01;03

# Устойчивость во внешнем электростатическом поле пузыря в диэлектрической жидкости

© А.И. Григорьев, А.Н. Жаров, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 29 апреля 1998 г.)

Найдены критические условия неустойчивости во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью $\mathbf{E}_0$ газового пузырька в жидком диэлектрике. Показано, что они зависят как от величины $\mathbf{E}_0$ и свойств жидкости, так и от давления газа в пузыре. В линейном приближении по квадрату эксцентриситета равновесной сфероидальной формы равновесный эксцентриситет пузыря превышает равновесный эксцентриситет капли в поле $\mathbf{E}_0$. Наличие газового давления в пузыре приводит к снижению критической для реализации неустойчивости пузыря напряженности поля $\mathbf{E}_0$.

**1.** Задача о неустойчивости газового пузыря в однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$ представляет интерес в связи с изучением электрического пробоя жидких диэлектриков, поскольку в момент пробоя у катода образуется область пониженной плотности среды, которая расценивается как появление газового (парового) микропузырька [1,2]. Несмотря на то что задача о неустойчивости пузыря имеет важное техническое приложение, выполнено лишь несколько исследований по изучению поведения пузырей в электрическом поле, в то время как работ, посвященных сходной проблеме неустойчивости в $\mathbf{E}_0$ жидких капель, выполнено много [3].

Классической работой по описанию состояний жидкой капли во внешнем электростатическом поле, результаты которой могут быть использованы при изучении пузырей с учетом проводимостей среды и капли, является [4]. В [4] на основе предположения о сфероидальной равновесной в $\mathbf{E}_0$ форме капли и принципа минимизации потенциальной энергии исследованы формы капель, имеющих конечную проводимость и диэлектрическую проницаемость, когда внешняя среда является проводящей. В [4] в зависимости от соотношения физических свойств капли и окружающей среды проанализировано несколько различных сценариев поведения капли: а) капля и среда — абсолютные диэлектрики; б) проводящая капля в диэлектрической среде; в) диэлектрическая капля в проводящей среде; г) нулевая деформация сфероидальной капли в $\mathbf{E}_0$; д) деформация капли к форме сплюснутого сфероида. За работой [4] последовали работы [5] и [6], в которых более детально исследованы отдельные ситуации, выделенные в [4].

Случай диэлектрической капли и пузыря в диэлектрической среде подробно экспериментально и теоретически исследован в работе [5], где экспериментальным путем были получены зависимости деформаций от величины $\mathbf{E}_0$ для газового пузыря в гидрокарбоновом масле и водной капли в силиконовом масле. Было выяснено, что пузырь растягивается неограниченно, а капля претерпевает неустойчивость с эмиссией большого количества дочерних капелек. Кроме того, в [5] показано, что форма капли в $\mathbf{E}_0$ может быть принята сфероидальной с достаточно хорошей точностью. На основе метода равенства давлений на полюсе и экваторе капли и метода минимизации энергии состояния было показано, что жидкие диэлектрические капли могут стать неустойчивыми, только если диэлектрическая проницаемость капли в 20 раз превосходит проницаемость окружающей жидкости. Это условие с запасом выполняется для капли хорошо проводящей жидкости (например воды) в вакууме. Этот случай был подробно теоретически исследован [6]. На основе метода баланса давлений во всех точках равновесной поверхности (в точке полюса и на линии экватора) сфероидальной идеально проводящей капли были определены зависимости величин деформации капли от напряженности внешнего электрического поля $\mathbf{E}_0$. Выяснилось, что идеально проводящая капля становится неустойчивой при определенном критическом значении напряженности поля $\mathbf{E}_0$.

Поскольку, согласно [5], газовый пузырь, помещенный в жидкий диэлектрик, является устойчивым для любого значения $\mathbf{E}_0$ (в силу того, что диэлектрическая проницаемость газов мала), то в [7] была предпринята попытка трактовки возможной неустойчивости пузыря в $\mathbf{E}_0$ на основе представлений о сжимаемости газа. На основе предположения о сфероидальности равновесной в $\mathbf{E}_0$ формы пузыря при использовании требования равенства термодинамических потенциалов системы, и на основе принципа минимизации энергии равновесного состояния в [7] исследовано поведение парового пузыря в диэлектрической жидкости. Результаты упомянутых теоретических и экспериментальных исследований были подтверждены численными расчетами работы [8].

