, x) + \Theta(t - x/\nu_1) \exp(-\bar{\sigma}_1 t) \\ & \times \left\{ A_2 \exp\{(\bar{\sigma}_1 + i\omega)(t - x/\nu_1)\} \right. \\ & + B_2^+ \exp\{i\Omega(t - x/\nu_1)\} + B_2^- \exp\{-i\Omega(t - x/\nu_1)\} \\ & - a I_0 \left(\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right) + \frac{\bar{\sigma}_1 x}{\nu_1} \\ & \times \int_{x/\nu_1}^t d\xi \left(A_2 \exp\{(\bar{\sigma}_1 + i\omega)(t - \xi)\} \right. \\ & + B_2^+ \exp\{i\Omega(t - \xi)\} + B_2^- \exp\{-i\Omega(t - \xi)\} \\ & \times I_1 \left(\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right) (t^2 - (x/\nu_1)^2)^{-1/2} \\ & - \int_{x/\nu_1}^t d\xi \left(A_3 \exp\{(\bar{\sigma}_1 + i\omega)(t - \xi)\} + B_3^+ \exp\{i\Omega(t - \xi)\} \right. \\ & \left. \left. + B_3^- \exp\{-i\Omega(t - \xi)\} \right) I_0 \left(\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) полностью описывает распределение электромагнитного поля в полупространстве после возбуждения среды на временном интервале $t \in [0, \tau]$.

Вблизи фронта влияния границы приближенное выражение для поля с точностью до первого порядка малости относительно величины $\bar{\sigma}_1(t - x/\nu_1)$ имеет вид

$$\begin{aligned} E_2(t, x) \approx & E_1(t, x) + \left\{ \exp(-\bar{\sigma}_1 x/\nu_1) F_1(x) \exp\{i(\omega t - kx)\} \right. \\ & + \exp(-\bar{\sigma}_1 t) F_2(x) \exp\{i\Omega(t - x/\nu_1)\} \\ & + \exp(-\bar{\sigma}_1 t) F_3(x) \exp\{-i\Omega(t - x/\nu_1)\} \\ & \left. + \exp(-\bar{\sigma}_1 t) F_4(x) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1(x) = & 2a\omega \left((1-a^2)\omega - 2i\bar{\sigma}_1 \right)^{-1} (\bar{\sigma}_1 + i\omega)^{-1} \\ & \times (\bar{\sigma}_1 + i(1-a)\omega + \bar{\sigma}_1^2 x/\nu_1), \\ F_2(x) = & - \frac{a^2}{2i\Omega} \frac{\bar{\sigma}_1 - i(\omega + \Omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\omega - \Omega)} \\ & \times (\bar{\sigma}_1 - i\Omega + i\Omega^{-1}a\omega^2 + i\Omega^{-1}(\bar{\sigma}_1 - i\Omega)\bar{\sigma}_1^2 x/\nu_1), \\ F_3(x) = & - B_4 (\bar{\sigma}_1 + i\Omega + i\Omega^{-1}a\omega^2 \\ & + i\Omega^{-1}(\bar{\sigma}_1 - i\Omega)\bar{\sigma}_1^2 x/\nu_1) (\bar{\sigma}_1 - i(\omega - \Omega))^{-1}, \\ F_4 = & a^2 i (2\Omega)^{-1} [\bar{\sigma}_1 - i(\omega - \Omega)]^2 [\bar{\sigma}_1 + i(\omega + \Omega)]^{-1}, \end{aligned}$$

$$F_4(x) = -a + a((1 - a^2)\omega - 2i\bar{\sigma}_1)^{-1} \left(a^2(1 + a^2)\omega^3\Omega^{-2} - 2ia^2\omega^2(\bar{\sigma}_1 + i\omega)^{-1} - (\bar{\sigma}_1^2/2) \right) \times [2\omega(\bar{\sigma}_1 + i\omega)^{-1} + i\Omega^{-1}((1 + a^2)\omega + 2i\bar{\sigma}_1)]x/\nu_1.$$

Как видно из выражения (13), скачок параметров среды в ограниченной области приводит к появлению вблизи фронта влияния границы спектра волн с неоднородными амплитудами. Первая волна $\sim F_1(x)$ представляет собой аналог обычной прошедшей волны. Волна $\sim F_2(x)$ есть "квазиантипод" волны B_1^+ из поля E_1 (9), так как ее фаза имеет вид $i\Omega(t - x/\nu_1) = i(\Omega t - \sqrt{1 - a^2(\bar{\sigma}_1/\omega)^2}kx)$. Ниже будет показано, что асимптотически эта волна рекомбинирует с волной B_1^+ . Следует отметить, что при отсутствии скачка проводимости непрерывный спектр не образуется и рекомбинация этих волн происходит сразу. Третья волна $\sim F_3(x)$ есть результат отражения волны B_1^- от образовавшейся границы раздела двух сред. Таким образом, наличие скачка проводимости ограниченной среды приводит к появлению переходного процесса, который переводит поле в установившийся режим лишь через некоторое время.

