

01;03

## Локальное увеличение напряженности однородного электростатического поля вблизи вершины сфероидальной капли

© С.И. Щукин, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет,  
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 29 апреля 1998 г.)

Показано, что коэффициент усиления однородного электростатического поля у вершины сфероидальной капли зависит от диэлектрической проницаемости вещества капли, ее исходного радиуса и напряженности внешнего поля, увеличиваясь с их ростом. Потеря устойчивости капли во внешнем электростатическом поле, сопровождающаяся весьма быстрым нарастанием величины сфероидальной деформации, вызывает кратковременное резкое усиление поля у ее вершины.

Задача расчета локального усиления напряженности внешнего однородного электростатического поля у вершины диэлектрического сфероида представляет интерес для анализа физических особенностей формирования фрактальных структур из естественного дымового и пылевого аэрозоля [1,2]; исследования закономерностей инициирования разряда линейной молнии [3,4]; изучения особенностей полевого испарения ионов в масс-спектрометрии растворов нелетучих и термически нестабильных веществ [5–8]. Несмотря на простоту постановки, при решении задачи возникают некоторые трудности вычислительного характера, поэтому задача не была до сих пор решена и ее анализу посвящено настоящее рассмотрение.

### Зависимость коэффициента усиления поля вблизи вершины диэлектрического сфероида, помещенного в однородное электростатическое поле, от формы сфероида и диэлектрической проницаемости его вещества

Электростатическое поле внутри диэлектрического сфероида, вытянутого в вакууме вдоль однородного электростатического внешнего поля  $E_0$ , однородно и совпадает по направлению с  $E_0$ , а его напряженность  $E_e$  определяется выражением [9]

$$E_e = \frac{E_0}{1 + (\varepsilon - 1)n_x}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества;  $n_x$  — коэффициент деполяризации, зависящий от формы (но не от размеров) сфероида

$$n_x = \frac{k \ln(k + \sqrt{k^2 - 1}) - \sqrt{k^2 - 1}}{(k^2 - 1)^{3/2}}, \quad (2)$$

где  $k$  — отношение полуосей сфероида,  $k > 1$ .

Учитывая непрерывность нормальной составляющей индукции электрического поля при переходе через границу раздела сред, для напряженности поля во внешней среде у вершины сфероида  $E_x$  можно записать [9]

$$E_x = \frac{\varepsilon E_0}{1 + (\varepsilon - 1)n_x}. \quad (3)$$

Если в нулевом приближении принять, что форма частицы не зависит от напряженности внешнего поля, т. е. если говорить не о капле, а о жесткой сфероидальной частице, то  $E_x$  линейно зависит от  $E_0$  и наиболее наглядным представлением интересующей нас зависимости будет график зависимости коэффициента усиления поля  $E_x/E_0$  от диэлектрической проницаемости вещества  $\varepsilon$  и отношения полуосей  $k$  сфероида. Из (2) и (3) следует

$$\frac{E_x}{E_0} = \frac{\varepsilon (k^2 - 1)^{3/2}}{(k^2 - 1)^{3/2} + (\varepsilon - 1) [k \ln(k + \sqrt{k^2 - 1}) - \sqrt{k^2 - 1}]}. \quad (4)$$

График, приведенный на рис. 1, показывает, что 1) коэффициент усиления поля больше для более вытянутых частиц, 2) коэффициент усиления поля выше для частиц вещества с большей диэлектрической проницаемостью.

Для идеально проводящей частицы, находя предел (3) при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , получим

$$E_c = \frac{E_0}{n_x}. \quad (5)$$

График зависимости коэффициента усиления поля  $E_c/E_0$  от отношения полуосей проводящего сфероида  $k$ , приведенный на рис. 2, показывает, что коэффициент усиления поля монотонно растет с увеличением  $k$ .

Таким образом, увеличение напряженности однородного электростатического поля вблизи вершины жесткого сфероида зависит от диэлектрической проницаемости вещества  $\varepsilon$  и отношения полуосей сфероида  $k$ , но не зависит от его размеров.