В [8] на основе численных решений уравнений электродинамики и гидродинамики получены формы жидких капель при различных значениях отношения проводимостей $\lambda$ и диэлектрических проницаемостей $\alpha$ капли и окружающей среды; определены области значений $\lambda$ и $\alpha$, в которых возможны различные типы неустойчивостей. В [8] выделены два типа неустойчивости: стекание с острых концов родительской капли мелких дочерних капелек и деление капли на две. Для каждой пары значений $\lambda$ и $\alpha$ определен возможный тип неустойчивости. Неустойчивость, оканчивающаяся сбросом мелких капель, наблюдалась для диэлектрических жидкостей в случае, если проницаемость жидкости капли в 19–21 раз превосходила проницаемость окружающей среды или в случае проводящих жидкостей, если проводимость капли была в 28–29 (значение приведено для жидкостей с одинаковыми диэлектрическими проницаемостями) раз больше, чем проводимость среды. Выяснилось также, что неустойчивость, связанная с разрывом капли на две части, возможна только для проводящих жидкостей.

Из анализа вышеупомянутых работ следует, что пузырь, отличающийся от капли в основном наличием газового давления и величиной коэффициента сжимаемости, может стать неустойчивым только в случае хорошей проводимости заполняющего его газа или стенок пузыря. Если пузырь находится в абсолютном диэлектрике, он может претерпеть неустойчивость, только если газ в пузыре является хорошо проводящим, что может быть связано, например, с его ионизацией. Если газовый пузырь находится в жидкости, обладающей хотя бы слабой проводимостью, то возможно оседание на стенках пузыря носителей заряда из жидкости. В этом случае хорошая проводимость может быть связана с высокой поверхностной подвижностью носителей заряда по сравнению с объемной. В нижеследующем изложении для выяснения условий устойчивости пузыря в жидкости мы ограничимся рассмотрением идеализированной модели пузыря с идеально проводящими стенками в абсолютном диэлектрике.

**2.** Примем, что жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ имеет свободную поверхность, находящуюся под действием атмосферного давления $P_{\mathrm{at}}$. Рассмотрим изначально сферический пузырь радиуса $R_0$ с идеально проводящей поверхностью в диэлектрике. Будем считать, что пузырь неподвижен, т.е. сила Архимеда уравновешена либо инерционной силой (что может быть в ротационной установке [5]), либо это может быть сила, возникающая за счет разности температур между верхними слоями жидкости и нижними [9]. Для равновесного сферического пузыря должно выпоняться условие баланса давлений на его стенках

$$P_0 = P_{\mathrm{at}} + 2\sigma/R_0, \tag{1}$$

$\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения границы раздела фаз, $P_0$ — давление газа в пузыре.

После создания в диэлектрике электрического поля $\mathbf{E}_0$ пузырь вытянется вдоль $\mathbf{E}_0$, принимая форму, близкую к сфероиду вращения [5–7], уравнение которого в сферической системе координат с началом в центре капли имеет вид

$$F(r,\Theta) = r - R\frac{(1-e^2)^{1/2}}{(1-e^2\cos^2\Theta)^{1/2}} \equiv r - R\eta(\Theta).$$

Зададимся вопросом, изменяется ли давление, температура и объем газа в пузыре при вытягивании. Примем, что скорость растворения газа, заполняющего пузырь, в диэлектрике настолько мала, что его массу во время деформации в поле $\mathbf{E}_0$ можно считать постоянной. С молекулярной точки зрения давление газа на границу пузыря определяется только концентрацией частиц газа $n$ и его температурой $T$

$$P = nkT,$$

$k$ — константа Больцмана.

