

01;03

Резонансные колебания упругой мембраны на дне бассейна с тяжелой жидкостью

© В.В. Алексеев, Д.А. Индейцев, Ю.А. Мочалова

Институт проблем машиноведения РАН,
199178 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 8 апреля 1998 г.)

Исследуются резонансные моды колебаний в трехмерном канале со свободной поверхностью, заполненном тяжелой несжимаемой жидкостью, содержащем на дне упругую мембрану. Показано, что при определенных соотношениях параметров канала и включения существует кроме непрерывного спектра частот колебаний дискретный спектр, который располагается только до граничной частоты волновода. При этом формы колебаний жидкости носят локализованный характер в области включения.

Введение

Одним из главных вопросов динамической прочности упругих конструкций является существование спектра собственных частот колебаний. При совпадении частоты возбуждения с одной из собственных частот в конструкции возникают резонансные колебания, приводящие, с одной стороны, к акустическому излучению в окружающую среду, с другой стороны, к увеличению напряженного состояния конструкции. В отличие от упругих тел конечных размеров, которые всегда имеют такой спектр частот, тела, имеющие хотя бы одну границу бесконечной протяженности, могут иметь смешанный спектр (дискретный и непрерывный) при определенных параметрах имеющих механических включений [1]. Особенностью контактных задач (колебания упругих тел в жидкостях) является неоднозначность реакций со стороны жидкости на колеблющееся тело. В зависимости от частотного диапазона эта реакция может быть определена либо как инерционная, либо как диссипативная [2]. В последнем случае диссипация определяется отводом энергии колеблющегося тела на бесконечность в виде распространяющихся волн в жидкости. В настоящей работе на примере свободных колебаний упругой мембраны, закрепленной на дне канала конечной глубины, заполненного тяжелой несжимаемой жидкостью, показывается, что при определенных параметрах волновода и мембраны могут возникать локализованные формы колебаний жидкости (ловушечные моды), которые соответствуют дискретному спектру собственных частот колебаний данной механической системы. При этом непрерывная часть спектра расположена за граничной частотой волновода и соответствует расходящимся волнам по поверхности жидкости. Отмечено, что дискретный спектр расположен только до граничной частоты в отличие от известной задачи о колебании абсолютно жесткого штампа на дне канала [2].

Колебания тяжелой жидкости в канале с расположенной на дне мембраной

Рассмотрим малые колебания тяжелой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в трехмерном канале глубины H с закрепленной на дне канала упругой мембраной бесконечной протяженности, ширины $2a$. Система координат выбрана так, что плоскость x, y совпадает с дном канала, ось y направлена по длине мембраны, ось z направлена вверх и проходит через середину ширины мембраны (см. рисунок). Дно канала, кроме участка $-a \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$, является абсолютно жестким. Действующие в жидкости возмущения вызывают колебания мембраны, которые описываются функцией $W(x, y, t)$. Совместные колебания жидкости и мембраны могут приводить к образованию системы поверхностных волн, распространяющихся вдоль оси x и y .

Движение жидкости предполагается потенциальным с потенциалом скоростей $\Phi(x, y, z, t)$ и описывается линеаризованной системой уравнений

$$\Delta \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad z = H, \quad (2)$$

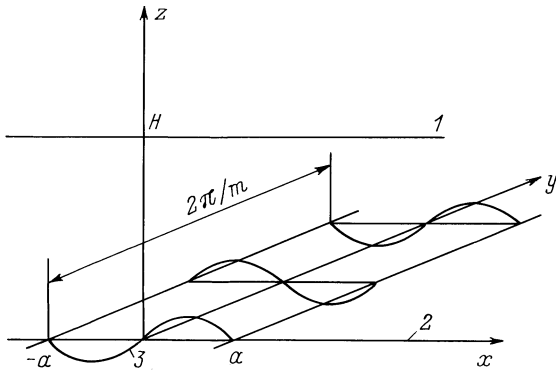
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{cases} \partial W / \partial t, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad z = 0, \quad (3)$$

где g — ускорение силы тяжести.

На дне канала действует давление

$$p|_{z=0} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho g \begin{cases} W, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (4)$$

где ρ — плотность жидкости.