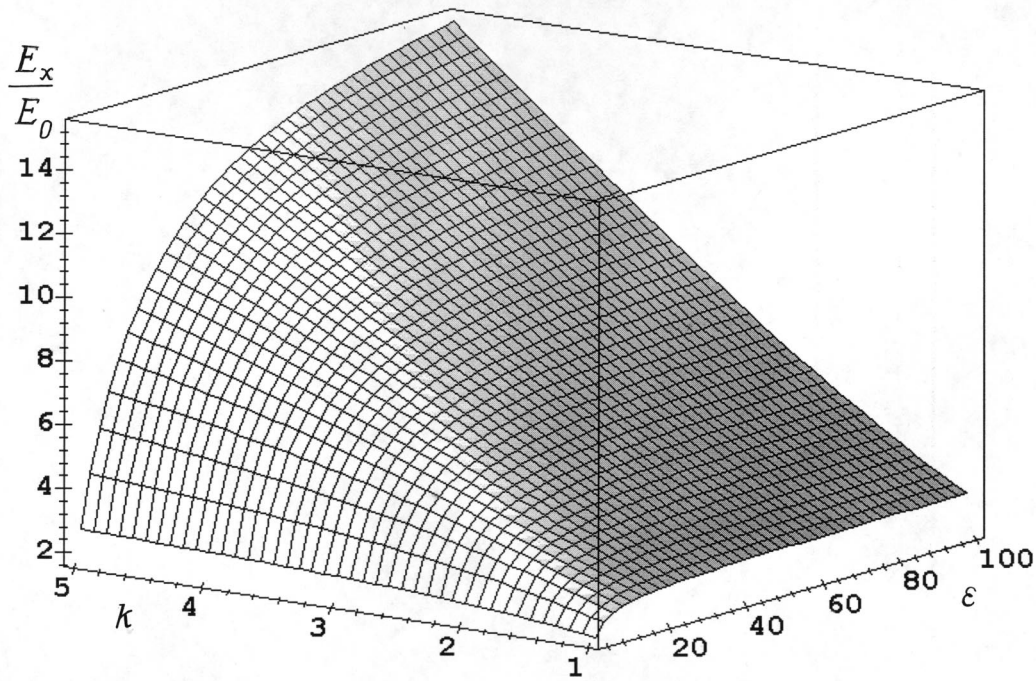


Рис. 1. Зависимость коэффициента усиления поля в окрестности вершины диэлектрического сфероида от отношения полуосей сфероида и диэлектрической проницаемости вещества.

### Зависимость напряженности электростатического поля вблизи вершины сфероидальной капли от напряженности внешнего однородного электростатического поля и размера капли

Если в выражении (3) считать, что  $n_x$  — это коэффициент деполаризации диэлектрической капли, находящейся в равновесном состоянии, то параметр  $k$  уже нельзя считать независимым, поскольку он для равновесной

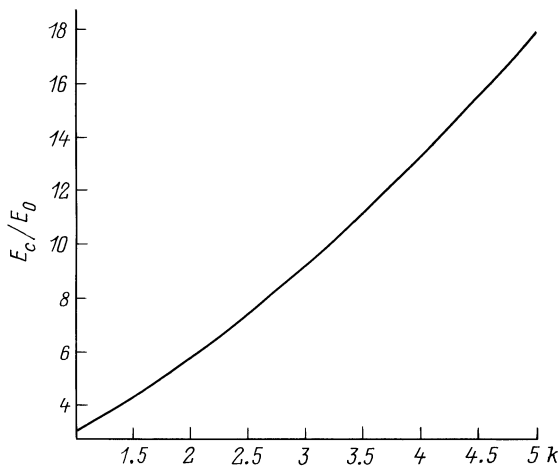


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления поля проводящей сфероидальной каплей от отношения полуосей сфероида.