Из (9) и (13) следует также, что скачок диэлектрической проницаемости среды в полупространстве дает разрыв поля на движущейся плоскости влияния границы

$$x = \nu_1 t: \quad E_2(x/\nu_1 + 0, x) - E_2(x/\nu_1 - 0, x) = a(a - 1) \exp(-\bar{\sigma}_1 t).$$

Эволюция электромагнитного поля к установившемуся режиму будет описываться поздневременным приближением выражения (10). Для получения этого приближения воспользуемся представлением интегралов $e(t, x, \beta)$ и $f(t, x, \beta)$, полученным в работе [9], через функции Липшица-Ханкеля (формулы (П1) и (П2) в Приложении). В этом представлении функция Липшица-Ханкеля нулевого порядка определяется рядом Неймана [11] (формула (П3) в Приложении). Удерживая в этом ряде только первый член и подставляя полученные таким образом поздневременные ($t \gg x/\nu_1$) приближения для функций $e(t, x, \beta)$ и $f(t, x, \beta)$ в формулу (10), найдем, что для больших времен имеет место следующее приближенное выражение для поля $E_2(t, x)$:

$$E_2(t, x) \approx B_1^- \exp(-\bar{\sigma}_1 t) \exp\{-i(\Omega t + kx)\} + A_4 \exp(-\bar{\sigma}_1 x/\nu_1) \exp\{i\omega(t - x/\nu_1)\} + B_4 \exp(-\bar{\sigma}_1 t) \exp\{-i(\Omega t - kx)\} + \exp(-2\bar{\sigma}_1 t)Q_1(t, x), \quad (14)$$

где

$$A_4 = A_2 \frac{\bar{\sigma}_1 + i(1 - a)\omega}{\bar{\sigma}_1 + i\omega}.$$

Таким образом, в области $0 \leq x \ll \nu_1 t$ асимптотически остаются (рис. 1, b): прямая прошедшая волна A_4 , инициируемая волной I , обратная волна B_1^- , переходящая

из области $x > \nu_1 t$, и порождаемая ею отраженная от границы раздела сред прямая волна B_4 . Волна A_4 убывает с удалением от границы ($\sim \exp(-\bar{\sigma}_1 x/\nu_1)$) в отличие от волн B_1^\pm и B_4 , которые убывают во времени ($\sim \exp(-\bar{\sigma}_1 t)$). Отсутствие в выражении (14) волны B_1^+ и наличие этой волны в выражении (13) свидетельствуют о постепенном "исчезновении" данной волны при удалении от плоскости $x = \nu_1 t$. Слагаемое Q_1 в формуле (14) есть непрерывный спектр волн, который вызван скачком именно проводимости среды, причем $Q_1(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Выражение для Q_1 приведено в разделе 4 Приложения.

Реакция внешнего поля на возбуждение ограниченной области среды

Выражение для электрического поля в области невозмущенной среды $x \leq 0$ на временном интервале $t \in [0, \tau]$ получим, подставив выражение (8) в формулу (2),

$$E_3(t, x) = E_0(t, x) + \Theta \left(t + \frac{x}{\nu_0} \right) \left\{ \bar{\sigma}_1 + \frac{1}{2}(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \times \left\{ A_5 \exp \left\{ i\omega \left(t + \frac{x}{\nu_0} \right) \right\} + (a^2/2i\Omega + B_5^+) \exp \left\{ i\Omega \left(t + \frac{x}{\nu_0} \right) \right\} + (a^2/2i\Omega + B_5^-) \exp \left\{ i\Omega \left(t + \frac{x}{\nu_0} \right) \right\} + C_5 \exp \left\{ -(1 + a^2)(1 - a^2)^{-1} \bar{\sigma}_1 \left(t + \frac{x}{\nu_0} \right) \right\} + e \left(-\bar{\sigma}_1 \left(t + \frac{x}{\nu_0} \right) \right) \times A_6 Z \left(t + \frac{x}{\nu_0}, -\bar{\sigma}_1 - i\omega \right) + B_6^+ Z \left(t + \frac{x}{\nu_0}, i\Omega \right) + B_6^- Z \left(t + \frac{x}{\nu_0}, -i\Omega \right) + C_6 Z \left(t + \frac{x}{\nu_0}, (1 + a^2)(1 - a^2)^{-1} \bar{\sigma}_1 \right) \right\}. \quad (15)$$

Здесь

$$A_5 = -8a^2 \frac{2\bar{\sigma}_1 + i(1 + a^2)\omega}{(2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega)^2},$$

$$A_6 = 4a^3 \frac{(\omega - 2i\bar{\sigma}_1)\omega}{(2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega)^2},$$

$$B_5^\pm = \pm \frac{a^2(1 + a^2)i(\bar{\sigma}_1 \pm i\Omega)}{2\Omega((1 + a^2)\bar{\sigma}_1 \pm (1 - a^2)i\Omega)},$$

$$B_6^\pm = \pm \frac{a^5 i\omega}{(1 + a^2)\bar{\sigma}_1 \pm (1 - a^2)i\Omega},$$

$$C_5 = \frac{16a^2 \bar{\sigma}_1}{(2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega)^2}, \quad C_6 = -\bar{\sigma}_1 C_5,$$

$$Z\left(t + \frac{x}{\nu_0}, \beta\right) = - \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left(\frac{dp}{2\pi i}\right) \exp\left(p\left(t + \frac{x}{\nu_0}\right)\right) \times (p + \beta)^{-1} (p^2 - \bar{\sigma}_1^2)^{-1/2}. \quad (16)$$