Рассмотрим условия равновесия точек на линии экватора. Поскольку давление электрического поля для этих точек равно нулю, то условие равновесия легко записывается

$$P = P_{\mathrm{at}} + 2\sigma H, \tag{2}$$

где $H$ — гауссова кривизна в этой точке

$$2H = \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}F(r,\Theta)}{|\operatorname{grad}F(r,\Theta)|}\right). \tag{3}$$

Для точки, расположенной на экваторе, гауссова кривизна в линейном приближении по $e^2$ дается выражением [10]

$$H = \frac{1}{R_0}\left(1 - \frac{e^2}{3}\right). \tag{3a}$$

Предположим теперь, что напряженность электрического поля увеличилась на бесконечно малую величину, что повлекло за собой бесконечно малое увеличение эксцентриситета пузыря. Из (3 $a$) следует, что для сфероидального пузыря $H < 1/R_0$, тогда, сравнивая (1) и (2), несложно видеть, что $P < P_0$, т.е. давление газа в пузыре уменьшается. С молекулярной точки зрения уменьшение давления возможно либо за счет увеличения объема, либо за счет уменьшения температуры. Поскольку полная теплоемкость газа в пузыре много меньше теплоемкости всего жидкого диэлектрика, то естественно считать, что процесс деформации пузыря в поле $\mathbf{E}_0$ изотермический и температура газа не меняется. Таким образом, пузырь, имеющий хорошо проводящие стенки, под действием внешнего электрического поля не только вытягивается в сфероид вращения в направлении $\mathbf{E}_0$, но и увеличивает свой объем.

В процессе изменения формы и объема пузыря происходит изменение энергии системы, которую в данных условиях нужно рассматривать как функцию радиуса равновеликого сферического пузыря $R$ (объема пузыря) и квадрата эксцентриситета $e^2$. Потенциальная энергия пузыря определяется суммой поверхностной и электрической энергии, плюс работа, совершенная над системой внешними силами при расширении пузыря. Энергия сил поверхностного натяжения определится выражением [10]

$$U_\sigma = 2\pi\sigma R^2(1-e^2)^{1/6}\left((1-e^2)^{1/2} + \frac{\arcsin e}{e}\right). \tag{4}$$

Электрическая энергия для пузыря, вытянутого в направлении внешнего поля $\mathbf{E}_0$, имеет вид [10]

$$U_E = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon E_0^2 R^3}{3}\frac{e^3}{(1-e^2)(\mathrm{arth}e - e)}. \quad (5)$$

Изменение внутренней энергии системы в результате совершения работы при изотермическом расширении газа известно [11,12]

$$U_g = -NkT \ln\frac{V}{V_0} + P_{\mathrm{at}}(V - V_0), \quad (6)$$

где $N$ — число молекул газа в пузыре, $V_0$ — начальный объем пузыря.

Изменение энергии системы в процессе вытягивания с учетом выражения (6) и разложения выражений (4) и (5) в ряд по квадрату эксцентриситета запишется в виде

$$\Delta U = 4\pi\sigma R^2\left(1 + \frac{2}{45}e^4\right) - \frac{\varepsilon E_0^2 R^3}{2}\left(1 + \frac{2}{5}e^2 + \frac{58}{175}e^4\right)$$

$$- NkT\ln\frac{V}{V_0} + P_{\mathrm{at}}(V - V_0) - 4\pi\sigma R_0^2 + \frac{\varepsilon E_0^2 R_0^3}{2}. \quad (7)$$

Приравнивая нулю производные от изменения энергии (7) по квадрату эксцентриситета $e^2$ и по радиусу пузыря $R$, получим систему двух уравнений для неизвестных величин $e^2$ и $R$, соответствующих равновесной сфероидальной форме пузыря [13],

$$e^2 = 9\frac{\varepsilon E_0^2 R}{16\sigma\pi} \equiv \frac{9}{16\pi}w,$$

$$1 - 3\frac{\varepsilon E_0^2 R}{16\sigma\pi} - (P - P_{\mathrm{at}})R/2\sigma \equiv \beta - 1 + \frac{3}{16\pi}w = 0, \quad (8)$$

где $w = (\varepsilon E_0^2 R)/\sigma$; $\beta = \{(P - P_{\mathrm{at}})R\}/2\sigma$.

Таким образом, в отличие от капли, равновесный эксцентриситет которой зависит только от $w$ [4,10], устойчивое состояние пузыря определяется двумя уравнениями, что связано с непостоянством объема пузыря при его деформации в поле $\mathbf{E}_0$.