сфероидальной формы капли зависит от параметра Тейлора  $W$ . Параметр  $W$  характеризует устойчивость капли по отношению к поляризационному заряду и является функцией напряженности внешнего электростатического поля  $E_0$ , радиуса  $R$  и коэффициента поверхностного натяжения жидкости капли  $\sigma$  [10]

$$W = \frac{4\pi\epsilon_0 E^2 R}{\sigma}. \quad (6)$$

Зависимость  $k = k(W)$  для равновесного состояния капли в электростатическом поле определяется условиями минимальности полной потенциальной энергии капли

$$\frac{\partial U}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial k^2} \geq 0. \quad (7), (8)$$

Полной потенциальной энергией капли в данном случае можно считать сумму энергии сил поверхностного натяжения и электростатической энергии капли в поле  $E_0$ . Обезразмерив потенциальную энергию сфероидальной капли и относя ее к энергии капли сферической, получим

$$U \equiv U_\sigma + U_e = \left\{ 2\pi \left[ \frac{1}{k^{2/3}} + \frac{k^{4/3} \arctg(\sqrt{k^2 - 1})}{\sqrt{k^2 - 1}} \right] - \frac{W(\epsilon - 1)}{6[1 + (\epsilon - 1)n_x]} \right\} \times \left[ 4\pi - \frac{W(\epsilon - 1)}{2(2 + \epsilon)} \right]^{-1}. \quad (9)$$

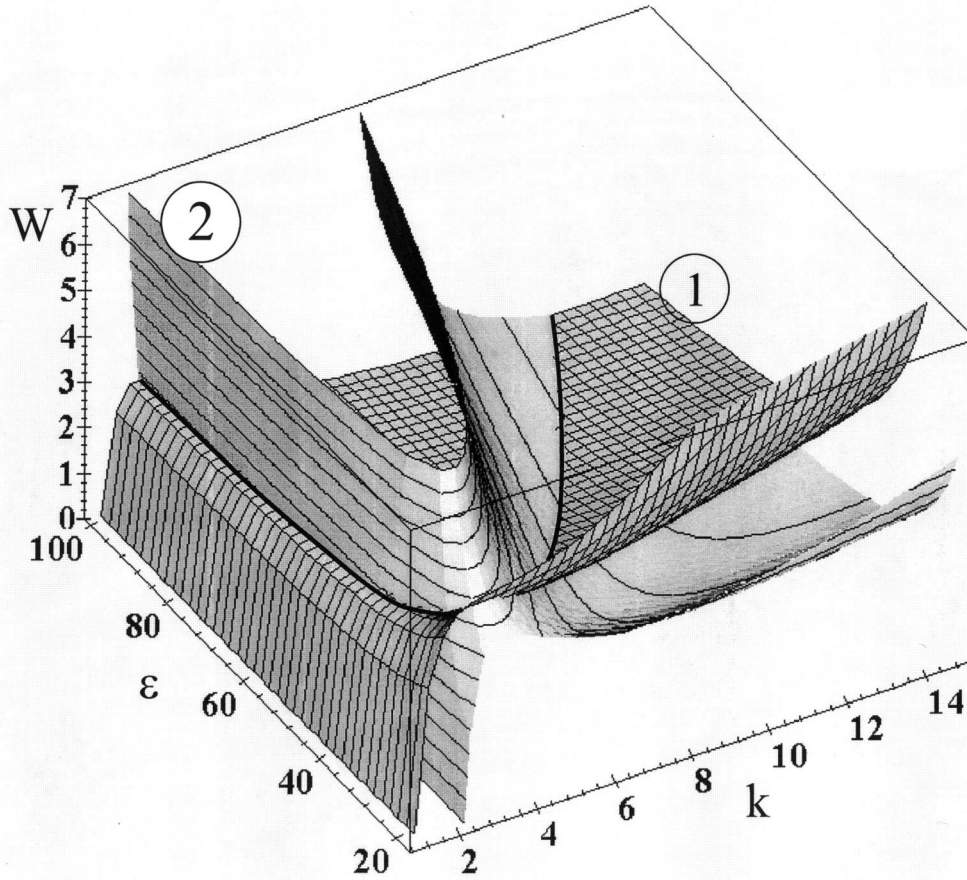


Рис. 3. Зависимость параметра Тейлора от отношения полуосей сфероиды и диэлектрической проницаемости.