Асимптотическое приближение ($t \gg -x/\nu_0$) для функции $Z(t + x/\nu_0, \beta)$ можно получить из соответствующего приближения для функции $f(t, x, \beta)$, если произвести замену $t \rightarrow t + x/\nu_0$, $x/\nu_0 \rightarrow 0$ (формула (П4) в Приложении). Подставляя полученное таким образом выражение для функции $Z(t + x/\nu_0, \beta)$ в (15), получим позднейшее приближение для электрического поля вне нестационарного полупространства

$$E_3(t, x) \approx E_0(t, x) + \Theta(t + x/\nu_0) \left\{ A_7 \exp\{i(\omega t + kx)\} + B_7 \exp\{-i\Omega(t + x/\nu_0)\} + \left[\bar{\sigma}_1 + (1/2)(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] Q_2(t, x) \right\}, \quad (17)$$

где

$$A_7 = -4a^2 (2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega)^{-1} \left(\bar{\sigma}_1 + i(1 + a^2)\omega - a\omega(\omega - 2i\bar{\sigma}_1)(2\bar{\sigma}_1 + 2i\omega)^{-1} \right), \\ B_7 = -a^2(2i\Omega)^{-1} (2\bar{\sigma}_1 - i(1 - a^2)\Omega).$$

Из выражения (17) следует, что в нулевой момент времени от образовавшейся границы раздела двух сред $x = 0$ отделяется и движется в отрицательном направлении оси x со скоростью ν_0 плоскость $x = -\nu_0 t$. Эта плоскость ограничивает слева область внешнего поля, которое образуется отражением первичной волны I_1 , в результате чего получается волна A_7 , а также прохождением волны B_1^- через границу раздела сред, в результате чего образуется волна B_7 (рис. 1, б). Фазовые скорости этих волн совпадают с фазовой скоростью первичной волны. Частота и волновое число волны A_7 совпадают с соответствующими характеристиками первичной волны, частота и волновое число волны B_7 равны соответственно Ω и Ω/ν_0 . Функция $Q_2(t, x)$ (раздел 4 Приложения) в формуле (17) описывает непрерывный спектр волн в области $x < 0$, который исчезает при $t \rightarrow \infty$.

Электрическое поле в правой окрестности плоскости $x = -\nu_0 t$ найдем, переписав интеграл (16) с помощью теоремы Эфроса в виде

$$Z(t + x/\nu_0, \beta) = - \int_0^{t+x/\nu_0} d\xi \times \exp\{-\beta(t + x/\nu_0 - \xi)\} I_0(\bar{\sigma}_1 \xi). \quad (18)$$

Отсюда с точностью до первого порядка малости относительно величины $\omega(t + x/\nu_0)$ получим приближенное

выражение для поля $E_3(t, x)$ вблизи фронта влияния границы среды $x = -\nu_0 t$

$$E_3(t, x) \approx E_0(t, x) + \Theta(t + x/\nu_0) \left\{ A_7 \exp\{i(\omega t + kx)\} + B_7 \exp\{-i\Omega(t + x/\nu_0)\} - 2a((2a^3 - 2a - 1)\omega^2 - (\bar{\sigma}_1 + i\omega)\bar{\sigma}_1) \times (2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega)^{-2} \right\}. \quad (19)$$

Последнее слагаемое в формуле (19) представляет собой постоянную составляющую, происходящую из непрерывного спектра волн, и коренным образом отличается от соответствующего слагаемого формулы (17), где непрерывный спектр волн формирует сложную функцию пространственно-временных координат.

Остаточные явления после снятия возбуждения среды

Электрическое поле во всем пространстве после скачкообразного возвращения параметров в области $x \geq 0$ в исходное состояние выражается формулой

$$E(t, x) = E_0(t, x) + (1/a^2) \left\{ \bar{\sigma}_1 + (1/2)(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \times \int_0^\tau dt' \int_0^\infty dx' \delta(\nu_0(t - t') - |x - x'|) E_2(t', x'). \quad (20)$$

После подстановки сюда выражения (8) найдем, что поле состоит из трех групп составляющих, занимающих в пространстве разные области (рис. 2),

$$E(t, x) = E_0(t, x) + E_4(t, x) + E_5(t, x) + E_6(t, x). \quad (21)$$

Первую группу представляют волны, существующие в областях *IIa*, *IIc* и *IV* и распространяющиеся в направлении первичной волны,