Бассейн с расположенной на дне упругой мембраной, заполненный тяжелой жидкостью: 1 — свободная поверхность, 2 — дно бассейна, 3 — мембрана.

Движение мембраны с учетом (4) описывается уравнением

$$M \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \sigma W = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g W, \quad (5)$$

где M — масса мембраны на единицу площади, T — натяжение, σ — жесткость упругого основания.

Для формулировки граничного условия при $|x| \rightarrow \infty$ используется известное условие излучения [3].

Колебания жидкости и мембраны предполагаются периодическими по оси y с волновым числом m и совершающимися с частотой ω , поэтому формы колебаний жидкости и мембраны представляются в виде

$$W(x, y, t) = w(x) \exp(imy - i\omega t),$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, z) \exp(imy - i\omega t).$$

Целью настоящего исследования является нахождение условий, при которых возможно существование решения в виде нераспространяющихся по оси x волн, локализованных в области над мембраной и перемещающихся вдоль оси y . После отделения экспоненциального множителя и осуществления преобразования Фурье в системе уравнений (1)–(3) получим для определения $\varphi(x, z)$ задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} - (k^2 + m^2) \hat{\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \hat{\varphi} &= 0, \quad z = H, \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} &= -i\omega \hat{w}, \quad z = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\hat{\varphi}(k, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, z) \exp(-ikx) dx$, $\hat{w}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \times \exp(-ikx) dx$.

Решение задачи (6) имеет вид

$$\hat{\varphi}(k, z) = i\hat{w} \frac{\omega}{r} \left[\frac{gr - \omega^2 \operatorname{th} rH}{gr \operatorname{th} rH - \omega^2} \operatorname{ch} rz - \operatorname{sh} rz \right],$$

где $r^2 = k^2 + m^2$.

Осуществляя обратное преобразование Фурье величины $\hat{\varphi}(k, z)$ при $z = 0$ с использованием свойства свертки, получим

$$\varphi(x, z)|_{z=0} = i\omega \int_{-a}^a w(\xi) G(x - \xi) d\xi, \quad (7)$$

где функция $G(x)$ представляется в виде

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{gr - \omega^2 \operatorname{th} rH}{r(gr \operatorname{th} rH - \omega^2)} \exp(ikx) dk. \quad (8)$$

Из выражения для функции $G(x)$ следует дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = g\sqrt{k^2 + m^2} \operatorname{th} H\sqrt{k^2 + m^2}. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что дисперсионная кривая $\omega^2(k)$, определяющая поверхностные волны в слое, должна начинаться не с нуля, а с величины $\omega_*^2 = gm \operatorname{th} Hm$, которую назовем граничной частотой волновода. При частотах $\omega < \omega_*$ уравнение (9) не имеет вещественных корней $k(\omega)$, поэтому система поверхностных волн не будет содержать волны, распространяющиеся по оси x . Такие волны могут существовать только при $\omega > \omega_*$. Определим вид функции $G(x)$ в указанных двух случаях.

а) В случае $\omega < \omega_*$ дисперсионное соотношение (9) имеет чисто мнимые корни $\pm ik_0$ при $k_0 < m$ и $\pm ik_n$ ($n = 1, 2, \dots$) при $k_n > m$, определяемые соответственно из соотношений

$$\omega^2 = g\sqrt{m^2 - k_0^2} \operatorname{th} H\sqrt{m^2 - k_0^2},$$

$$\omega^2 = -g\sqrt{k_n^2 - m^2} \operatorname{tg} H\sqrt{k_n^2 - m^2} \quad (10)$$

и являющиеся полюсами первого порядка подынтегрального выражения в (8). Интегрирование в (8) будем осуществлять на комплексной плоскости с применением теоремы о вычетах. В результате интегрирования получим для функции $G(x)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{2\sqrt{m^2 - k_0^2} \exp(-ak_0|x_1|)}{k_0 \left(\operatorname{sh} 2H\sqrt{m^2 - k_0^2} + 2H\sqrt{m^2 - k_0^2} \right)} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{k_n^2 - m^2} \exp(-ak_n|x_1|)}{k_n \left(\sin 2H\sqrt{k_n^2 - m^2} + 2H\sqrt{k_n^2 - m^2} \right)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное выражение содержит только убывающие по x формы и не содержит волн распространяющихся по оси x . В выражении (11) и ниже используется безразмерная переменная $x_1 = x/a$. Далее индекс 1 опускается.