Подставляя (9) в (7) и аналитически решая получившееся уравнение относительно  $W$ , получим

$$W = 2\pi \left[ \frac{2}{3}k^{-5/3} - \frac{4}{3} \frac{k^{1/3}C}{A} - \frac{k^{1/3}}{A^2} + \frac{k^{7/3}C}{A^3} \right] \times [3kA - (2k^2 + 1)B]^{-1} \frac{D^2}{A},$$

$$A = \sqrt{k^2 - 1}, \quad B = \ln(k + \sqrt{k^2 - 1}),$$

$$C = \arctg(\sqrt{k^2 - 1}),$$

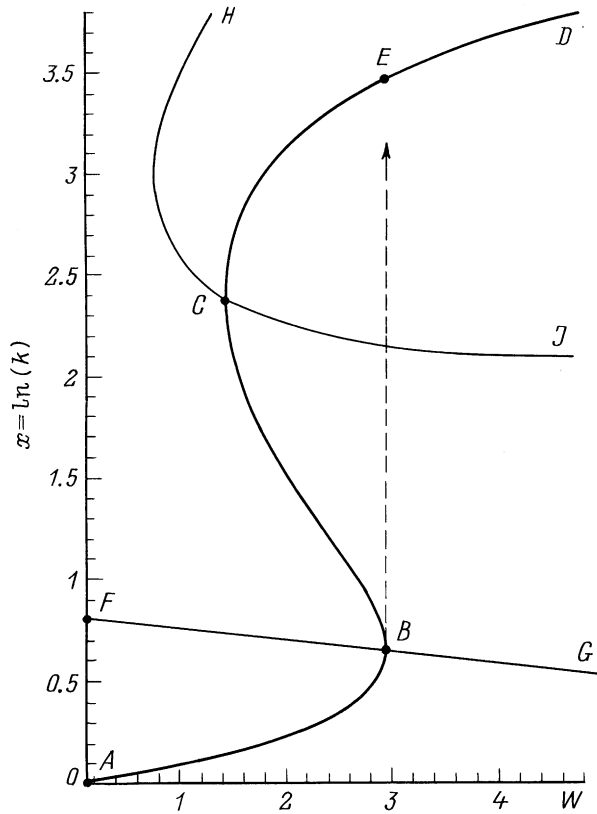
$$D = (k^2 - \varepsilon) \sqrt{k^2 - 1} (\varepsilon - 1)^{-1} + k \ln(k + \sqrt{k^2 - 1}). \quad (10)$$

После аналогичных преобразований выражения (8) найдем

$$W = 2\pi k^{1/3} \left( \frac{10}{9}k^{-3} + \frac{4}{9} \frac{C}{A}k^{-1} + \frac{5}{3} \frac{k^{-3}}{A^2} - \frac{11}{3} \frac{kC}{A^3} - 3 \frac{k}{A^4} + 3 \frac{k^3C}{A^5} \right) D^2 \left\{ \frac{(2k^2 + 1)Bk}{A} - 3A^2 + 4kAB - 4k^2 + 1 + 2A[3kA - (2k^2 + 1)B] \left( \frac{3kA}{\varepsilon - 1} + B \right) D^{-1} \right\}^{-1}. \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) трансцендентны по  $k$ . Кроме того, как видно из графиков зависимостей (10), (11) (поверхности 1 и 2 на рис. 3 соответственно), обратная зависимость  $k = k(W)$  неоднозначна и становится однозначной лишь при  $\varepsilon < 20.8$ , когда зависимость (10) становится монотонно возрастающей. Поверхность 1 соответствует экстремальным значениям энергии сфероидально деформированной капли, поверхность 2 определяет положение нулей второй производной от энергии капли по величине сфероидальной деформации. Равновесным состояниям капли соответствует геометрическое место точек поверхности 1, лежащее снаружи поверхности 2.