**3**. Проанализируем систему уравнений (8), считая, что в процессе деформации объем пузыря увеличивается таким образом, что радиус равновеликого сферического пузыря увеличивается в $(K + 1)$ раз,

$$R = R_0(1 + K). \quad (9)$$

Воспользовавшись условием изотермичности и равенством (9), выразим конечное давление газа в пузыре через начальное

$$P = \frac{P_0}{(1 + K)^3}. \quad (10)$$

Учтем, что начальное давление в пузыре превосходит атмосферное в $\mu$ раз, т.е.

$$P_0 = \mu P_{\mathrm{at}}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (1), найдем $\mu$

$$\mu = 1 + \frac{2\sigma}{P_{\mathrm{at}} R_0}. \quad (12)$$

С учетом (9), (10) и (11) второе уравнение системы (8) приведем к виду

$$1 - \frac{e^2}{3} - \left(\frac{\mu}{(1+K)^3} - 1\right)\frac{P_{\mathrm{at}} R_0}{2\sigma}(1 + K) = 0. \quad (13)$$

Воспользовавшись соотношением (12), перепишем (13)

$$1 - \frac{e^2}{3} - \left(\frac{\mu}{(1+K)^3} - 1\right)\frac{1}{\mu - 1}(1 + K) = 0. \quad (14)$$

Считая величину относительного увеличения радиуса $K$ малой, в линейном приближении по $K$ и по $e^2$ из (14) получим

$$K = \frac{\mu - 1}{2\mu + 1}\frac{e^2}{3}, \quad (15)$$

т.е. $K$ является величиной того же порядка малости, что и $e^2$. Подставляя (9) в первое уравнение системы (8) с учетом (15), получаем выражение для квадрата равновесного эксцентриситета пузыря

$$e^2 = \frac{9w}{16\pi}\left(1 + \frac{9w}{48\pi}\frac{\mu - 1}{2\mu + 1}\right), \quad (16)$$

где $w = (\varepsilon E_0^2 R_0)/\sigma$ — параметр Тейлора для пузыря.

Из (16) следует, что учет газового давления в пузыре приводит к появлению зависимости его равновесного эксцентриситета от начального давления газа. В связи с этим интересно рассмотреть влияние газового давления на критические условия неустойчивости газового пузыря в электрическом поле $\mathbf{E}_0$.

**4**. Расчет проведем методом, основанным на приравнивании давлений в точке полюса и на линии экватора, подробно описанным в [6].

Из выражения (3) найдем капиллярное давление на полюсе и на экваторе сфероидального пузыря

$$P_\sigma^{eq} = \frac{\sigma(1 - e^2)^{5/6}}{R_0(1 + K)}\left(1 + \frac{1}{(1 - e^2)}\right),$$

$$P_\sigma^{p} = \frac{2\sigma}{R_0(1 + K)(1 - e^2)^{2/3}}. \quad (17)$$

Используя выражение для напряженности электростатического поля у поверхности сфероидального пузыря [14]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\frac{e^3}{(1 - e^2)^{1/2}(\mathrm{arth}e - e)}\frac{\eta(\Theta)\cos\Theta}{\left(1 - e^2\eta^2(\Theta)\cos^2\Theta\right)^{1/2}},$$

легко найти выражения для давления электрического поля в том же геометрическом месте точек пузыря

$$P_E^{eq} = 0, \quad P_E^{p} = \frac{\varepsilon E_0^2 e^6}{8\pi(1-e^2)^2(\mathrm{arth} e - e)^2}. \tag{18}$$

Учитывая (18), (17) и (10) запишем условия равенства давлений на экваторе и полюсе

$$\frac{\mu P_{\mathrm{at}}}{(1+K)^3} - \frac{\sigma(1-e^2)^{5/6}}{R_0(1+K)}\left(1+\frac{1}{(1-e^2)}\right) - P_{\mathrm{at}} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\mu P_{\mathrm{at}}}{(1+K)^3} + \frac{\varepsilon E_0^2 e^6}{8\pi(1-e^2)^2(\mathrm{arth} e - e)^2} - \frac{2\sigma}{R_0(1+K)(1-e^2)^{2/3}} - P_{\mathrm{at}} = 0. \tag{20}$$