б) В случае $\omega > \omega_*$ дисперсионное соотношение (9) имеет вещественные корни $\pm k_0$ и чисто мнимые $\pm ik_n$ ($n = 1, 2, \dots$) при $k_n > m$, определяемые из второго

соотношения (10). При вычислении интеграла (8) используется условие излучения, состоящее в том, что при $x \rightarrow \pm\infty$ имеются только уходящие на бесконечность волны. Это осуществляется путем стандартной процедуры принципа предельного поглощения, при которой устраняются особенности на вещественной оси, даваемые корнями $\pm k_0$. В результате интегрирования (8) получим

$$G(x) = i \frac{2\sqrt{m^2 + k_0^2} \exp(iak_0|x|)}{k_0 \left(\operatorname{sh} 2H\sqrt{m^2 + k_0^2} + 2H\sqrt{m^2 + k_0^2} \right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{k_n^2 - m^2} \exp(-ak_n|x|)}{k_n \left(\sin 2H\sqrt{k_n^2 - m^2} + 2H\sqrt{k_n^2 - m^2} \right)}. \quad (12)$$

Наличие в выражении (12) экспоненты с мнимым показателем указывает на присутствие волн, распространяющихся по оси x .

В соответствии с выражением (7) уравнение (5), описывающее колебания мембраны под слоем жидкости, примет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a^2}{T}(M\omega^2 - \sigma - Tm^2 + \rho g)w = -\rho \frac{\omega^2}{T} a^3 \int_{-1}^1 w(\xi) G(x - \xi) d\xi \quad (13)$$

при граничных условиях $w(\pm 1) = 0$.

Задача определения установившихся колебаний жидкости и мембраны свелась к нахождению вещественного спектра собственных значений интегродифференциального оператора (13), где спектральным параметром является частота ω^2 . В работе [4] показано, что уравнение вида (13) может быть сведено к однородному интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Существование дискретного спектра до граничной частоты следует из известных теорем. За граничной частотой ввиду комплекснозначности функции $G(x)$ и отсутствия общей теории для несамосопряженных операторов доказательство существования вещественного дискретного спектра задачи (13) в общем случае провести невозможно.

Определение вещественного спектра собственных значений до граничной частоты

Получение аналитического решения уравнения (13) в общем виде затруднительно ввиду достаточно громоздкого выражения функции $G(x)$. Поэтому примем в дальнейшем часто используемое на практике приближение длинных вол. Будем изучать волны, распространяющиеся по оси y и имеющие длину $\lambda = 2\pi/m$, много большую глубины канала H . Примем также, что выполняется

соотношение $a/H \gg 1$. Тогда в силу малости волнового числа m их первого выражения (10) получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = g(m^2 - k_0^2)H. \quad (14)$$

Первое слагаемое в выражении (11) для функции $G(x)$ можно приближенно представить в виде

$$g_1(x) = \frac{1}{2k_0H} \exp(-ak_0|x|).$$

Второе слагаемое в (11) можно упростить, воспользовавшись следующими соображениями. Величины k_n определяются из второго соотношения (10), из которого следует неравенство $-\pi/2 + \pi n < H\sqrt{k_n^2 - m^2} < \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда, так как $a/H \gg 1$, величины ak_n , входящие в показатель экспонент, много больше единицы. Кроме того, для любого n выполняется неравенство $|\sin 2H\sqrt{k_n^2 - m^2}| \ll 2H\sqrt{k_n^2 - m^2}$. Тогда, применяя известное соотношение $\lim_{z \rightarrow \infty} z \exp(-z|x|) = 2\delta(x)$ [5] для каждого члена суммы в (11) и пренебрегая синусом в знаменателе, получим следующее приближенное выражение:

$$g_2(x) = \delta(x) \frac{2H}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(k_n H)^2}.$$