Результаты расчетов по уравнениям (10) и (11) для капель воды ( $\varepsilon = 81$ ) приведены на рис. 4. Кривая AD на этом рисунке соответствует решению уравнения (7) и определяет совокупность точек  $(k, W)$ , в которых полная потенциальная энергия сфероидально деформированной капли принимает экстремальные значения. Кривые FG и HJ на этом рисунке соответствуют решению уравнения (8) и определяют границы областей знакопостоянства второй производной полной потенциальной энергии капли  $U$  по величине сфероидальной деформации  $k$ . Ниже кривой FG и выше кривой HJ расположено множество точек, где  $\partial^2 U / \partial k^2 > 0$ , в области между кривыми FG и



**Рис. 4.** Зависимость логарифма отношения полуосей сфероидальной капли воды  $x = \ln k$  от параметра Тейлора  $W$ , определяемые выражениями (7) и (8).

НЖ  $\partial^2 U / \partial k^2 < 0$ , следовательно, участки АВ и CD кривой CD соответствуют состояниям капли с минимальной потенциальной энергией, а участок ВС соответствует локальным максимумам потенциальной энергии капли при ее сфероидальной деформации. Наличие такого "потенциального барьера" препятствует самопроизвольному удлинению и разрушению капли при значениях параметра Тейлора  $W < W_*$ . При  $W = W_*$  в силу непрерывности зависимости потенциальной энергии от величины сфероидальной деформации высота потенциального барьера равна нулю, поэтому капля при достижении этого состояния начинает самопроизвольно удлиняться, причем амплитуда сфероидальной деформации нарастает со временем гораздо быстрее, чем по экспоненциальному закону [11]. Пользуясь общепринятой терминологией, состояния, соответствующие участку графика АВ, назовем докритическими, значения параметра Тейлора  $W = W_*$  — критическими, а состояния, соответствующие участку графика CD, — закритическими.

Для жидкостей с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon > 20.8$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  можно предложить следующую схему расчета напряженности поля вблизи вершины сфероидальной капли радиуса  $R$ , находящейся в равновесном состоянии во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0$ : 1) исходя

из известного значения  $\varepsilon$  путем совместного численного решения уравнений (7), (8) необходимо найти критическое значение параметра Тейлора  $W_*$ ; 2) исходя из конкретных характеристик капли и поля  $\sigma$ ,  $R$ ,  $E_0$ , по (6) следует найти соответствующее текущее значение  $W$ ; 3) если значение параметра Тейлора, найденного на предыдущем шаге  $W < W_*$ , путем численного решения уравнения (7) необходимо найти  $k$  для равновесного состояния капли; 4) наконец, по (4) можно найти  $E_x$ .

Для уменьшения объема численных расчетов целесообразно найти аналитические выражения, с достаточной точностью аппроксимирующие зависимости  $W_* = W_*(\varepsilon)$  и  $k = k(\varepsilon, W)$ .

В диапазоне изменения  $\varepsilon$  от 20.8 до  $\infty$  выражение

$$W_* = \frac{101 + 26.6\varepsilon + 0.308\varepsilon^2}{-60.8 + 9.05\varepsilon + 0.12\varepsilon^2} \quad (12)$$

дает вполне достаточную для большинства практических расчетов точность представления, определяющуюся третьей значащей цифрой.

Поскольку аппроксимация функции двух переменных представляет весьма сложную задачу, была найдена аппроксимация зависимости  $k = k(W)$  для  $\varepsilon = 81$ . В диапазоне докритических значений параметра Тейлора полученная аппроксимация имеет вид