Вычитая (19) из (20) и воспользовавшись (12), получаем систему уравнений относительно неизвестных $K$ и $e^2$, из которой могут быть найдены критические условия неустойчивости для незаряженного пузыря с хорошо проводящими стенками во внешнем однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$:

$$\frac{we^6}{16\pi(1-e^2)^2\big(\mathrm{arth}(e)-e\big)^2} = \frac{1}{(1+K)} \times \left\{\frac{1}{(1-e^2)^{2/3}} - \frac{(1-e^2)^{5/6}}{2}\left[1+\frac{1}{(1-e^2)}\right]\right\}, \tag{21}$$

$$\mu - (1+K)^3 - \frac{(\mu-1)(1+K)^2(1-e^2)^{5/6}}{2} \times \left[1+(1-e^2)^{-1}\right] = 0. \tag{22}$$

Уравнения (21) и (22) при заданном параметре $\mu$ определяют зависимости квадрата эксцентриситета пузыря $e^2$ и относительного изменения его радиуса $K$ от величины параметра Тейлора $w$.

Для анализа системы уравнений (21), (22) были проведены численные расчеты и построены зависимости величины квадрата эксцентриситета пузыря $e^2$ и величины $K$ от параметра Тейлора $w$ для различных значений $\mu$. Эти зависимости приведены на рис. 1, $a$ и $b$. Видно, что увеличение начального внутреннего давления в пузыре при фиксированном значении $w$ приводит к увеличению равновесного эксцентриситета пузыря. Также видно, что в некоторой точке, соответствующей максимальному значению $w$, производная $\partial e^2/\partial w$ становится бесконечной. Согласно [5,6], при достижении параметром Тейлора этого критического значения $w = w_*$ пузырь становится неустойчивым. Таким образом, система уравнений (21) и (22) при заданном $\mu$ имеет единственное решение, отвечающее критическому значению параметра Тейлора $w_*$, разделяющему устойчивые и неустойчивые состояния пузыря.

Зависимости критического значения параметра Тейлора $w_*$ и критического значения квадрата эксцентриситета

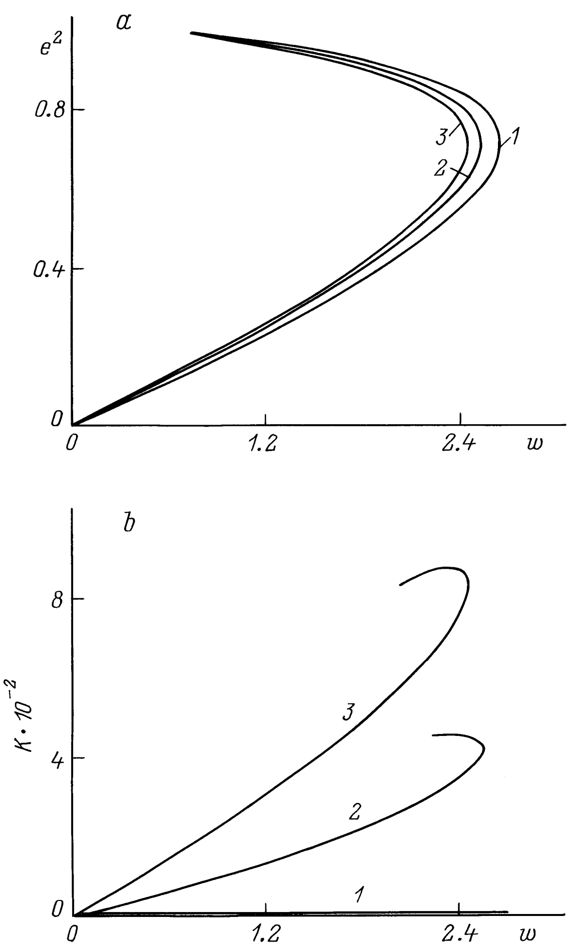


**Рис. 1.** Зависимости квадрата эксцентриситета пузыря ($a$) и относительного изменения радиуса пузыря ($b$) от параметра Тейлора при $\mu = 1.1$ (*1*), 2 (*2*), 5 (*3*).

пузыря $e_*^2$ от параметра $\mu$, характеризующего давление в пузыре до вытягивания, представлены на рис. 2, $a$ и $b$. Видно, что увеличение начального давления газа $\mu$ приводит к заметному уменьшению критического значения параметра Тейлора $w_*$, но весьма незначительно влияет на критическое значение квадрата эксцентриситета пузыря $e_*^2$.

На рис. 2, b приведены также зависимости величин $\gamma_* = P_*/P_{\mathrm{at}}$ и $\beta_* = (P_* - P_{\mathrm{at}})R_0/(2\sigma)$ в момент неустойчивости от параметра $\mu$, характеризующего начальное давление в пузыре.