Полагая в последнем выражении $k_n H = \pi n$, получившийся в результате ряд можно просуммировать, что дает

$$g_2(x) = \delta(x) \frac{H}{3a}. \quad (15)$$

Тогда для функции $G(x)$ в приближении длинных волн будем иметь выражение

$$G(x) = \frac{1}{2k_0H} \exp(-ak_0|x|) + \delta(x) \frac{H}{3a}. \quad (16)$$

Подставив выражение (16) в уравнение (13), получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma^2 w = -A_0 \int_{-1}^1 w(\xi) \exp(-ak_0|x - \xi|) d\xi, \quad (17)$$

где введены следующие обозначения:

$$\gamma^2 = \frac{a^2}{T}(M\omega^2 - \sigma - Tm^2 + \rho g + \frac{1}{3}\rho H\omega^2),$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\rho a^3 \frac{\omega^2}{k_0 T H}.$$

Осуществляя дважды дифференцирование в уравнении (17) с учетом условий $w(\pm 1) = 0$, придем к краевой задаче

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_2 w = 0 \quad (18)$$

с граничными условиями

$$w(\pm 1) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm 1} = -A_0 \int_{-1}^1 w(\xi) \exp(-ak_0|\pm 1 - \xi|) d\xi. \quad (19)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_1 = \gamma^2 - (ak_0)^2, \quad B_2 = (ak_0)^2 \gamma^2 + \rho \omega^2 \frac{a^4}{TH}. \quad (20)$$

Уравнение (18) эквивалентно уравнению, описывающему колебания балки, поджатой с обоих концов силой B_1 , с погонной массой B_2 . Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$w(x) = C_1 \operatorname{sh} S_1 x + C_2 \operatorname{ch} S_1 x + C_3 \sin S_2 x + C_4 \cos S_2 x,$$

где

$$S_1 = \sqrt{-B_1/2 + \sqrt{B_1^2/4 + B_2}},$$

$$S_2 = \sqrt{B_1/2 + \sqrt{B_1^2/4 + B_2}}.$$

Подставляя общее решение в граничные условия (19), получим алгебраическую систему для определения коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 . Явный вид системы здесь не приводится ввиду ее громоздкости. Определитель этой системы, приравненный нулю, дает частотное уравнение для определения величины ω^2 , которое распадается на два уравнения для случаев симметричных колебаний ($C_1 = C_3 = 0$) и несимметричных колебаний ($C_2 = C_4 = 0$): а) симметричные колебания

$$\frac{ak_0 \operatorname{th} ak_0 + S_2 \operatorname{tg} S_2}{(ak_0)^2 + S_2^2} - \frac{ak_0 \operatorname{th} ak_0 - S_1 \operatorname{th} S_1}{(ak_0)^2 - S_1^2} = \frac{\exp(ak_0)}{2A_0 \operatorname{ch} ak_0} (S_1^2 + S_2^2); \quad (21)$$

б) несимметричные колебания

$$\frac{ak_0 \operatorname{cth} ak_0 - S_2 \operatorname{ctg} S_2}{(ak_0)^2 + S_2^2} - \frac{ak_0 \operatorname{cth} ak_0 - S_1 \operatorname{cth} S_1}{(ak_0)^2 - S_1^2} = \frac{\exp(ak_0)}{2A_0 \operatorname{sh} ak_0} (S_1^2 + S_2^2). \quad (22)$$

Величины S_1, S_2, k_0 в уравнениях (21), (22) являются функциями искомого параметра ω^2 посредством выражений (20) и (14). При расчете собственных частот ограничимся случаем симметричных колебаний. Представим уравнение (21) в виде

$$\operatorname{tg} S_2 = S_2^3 \frac{\exp(ak_0)}{2A_0 \operatorname{ch} ak_0} + S_2 \left[\frac{\exp(ak_0)}{2A_0 \operatorname{ch} ak_0} [S_1^2 + (ak_0)^2] + \frac{ak_0 \operatorname{th} ak_0 - S_1 \operatorname{th} S_1}{(ak_0)^2 - S_1^2} \right] + \frac{1}{S_2} \left[\frac{\exp(ak_0)}{2A_0 \operatorname{ch} ak_0} S_1^2 (ak_0)^2 + \frac{ak_0 \operatorname{th} ak_0 - S_1 \operatorname{th} S_1}{(ak_0)^2 - S_1^2} (ak_0)^2 - ak_0 \operatorname{th} ak_0 \right] = F(S_2). \quad (23)$$