$$k = \frac{4.08 - 1.85W + 0.1658W^2}{4.08 - 2.167W + 0.2693W^2}. \quad (13)$$

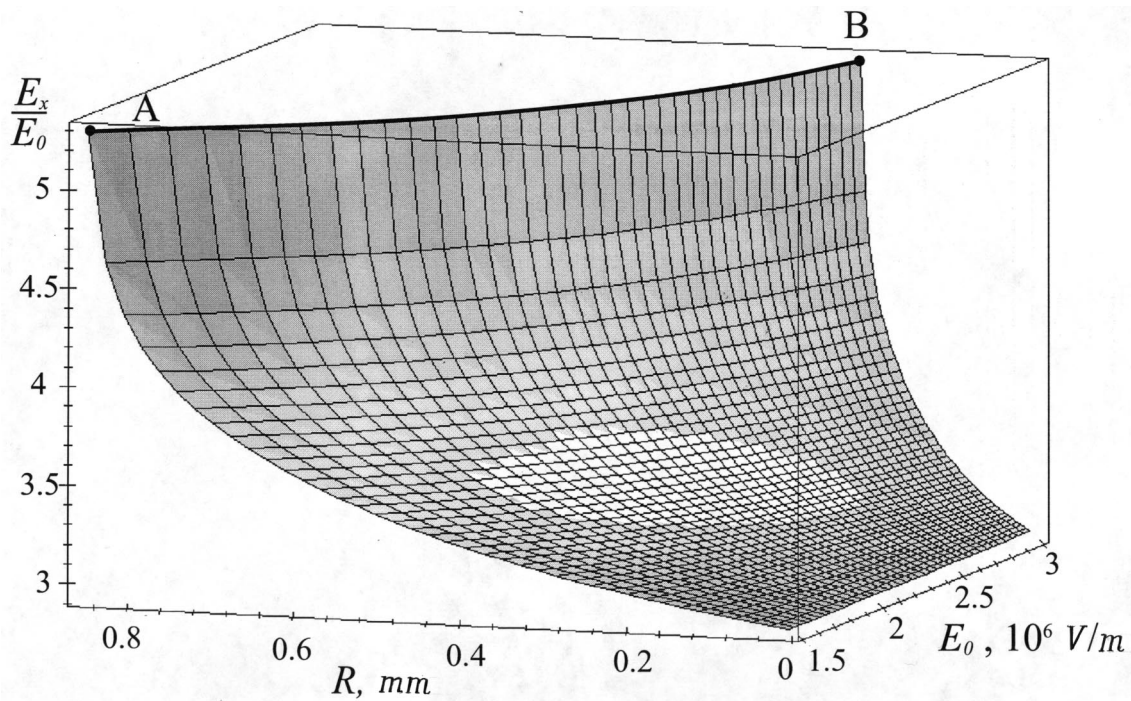
Точность представления (13) также определяется третьей значащей цифрой.

Найденные аппроксимирующие выражения позволили получить зависимость напряженности электростатического поля у вершины сфероидальной капли воды, находящейся в равновесном состоянии во внешнем электростатическом поле  $E_0$ , от величины напряженности этого поля  $E_0$  и радиуса равновеликой сферической капли  $R$ . График полученной зависимости приведен на рис. 5. Кривая АВ на этом графике соответствует критическим состояниям капли.

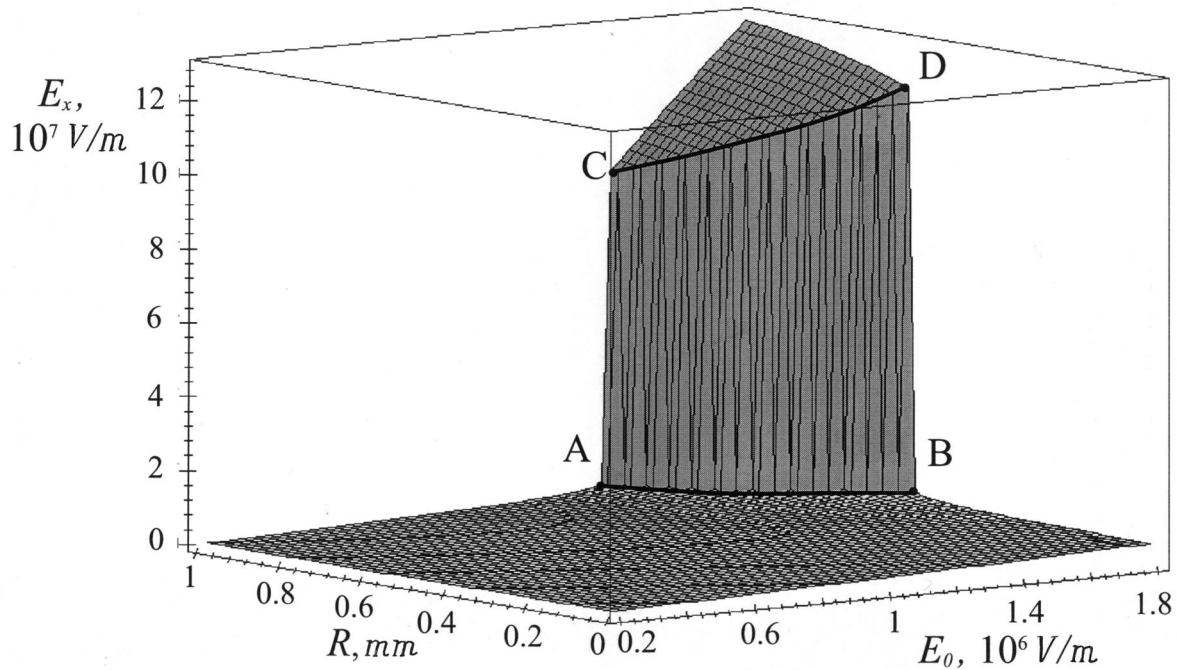
Если принять, что при увеличении напряженности внешнего поля капля, достигнув критического состояния, начинает удлиняться и переходит в закритическое равновесное сфероидальное состояние (рис. 4), то, интерполируя результаты численных расчетов зависимости  $k = k(W)$  для закритических состояний функцией