**5**. Выясним, как влияет величина сжимаемости газа $\chi$ на критическое значение параметра Тейлора и на равновесное значение квадрата эксцентриситета пузыря. Будем считать, что давление газа в пузыре определяется вместо уравнения (10), справедливого только для идеального газа, уравнением

$$P = P_0 - \frac{1}{\chi}\left((1+K)^3 - 1\right). \tag{23}$$

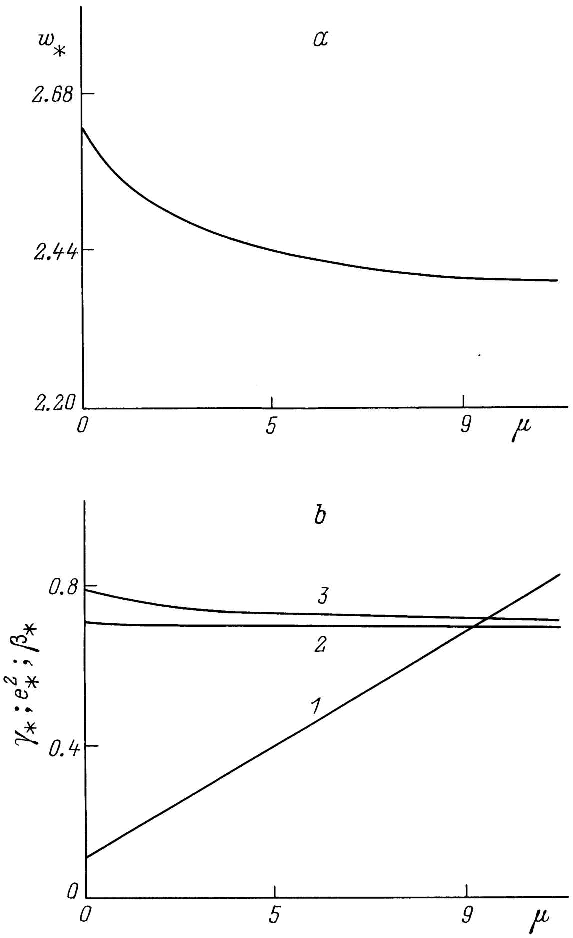


**Рис. 2.** Зависимость критического значения параметра Тейлора от безразмерного начального давления газа в пузыре ($a$), а также зависимости критических значений безразмерного давления газа (*1*), квадрата эксцентриситета (*2*), параметра $\beta_*$ (*3*) от безразмерного начального давления газа в пузыре ($b$).

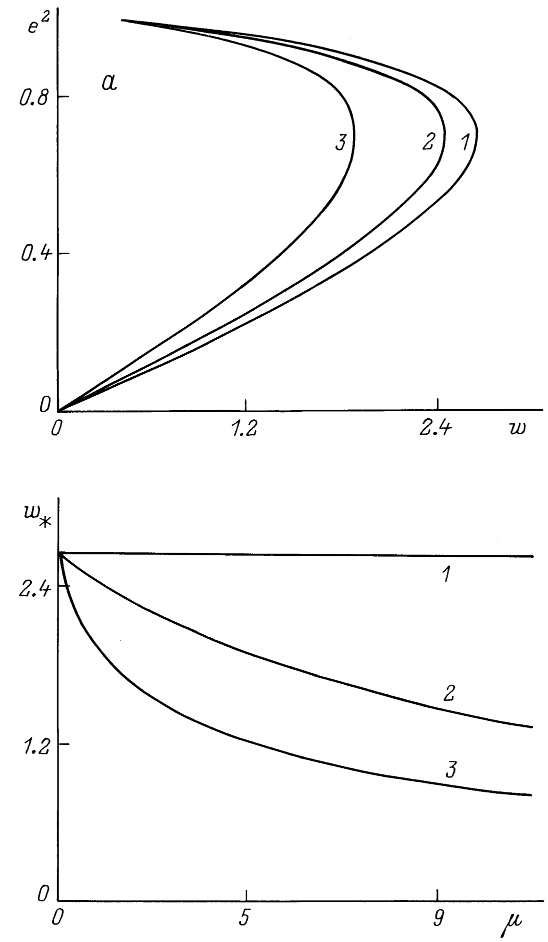


**Рис. 3.** Зависимости квадрата эксцентриситета от параметра Тейлора при $\mu = 2$ ($a$) и критического значения параметра Тейлора от безразмерного начального давления в пузыре ($b$): *1* — капля жидкости при $\chi P_{\mathrm{at}} = 10^{-4}$; *2, 3* — газовый пузырь при $\chi P_{\mathrm{at}} = 1$ и 4 соответственно.