Решения уравнения (23) определяются графически по точкам пересечения графиков функций $\operatorname{tg} S_2$ и $F(S_2)$. Протяженность вправо функции $F(S_2)$ ограничивается значениями S_2 , при которых нарушается условие

$$\omega^2 < \omega_*^2 = gm^2 H. \quad (24)$$

Расчеты, проведенные в широком диапазоне изменения параметров волновода и мембраны, показывают, что количество положительных корней ω^2 частотного уравнения зависит от соотношения параметров, но оно всегда ограничивается условием (24). Например, при значениях $M = 20 \text{ kg/m}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $\sigma = 10^4 \text{ N/m}^3$, $T = 10^4 \text{ kg/s}^2$ уравнение (23) дает следующие значения собственных частот. В случае $a/H = 5$ и $m = 0.1 \text{ m}^{-1}$ имеется одно решение $\omega^2/\omega_*^2 = 0.34$, при $m = 0.2 \text{ m}^{-1}$ — также одно решение $\omega^2/\omega_*^2 = 0.27$. В случае $a/H = 10$ при $m = 0.1 \text{ m}^{-1}$ есть одно решение $\omega^2/\omega_*^2 = 0.1$, а при $m = 0.2 \text{ m}^{-1}$ — два решения $\omega^2/\omega_*^2 = 0.11, 0.92$. Следует особо выделить случай, когда выполняется неравенство

$$\sigma + Tm^2 - \rho g < 0. \quad (25)$$

Расчеты показывают, что в этом случае уравнение (23) имеет только отрицательные корни ω^2 . Физически условие (25) означает, что мембрана имеет слабое натяжение T и малую жесткость упругого основания σ . Это приводит к тому, что возникший прогиб мембраны начинает неограниченно увеличиваться за счет разницы гидростатического давления, действующего на жесткое дно и прогнувшуюся поверхность мембраны. Эта разность гидростатических давлений равна величине $\rho g w(x)$ и представляется последним членом в правой части выражения (4). Это же явление можно трактовать на основе уравнения (18), описывающего колебания балки, поджатой силой B_1 . При выполнении условия (25) сила B_1 превосходит некоторое критическое значение, при котором происходит неограниченный прогиб балки (известная эйлерова неустойчивость).

На основе проделанных расчетов можно сделать вывод, что в случае $\omega^2 < \omega_*^2$ интегродифференциальный оператор (17), который является длинноволновым приближением оператора общего вида (13), имеет дискретный спектр положительных собственных значений ω^2 при выполнении условия $\sigma + Tm^2 - \rho g > 0$ и число их ограничено. Т.е. можно говорить, что в слое жидкости возможно образование поверхностных волн, локализуемых в области над мембраной и перемещающихся вдоль нее по оси y . Существование собственных частот может приводить к появлению резонансных колебаний подводных конструкций при нагружении силами гармонически изменяющимися во времени, а также, как показывает практика, к нарушению плавучести конструкции на дне водоема.

Определение вещественного спектра собственных частот за граничной частотой

Рассмотрим колебания жидкости и мембраны при $\omega^2 > \omega_*^2$. Функция $G(x)$, входящая в уравнение (13), представляется выражением (12). Сохраним допущение длинных волн, распространяющихся вдоль оси y . Структура корней k_n та же, что и в случае $\omega^2 < \omega_*^2$. По-этому для суммы, входящей в выражение (12), сохраняется приближенное выражение (15), которое было получено для случая $\omega^2 < \omega_*^2$.