$$k = -0.676W^2 + 12.14W + 2.33, \quad (14)$$

можно получить зависимость, приведенную на рис. 6. Экспериментальные данные показывают, что закритические сфероидальные состояния капли не являются стабильными, более того, наблюдается разрушение капли до достижения закритического равновесного сфероидального состояния. Однако резкое увеличение напряженности поля у вершины сфероидальной капли, переходящей из докритического состояния в закритическое, вполне



**Рис. 5.** Зависимость коэффициента усиления электростатического поля у вершины сфероидальной капли, находящейся в докритическом равновесном состоянии, от радиуса равновеликой сферической капли и напряженности внешнего электростатического поля.



**Рис. 6.** Зависимость напряженности электростатического поля у вершины сфероидальной капли от радиуса равновеликой сферической капли и напряженности внешнего электростатического поля. Скачкообразное возрастание напряженности поля (переход от линии АВ к CD) соответствует переходу из докритического равновесного состояния в закритическое.

может предшествовать разрушению капли. Сказанное относится и к эмиссионным выступам, образующимся на плоской поверхности жидкости при реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, и может лежать в основе физического механизма ”катодного пятна”, как это отмечалось в [12–14].

## Заключение

Коэффициент усиления внешнего однородного электростатического поля  $E_0$  в окрестности вершины сфероидальной жесткой частицы определяется степенью сфероидальности (эксцентриситетом) и диэлектрической проницаемостью вещества частицы, но не зависит от геометрического размера частицы. Коэффициент усиления внешнего однородного электростатического поля в окрестности вершины капли, принимающей в поле  $E_0$  сфероидальную форму, зависит от характеристик вещества капли (диэлектрической проницаемости, коэффициента поверхностного натяжения), от размера капли, а также от напряженности внешнего поля. При потере каплей устойчивости по отношению к поляризационному заряду ее эксцентриситет весьма быстро (быстрее, чем по экспоненциальному закону) растет со временем, что приводит к столь же быстрому росту коэффициента усиления поля у ее вершины вплоть до разрыва капли или начала сброса поляризационного заряда.

## Список литературы

- [1] *Ахвледиани Я.Р.* // Физика облаков. Труды института геофизики АН ГССР. Тбилиси: Мицниереба, 1975. Т. 36. С. 53–57.
- [2] *Лушников А.А., Негин А.Е., Пахомов А.В., Смирнов Б.М.* // УФН. 1991 Т. 161. № 2. С. 113–124.
- [3] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [4] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // Phys. Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 632–641.
- [6] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [7] *Золотой Н.Б.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 11. С. 159–163.
- [8] *Золотой Н.Б., Карпов Г.В.* // ДАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 336–338.
- [9] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [10] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.
- [11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
- [12] *Фурсей Г.Н., Воронцов-Вельяминов П.Н.* // ЖТФ. 1967. Т. 37. Вып. 10. С. 1880–1887.
- [13] *Стаханов И.П., Фикс М.М., Филькин Д.Г.* // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 7. С. 1373–1380.
- [14] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 3. С. 3–22.