Выбирая различные значения $\chi$, можно получить различные частные случаи жидкой капли $\chi = 10^{-4}\,\mathrm{atm}^{-1}$, пузыря реального газа $\chi = 1\,\mathrm{atm}^{-1}$, пузыря идеального газа $\chi = (1+K)^3/P_0$.

Если провести расчет, подобный расчету в разделе 4, с использованием выражения (23), то получим два уравнения для определения зависимостей величин $K$ и $e^2$ от параметра Тейлора $w$. Первое уравнение опять имеет вид (21), а вместо (22) получаем

$$\left[\mu - 1 + \frac{1}{\chi P_{\mathrm{at}}}\right](1+K) - \frac{(1+K)^4}{\chi P_{\mathrm{at}}} - \frac{(\mu-1)(1-e^2)^{5/6}}{2}\left[1 + \frac{1}{(1-e^2)}\right] = 0. \qquad (24)$$

Уравнение (24) — для идеального газа, т. е. при $\chi = (1+K)^3/\mu\ P_{\mathrm{at}}$ переходит в (22).

Расчеты по уравнениям (24) и (21) представлены на рис. 3, $a, b$. Из рис. 3, $a$ видно, что увеличение коэффициента изотермической сжимаемости $\chi$ при фиксированном параметре Тейлора $w$ и начальном газовом давлении $\mu$ приводит к увеличению квадрата эксцентриситета пузыря $e^2$. Зависимость квадрата эксцентриситета $e^2$ от параметра Тейлора $w$ имеет точку, в которой производная $\partial e^2/\partial w$ становится бесконечной. Это позволяет определить критическое значение параметра Тейлора $w_*$. Зависимости $w_*$ от начального давления в пузыре представлены на рис. 3, $b$. Видно, что увеличение коэффициента изотермической сжимаемости приводит к снижению $w_*$.

Отметим, что влияние коэффициента сжимаемости и внутреннего давления на величину равновесного эксцентриситета пузыря и на критическое значение параметра Тейлора $w_*$ существенно, когда начальный радиус пузыря меньше некоторого характерного $R_*$

$$R_0 \leqslant R_* = 2\sigma/P_{\mathrm{at}}.$$

## Заключение

Увеличение объема газового пузыря при его деформации в однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$ приводит к появлению зависимости критического значения параметра Тейлора $w_*$ и равновесного эксцентриситета пузыря $e^2$ от газового давления $\mu$. Увеличение начального газового давления $\mu$ приводит к уменьшению $w_*$ и увеличению $e^2$. Кроме того, величина критического значения параметра Тейлора $w_*$ и равновесного эксцентриситета пузыря $e^2$ зависят от величины изотермического коэффициента сжимаемости $\chi$.

## Список литературы


[1] *Глазков В.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В.* // ТВТ. 1991. Т. 29. № 6. С. 1095–1102.

[2] *Пылаева И.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В.* // ТВТ. 1992. Т. 30. № 2. С. 367–371.

[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 2–28.

[4] *O'Konski Ch.T., Harris F.E.* // J. Phys. Chem. 1957. Vol. 61. N 9. P. 1172–1174.

[5] *Garton C.G., Krasucki Z.* // Tranc. Faraday Soc. 1964. Vol. 60. P. 211–226.

[6] *Taylor F.R.S.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.

[7] *Cheng K.J., Chaddock J.B.* // Phys. Lett. 1984. Vol. 106 A. N 1, 2. P. 51–53.

[8] *Sherwood J.D.* // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 188. P. 133–146.

[9] *Гегузин Я.Е.* Пузыри. М.: Наука, 1985. 174 с.

[10] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.

[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.

[12] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 19. С. 60–65.

[13] *Ширяева С.О., Григорьев А.И* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 11–21.

[14] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 620 с.