$$E_4(t, x) = \Theta(x + \nu_0(\tau - t)) \left\{ -\Theta(-t + x/\nu_0) E_0(t, x) + \left[\bar{\sigma}_1 + (1/2)(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\left(\Theta(t - x/\nu_0) A_8 - \Theta(-t + x/\nu_0) k^{-2} \nu_1^{-2} (B_3^+ \exp(i\Omega\tau) + B_3^- \exp(i\Omega\tau)) \right) E_0(t, x) - a^2 \Omega^{-1} \exp(-(\bar{\sigma}_1 + i\omega)\tau) \times \sin(\omega\tau) \exp\{-(\omega t + kx)\} + \exp\{i\Omega(t - x/\nu_0)\} \right] \times \left(\Theta(-t + x/\nu_0) k^{-2} \nu_1^{-2} B_3^+ + \Theta(t - x/\nu_0) B_8^+ \right) + \exp\{-i\Omega(t - x/\nu_0)\} \times \left(\Theta(-t + x/\nu_0) k^{-2} \nu_1^{-2} B_3^- + \Theta(t - x/\nu_0) B_8^- \right) + A_8 e(\tau, -(1/a)(t - x/\nu_0 - \tau), -\bar{\sigma}_1 - i\omega) + 2a(2a\bar{\sigma}_1 + (1 - a^2)i\omega) \times \left(B_8^+ e(\tau, -(1/a)(t - x/\nu_0 - \tau), i\Omega) + B_8^- e(\tau, -(1/a)(t - x/\nu_0 - \tau), -i\Omega) \right) \right\} \Theta(x). \quad (22)$$

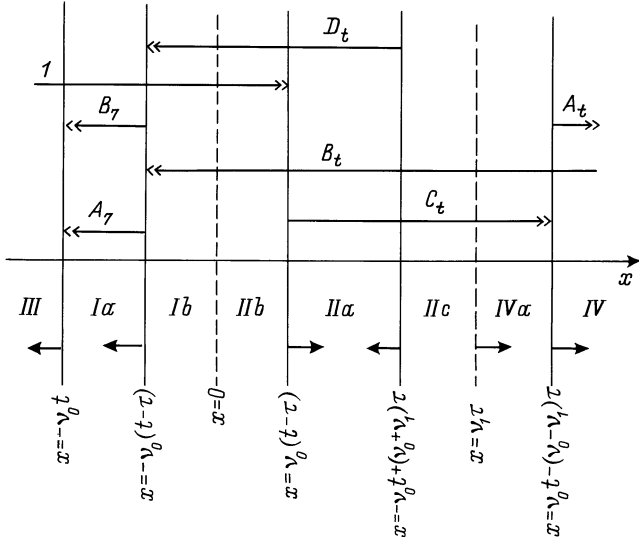


Рис. 2.

Вторую группу составляют волны, распространяющиеся в противоположном направлении и существующие в области Ia ,

$$E_5(t, x) = \left[\bar{\sigma}_1 + (1/2)(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \left\{ A_5 E_0(t, x) + B_5^+ \exp\{i\Omega(t + x/\nu_0)\} + B_5^- \exp\{-i\Omega(t + x/\nu_0)\} + C_5 \exp\{2|1 - a^2|^{-1} \bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0)\} - \Omega^{-1} \exp(-\bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0)) - \sin(\Omega(t + x/\nu_0)) + \exp(-\bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0)) A_6 Z(t + x/\nu_0, -\bar{\sigma}_1 - i\omega) + B_6^+ Z(t + x/\nu_0, i\Omega) + B_6^- Z(t + x/\nu_0, -i\Omega) + C_6 Z(t + x/\nu_0, (1 + a^2)|1 - a^2|^{-1} \bar{\sigma}_1) \right\} \Theta(-x) \quad (23)$$

и в областях Ib , IIa , IIb

$$E_6(t, x) = \left[\bar{\sigma}_1 + (1/2)(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \left\{ \Theta(-x) \exp(-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau) \sin(\Omega\tau) \times \exp\{-i(\omega t + kx)\} + A_5 e(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), -\bar{\sigma}_1 - i\omega) + B_5^+ e(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), i\Omega) + B_5^- e(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), -i\Omega) + C_5 e(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), (1 + a^2)|1 - a^2|^{-1} \bar{\sigma}_1) + A_6 f(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), -\bar{\sigma}_1 - i\omega) + B_6^+ f(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), i\Omega) + B_6^- f(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), -i\Omega) + C_6 f(\tau, (1/a)(t + x/\nu_0 - \tau), (1 + a^2)|1 - a^2|^{-1} \bar{\sigma}_1) \right\} \quad (24)$$

Здесь

$$A_8 = -\frac{1}{a} \frac{(1 - a^2)\omega - 2ai\bar{\sigma}_1}{(1 - a^2)\omega - 2i\bar{\sigma}_1},$$

$$B_8^\pm = \frac{i}{2\Omega} \frac{(1 + a^2)\omega \pm 2i\Omega}{(1 - a^2)\omega - 2i\bar{\sigma}_1}.$$

Таким образом, в момент времени $t = \tau$ в результате скачкообразного возвращения параметров среды в полупространстве $x \geq 0$ к первоначальному состоянию от границы $x = 0$ отделяются и движутся в противоположные стороны со скоростью ν_0 две плоскости: $x = \pm\nu_0(t - \tau)$. По той же причине движущаяся в области $x \geq 0$ плоскость $x = \nu_1 t$ также расщепляется на две разбегающиеся плоскости: $x = \pm\nu_0 t + (\nu_1 \mp \nu_0)\tau$. Эти плоскости ограничивают области с разной структурой поля.

Используя приведенные выше приближенные выражения для интегралов (11) и (16), получим поздневременное приближение ($t \gg x/\nu_1$) для поля (21)

$$E(t, x) \approx A_t(t, x) E_0(t, x) + B_t(t, x) \exp\{-i(\omega t + kx)\} + C_t(t, x) \exp\{(i/a)(\omega t - kx)\} + D_t(t, x) \exp\{-(i/a)(\omega t + kx)\} + \Theta(\nu_0(\tau - t) - x) E_3(t, x) + \sum_{i=3}^4 \Theta((\nu_1 + (-1)^i \nu_0)\tau + (-1)^{i-1} \nu_0 t - x) \times \Theta(x + (-1)^i \nu_0(\tau - t)) \exp(-\bar{\sigma}_1 \tau) Q_i(t, x, \tau). \quad (25)$$

Составляющие поля в этом выражении имеют следующее происхождение. Каждая из волн B_1^- , B_4 и B_1^+ расщепляется на прямую и обратную. Образовавшиеся волны, имея одинаковые фазовые характеристики, интерферируют между собой и дают прямую волну

$$A_t(t, x) = \exp(-(\bar{\sigma}_1 + i\omega)\tau) (\bar{\sigma}_1 - (1 - a^2)i\omega/2) \times (B_8^+ \exp(i\Omega t) + B_8^- \exp(-i\Omega t)) \quad (26)$$

и обратную волну B_t

$$B_t(t, x) = -a^2 (2\Omega)^{-1} (2\bar{\sigma}_1 - i(1 - a^2)\omega) \Theta(x + \nu_0(t - \tau)) \times \exp(-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau) \{ \cos(\Omega\tau) + i\Theta((\nu_1 + \nu_0)\tau - \nu_0 t - x) \sin(\Omega\tau) \}. \quad (27)$$

Фазовые характеристики этих волн совпадают с фазовыми характеристиками первичной волны. Прямая волна A_t существует только в области IV . Обратная волна B_t в областях IIa , Ib и IIb имеет амплитуду

$$-(a^2/2\Omega) (2\bar{\sigma}_1 - i(1 - a^2)\omega) \exp(-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau) \sin(\Omega\tau), \quad (28)$$

а в областях IV , IIc и IVa

$$-(a^2/2\Omega) (2\bar{\sigma}_1 - i(1 - a^2)\omega) \exp(-(\bar{\sigma}_1 - i(\omega + \Omega))\tau). \quad (29)$$

Расщепление волны A_4 дает прямую волну C_t , которая существует в областях IIa , IIc и IVa

$$C_t(t, x) = \Theta(x + \nu_0(\tau - t))\Theta((\nu_1 - \nu_0)\tau + \nu_0 t - x) \times \exp(-(\bar{\sigma}_1 + i(1 + 1/a)\omega)\tau)A_8 \quad (30)$$

и обратную волну D_t , которая существует в областях Ia , IIa и IIb ,

$$D_t(t, x) = \Theta(x + \nu_0(t - \tau))\Theta((\nu_1 + \nu_0)\tau - \nu_0 t - x) \times \exp(-(\bar{\sigma}_1 - i(1 + 1/a)\omega)\tau)A_7. \quad (31)$$

Эти волны имеют частоты и волновые числа, равные соответственно ω/a и k/a .

Слагаемые Q_i в выражении (25) описывают распределение в пространстве непрерывного спектра волн, который возникает в момент времени $t = \tau$ и исчезает при $t \rightarrow \infty$. Выражение для этих слагаемых приведены в разделе 4 Приложения.

Слагаемое $E_3(t, x)$ в формуле (25) описывает поле в области Ia (рис. 2) и равно соответствующему выражению для поля в этой области (рис. 1, b) до скачкообразного возвращения среды в исходное состояние. Это означает сохранение структуры поля в областях Ia и III .

Таким образом, после скачкообразного возвращения среды в первоначальное состояние в пространстве образуются две пары прямых и обратных волн: волны A_t , B_t и C_t , D_t (рис. 2), а также непрерывный спектр волн. Частоты и волновые числа волн A_t и B_t совпадают с частотой и волновым числом первичной волны, а частоты и волновые числа волн C_t и D_t отличаются от соответствующих характеристик первичной волны на коэффициент $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}$. В установившемся режиме, когда все плоскости раздела областей уходят на бесконечность, в пространстве останутся только первичная волна и волна B_t . Асимптотическое выражение для электрического поля примет следующий вид:

$$E(t, x) = E_0(t, x) - (a^2/2\Omega)(2\bar{\sigma}_1 - i(1 - a^2)\omega) \sin(\Omega\tau) \times \exp(-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau) \exp\{-i(\omega t + kx)\}. \quad (32)$$

Модуль и фаза амплитуды обратной волны $B_t = |B_t| \exp(i\Phi)$ будут равны

$$|B_t| = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4b^2a^2 + (1 - a^2)^2}{1 - b^2a^2}} \times \sin\left(aT\sqrt{1 - b^2a^2}\right) \exp\{-ba^2T\}, \quad (33)$$

$$\Phi = T + \arctg((a^2 - 1)/2ba^2), \quad (34)$$

где введены нормированные величины $b = 2\pi\sigma_1/(\varepsilon_0\omega)$, $T = \omega\tau$.

В рассматриваемой модели среды можно ввести как затухание электромагнитной волны, так и ее усиление.

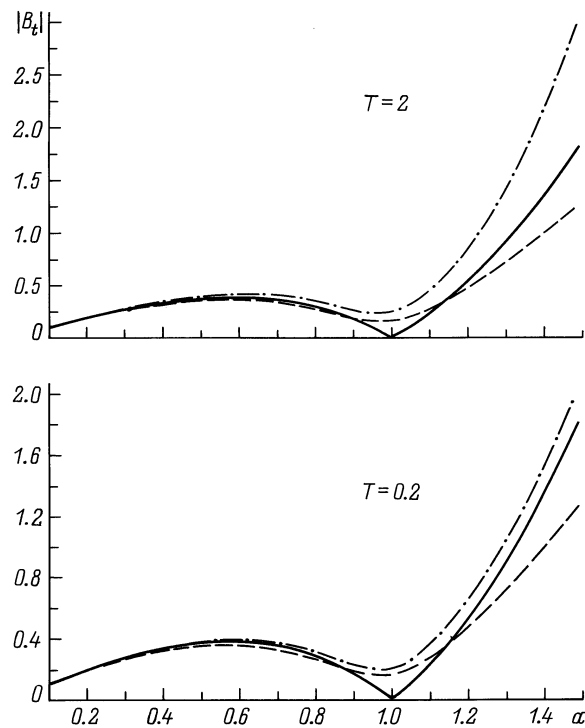


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды обратной волны B_t от относительного изменения диэлектрической проницаемости a . Сплошная кривая — $b = 0$, штриховая — $b = 0.1$, штрихпунктир — $b = -0.1$.

Формально это можно описать отрицательной проводимостью. Например, при инжекции в полупроводниковую среду свободных носителей заряда происходит как изменение диэлектрической проницаемости полупроводника, так и изменение знака его проводимости [12,13]. Если показатель преломления среды есть комплексная величина $n = n' + in''$, то параметры a , b выражаются через действительную и мнимую части показателя преломления следующим образом:

$$a^2 = \frac{\varepsilon_0}{n'^2 - n''^2}, \quad b = \frac{T}{\varepsilon} n' n''. \quad (35)$$

Для типичных значений величины показателя преломления полупроводника типа InGaAsP ($n' \approx 3.6$, $n'' \approx 0.01$) [13] значения величин параметров среды имеют порядок $a \approx 1$, $b \approx 0.05$.

Поведение модуля амплитуды обратной волны в зависимости от скачка диэлектрической проницаемости среды a для разных значений коэффициента диссипации b показано на рис. 3. Отрицательные значения b моделируют активную среду с усилением. Как следует из рисунка, при любом знаке коэффициента диссипации может иметь место эффект усиления обратной волны. Очевидно, этот эффект вызван передачей энергии от источника, изменяющего параметры среды, электромагнитному полю.

Заключение

В работе показано, что импульсное возбуждение параметров ограниченной среды в течение временного промежутка конечной длительности из первичной плоской монохроматической волны образует сложную структуру поля. Эта структура представляет собой систему областей пространства, разделенных параллельными плоскостями, движущимися со скоростями, равными соответствующим фазовым скоростям волн. Каждая область характеризуется как дискретным набором волн, так и непрерывным спектром волн. Асимптотически в конечной области пространства из этих наборов волн остается обратная по отношению к первичной волна, которая имеет фазовые характеристики первичной волны, но другую амплитуду. Величина этой амплитуды для типичных полупроводниковых сред может превосходить амплитуду первичной волны.

Приложение

1. В работе [9] показано, что функции $e(t, x, \beta)$ и $f(t, x, \beta)$ могут быть представлены в виде

$$e(t, x, \beta) = \Theta(t - x/\nu_1) \left\{ e^{-\beta t} \operatorname{ch} \left((x/\nu_1) \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) + \left(2i\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right)^{-1} \left[\left(\beta x/\nu_1 - t \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) \times \exp(a_+ \xi) \mathfrak{J}_{e0}(a_+, \xi) + \left(\beta x/\nu_1 + t \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) \times \exp(a_- \xi) \mathfrak{J}_{e0}(a_-, \xi) \right] \right\}; \quad (\text{П1})$$

$$f(t, x, \beta) = \Theta(t - x/\nu_1) (\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2)^{-1/2} \times \left\{ \exp(-\beta t) \operatorname{sh} \left((x/\nu_1) \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) + \left(2i\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right)^{-1} \left[\left(\beta x/\nu_1 - t \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) \times \exp(a_+ \xi) \mathfrak{J}_{e0}(a_+, \xi) - \left(\beta x/\nu_1 + t \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) \exp(a_- \xi) \mathfrak{J}_{e0}(a_-, \xi) \right] \right\}; \quad (\text{П2})$$

где $a_{\pm} = \left(-\beta t \pm (x/\nu_1) \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \right) \left(i\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right)^{-1}$, $\xi = i\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2}$,

$$\mathfrak{J}_{e0}(a_{\pm}, z) = \int_0^z d\zeta e^{-a_{\pm}\zeta} \zeta^n J_n(\zeta)$$

— функция Липшица–Ханкеля n -го порядка, $J_n(z)$ — функция Бесселя n -го порядка. Здесь предполагается,

что $\operatorname{Re} \left(\sqrt{a_{\pm}^2 + 1} \right) > 0$, если $\operatorname{Re}(a_{\pm}) \geq 0$, и $\operatorname{Re} \left(\sqrt{a_{\pm}^2 + 1} \right) < 0$, если $\operatorname{Re}(a_{\pm}) < 0$.

2. Функция Липшица–Ханкеля нулевого порядка $\mathfrak{J}_{e0}(a_{\pm}, z)$ определяется рядом Неймана [11]

$$\mathfrak{J}_{e0}(a_{\pm}, z) = (a_{\pm}^2 + 1)^{-1/2} + \frac{\exp(-a_{\pm}z)}{\Gamma(1/2)(a_{\pm}^2 + 1)} \times \sum_{k=0}^{\infty} (2(a_{\pm}^2 + 1)^{-1} z^{-1})^k \times \Gamma(k + 1/2) [J_{k+1}(z) - a_{\pm} J_k(z)]. \quad (\text{П3})$$

3. Позднеевременное приближение для функции $Z(t + x/\nu_0, \beta)$ имеет следующий вид

$$Z(t + x/\nu_0, \beta) \approx -\Theta(t + x/\nu_0) (\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2)^{-1/2} \times \left\{ \exp(-\bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0)) - \frac{i\bar{\sigma}_1}{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2} \frac{t \sqrt{\beta^2 - \bar{\sigma}_1^2}}{t + x/\nu_0} \times [I_1(\bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0)) + (\beta/i\bar{\sigma}_1) I_0(\bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0))] \right\}. \quad (\text{П4})$$

4. Функции, описывающие непрерывные спектры волн в разных областях пространства,

$$Q_1(t, x) = -\frac{a^2}{(1 - a^2)\omega - 2i\bar{\sigma}_1} \left\{ \left(\frac{2i\omega\bar{\sigma}_1}{(\bar{\sigma}_1 + i\omega)^2} \times \frac{a\omega t + (\bar{\sigma}_1 + i\omega)x/\nu_1}{\sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2}} - \frac{(1 + a^2)a\omega^3 t - \Omega(x/\nu_1) ((1 + a^2)\omega\bar{\sigma}_1 - 2i\Omega^2)}{i\Omega \{a^2\omega^2 t^2 - \Omega^2(x/\nu_1)^2\}} \times \bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right) \times I_1 \left(\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right) + \left(2\omega \frac{2(1 + a^2)a\omega^3 \Omega(t^2 - (x/\nu_1)^2) + i\bar{\sigma}_1^2 t(x/\nu_1) ((1 + a^2)\omega\bar{\sigma}_1 + 2i\Omega^2)}{\Omega(a^2\omega^2 t^2 - \Omega^2(x/\nu_1)^2)} \right) \times I_0 \left(\bar{\sigma}_1 \sqrt{t^2 - (x/\nu_1)^2} \right) \right\}. \quad (\text{П5})$$

$$Q_2(t, x) = -i \frac{a}{2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega} \frac{t}{t + x/\nu_0} \times \left\{ \bar{\sigma}_1 \left[\frac{4a^2}{2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega} - \frac{2a^2(1 - a^2)\Omega}{\omega(2\bar{\sigma}_1 - i(1 - a^2)\omega)} \right] \times I_1(\bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0)) + \left[\frac{2ia^2(1 + a^2)\Omega\bar{\sigma}_1}{\omega(2\bar{\sigma}_1 - i(1 - a^2)\omega)} - \frac{4a^2(\omega - i\bar{\sigma}_1)}{2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega} - \frac{4|1 - a^4|\bar{\sigma}_1}{a(2\bar{\sigma}_1 + i(1 - a^2)\omega)} \right] \times I_0(\bar{\sigma}_1(t + x/\nu_0)) \right\}; \quad (\text{П6})$$

$$\begin{aligned}
Q_3(t, x, \tau) = & -\frac{ia^2(t-x/\nu_0-\tau)}{(a^2-1)\omega-2i\bar{\sigma}_1} \left(\left(\frac{2i\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1+i\omega} \right. \right. \\
& \times \frac{t-x/\nu_0-\tau}{a\sqrt{a^2\tau^2-(t-x/\nu_0-\tau)^2}} \\
& - (\bar{\sigma}_1/2a)\sqrt{\tau^2-(1/a^2)(t-x/\nu_0-\tau)^2} \\
& \times \left. \frac{((a^2+1)\omega+2i\bar{\sigma}_1)}{a^4\omega^2\tau^2-\Omega^2(t-x/\nu_0-\tau)^2} \right) \\
& \times I_1 \left(\bar{\sigma}_1\sqrt{\tau^2-(1/a^2)(t-x/\nu_0-\tau)^2} \right) \\
& - I_0 \left(\bar{\sigma}_1\sqrt{\tau^2-(1/a^2)(t-x/\nu_0-\tau)^2} \right) (1/a) \\
& \times \left(\frac{2}{t-x/\nu_0-\tau} - \frac{\bar{\sigma}_1^2\Omega\tau((a^2+1)\omega+2ia\bar{\sigma}_1)}{a^4\omega^2\tau^2-\Omega^2(t-x/\nu_0-\tau)^2} \right). \quad (\text{П7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4(t, x, \tau) = & \frac{a^3}{2\bar{\sigma}_1+i(1-a^2)\omega} \left(\left(\frac{4i\bar{\sigma}_1}{(\bar{\sigma}_1+i\omega)^2} \right. \right. \\
& a\omega(\omega-2i\bar{\sigma}_1)\tau-2(\bar{\sigma}_1+i\omega) \times \\
& \times \frac{(2\bar{\sigma}_1+i(1+a^2)\omega)(t+x/\nu_0-\tau)}{(2\bar{\sigma}_1+i(1-a^2)\omega)\sqrt{a^2\tau^2-(t+x/\nu_0-\tau)^2}} \\
& + ia(1+a^2) \frac{2a^4\bar{\sigma}_1\omega\tau+(2\bar{\sigma}_1^2+(1-a^2)\omega^2)(t+x/\nu_0-\tau)}{(2\bar{\sigma}_1-i(1-a^2)\omega)(a^4\omega^2\tau^2-\Omega^2(t+x/\nu_0-\tau)^2)} \\
& \times \bar{\sigma}_1\sqrt{a^2\tau^2-(t+x/\nu_0-\tau)^2} \\
& - 16a|1-a^2|\sqrt{a^2\tau^2-(t+x/\nu_0-\tau)^2}\bar{\sigma}_1 \\
& \times \frac{a\tau-i(1+a^2)(t+x/\nu_0-\tau)}{(2\bar{\sigma}_1+i(1-a^2)\omega)((1+a^2)^2(t+x/\nu_0-\tau)^2-4a^4\tau^2)} \\
& \times I_1 \left(\bar{\sigma}_1\sqrt{\tau^2-(1/a^2)(t+x/\nu_0-\tau)^2} \right) \\
& - \left(8\frac{2\bar{\sigma}_1+i(1+a^2)\omega}{2\bar{\sigma}_1-i(1+a^2)\omega} - a(1+a^2)\bar{\sigma}_1 \right. \\
& - \frac{2\omega\Omega(a^2\tau^2-(t+x/\nu_0-\tau)^2)-}{(2\bar{\sigma}_1-i(1+a^2)\omega)(a^4\omega^2\tau^2-\Omega^2(t+x/\nu_0-\tau)^2)} \\
& \left. - \frac{-i\bar{\sigma}_1\tau(t+x/\nu_0-\tau)\Omega^{-1}(2\bar{\sigma}_1^2+(1+a^2)\omega^2)}{(2\bar{\sigma}_1-i(1+a^2)\omega)(a^4\omega^2\tau^2-\Omega^2(t+x/\nu_0-\tau)^2)} \right) \\
& + 16\bar{\sigma}_1 \frac{|1-a^4|(a^2\tau^2-(t+x/\nu_0-\tau)^2)-}{(2\bar{\sigma}_1+i(1-a^2)\omega) \times} \\
& \times \frac{-ia(1-a^2)\tau(t+x/\nu_0-\tau)}{(1+a^2)^2(t+x/\nu_0-\tau)^2-4a^4\tau^2} \\
& \times I_0 \left(\bar{\sigma}_1\sqrt{\tau^2-(1/a^2)(t+x/\nu_0-\tau)^2} \right). \quad (\text{П8})
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *Tatham M.C., Sherlock G., Westbrook L.D.* // IEEE Photonics Technol. Lett. 1993. Vol. 5. N 11. P. 1303–1306.
- [2] *Аверков С.И., Болдин В.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 9. С. 1060–1066.
- [3] *Борисов В.В.* Неустановившиеся электромагнитные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 240 с.
- [4] *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО "Тест-Радио", 1991. 280 с.
- [5] *Harfoust F.A., Taflove A.* // IEEE Trans. on Antennas and Propag. 1991. Vol. 39. N 7. P. 898–906.
- [6] *Барсуков К.А., Григорьева Н.Ю.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 134–140.
- [7] *Борисов В.В.* // Геомагнетизм и аэронавигация. 1989. Т. 29. № 5. С. 730–737.
- [8] *Нерух А.Г., Шаворыкина И.Ю.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 5. С. 108–118.
- [9] *Dvorak S.L., Dudley D.G.* // IEEE Trans. on Electromagnetic Comrarility. 1995. Vol. 37. N 2. P. 192–200.
- [10] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
- [11] *Dvorak S.L., Kuester E.F.* // J. Computational Phys. 1990. Vol. 87. N 2. P. 301–327.
- [12] *Pao H.-Y., Dvorak S.L., Dudley D.G.* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1996. Vol. 44. N 7. P. 925–932.
- [13] *Visser T.D., Block H., Lenstra D.* // IEEE J. Quant. Electron. 1995. Vol. 31. N 10. P. 1803–1810.