Представим функцию $G(x)$ в виде

$$G(x) = iA_1 \exp(iak_0|x|) + \delta(x) \frac{H}{3a}, \quad (26)$$

где

$$A_1 = \frac{2\sqrt{k_0^2 + m^2}}{k_0 \left(\operatorname{sh} 2H\sqrt{k_0^2 + m^2} + 2H\sqrt{k_0^2 + m^2} \right)}.$$

Подставив (26) в уравнение (13), получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma^2 w = -i\rho \frac{\omega^2 a^3}{T} \times A_1 \int_{-1}^1 w(\xi) \exp(iak_0|x - \xi|) d\xi. \quad (27)$$

Определим давление на дне канала при $x > a$. Из выражений (4) и (7) с учетом (26) получим

$$p(x) = -i\rho\omega^2 a A_1 \exp(iak_0 x) \times \int_{-1}^1 w(\xi) \exp(-iak_0 \xi) d\xi - \rho \frac{\omega^2 H}{3} w(x).$$

Наличие в последнем выражении члена, содержащего $\exp(iak_0 x)$, означает присутствие волн, распространяющихся по оси x . Существование дискретного спектра колебаний жидкости и мембраны может быть обеспечено только при отсутствии волн, уносящих энергию на бесконечность. Для этого необходимо потребовать выполнение условия отсутствия излучения

$$\int_{-1}^1 w(\xi) \exp(-iak_0 \xi) d\xi = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим случай симметричных колебаний мембраны. Для этого случая условие (28) имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^1 w(\xi) \cos(ak_0 \xi) d\xi = 0. \quad (29)$$

Для симметричных колебаний уравнение (27) с учетом условия (29) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma^2 w = 2\rho \frac{\omega^2 a^3}{T} \times A_1 \int_{-1}^x w(\xi) \sin[ak_0(x - \xi)] d\xi. \quad (30)$$

Дифференцируя дважды уравнение (30) с учетом граничного условия $w(1) = 0$, получим задачу

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_4 w = 0, \quad (31)$$

$$w(1) = 0, \quad w_{xx}(1) = 0, \quad (32)$$

где

$$B_3 = \gamma^2 + (ak_0)^2, \quad B_4 = -(ak_0)^2 \gamma^2 + \frac{2\rho a^4 k_0}{T} A_1 \omega^2.$$

Наличие интегрального оператора Вольтерра в правой части уравнения (30) приводит к дополнительному условию

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \gamma^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 1, \quad (33)$$

которое обеспечивает эквивалентность задачи (31), (32) исходной задаче (30).

Решение уравнения (31) для симметричных колебаний имеет вид

$$w(x) = C_2 \operatorname{ch} S_1 x + C_4 \cos S_2 x, \quad (34)$$

где

$$S_1 = \sqrt{-B_3/2 + \sqrt{B_3^2/4 + B_4}},$$

$$S_2 = \sqrt{B_3/2 + \sqrt{B_3^2/4 + B_4}}.$$

Подстановка решения (34) в граничные условия (32) приводит к системе уравнений относительно C_2, C_4 , из которой следует частотное уравнение $(S_1^2 + S_2^2) \operatorname{ch} S_1 \cos S_2 = 0$, а также равенство $C_2 = 0$. Видно, что частотное уравнение может выполняться только при условии $\cos S_2 = 0$, т.е. $(S_2)_n = \pi/2 + \pi n$, $(n = 0, 1, \dots)$.

Определим возможность выполнения условия отсутствия излучения (29), а также условия (33) для решений вида $w(x) = \cos[(S_2)_n x]$. Вычисление интеграла (29) при условии $\cos[(S_2)_n] = 0$ приводит к равенству

$$\frac{(S_2)_n}{(S_2)_n^2 - (ak_0)^2} \sin[(S_2)_n] \cos ak_0 = 0, \quad (35)$$

которое может выполняться только, когда $\cos ak_0 = 0$. Условие (33) приводит к противоречивому требованию $ak_0 = 0$.

Рассмотрение случая несимметричных колебаний приводит к аналогичному результату. Из этого можно сделать вывод, что при $\omega^2 > \omega_*^2$ вещественный дискретный спектр у исходного оператора (13) отсутствует.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01153а) и фонда "Интеграция" (№ 589).

Список литературы

- [1] *Абрамян А.К., Андреев В.Л., Индейцев Д.А.* // Моделирование в механике. 1992. Т. 6. С. 34.
- [2] *Индейцев Д.А., Осипова Е.В.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 8. С. 124–132.
- [3] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
- [4] *Indeichev D.A.* // Proc. of EUROMECH-316. Manchester, 1994. Vol. 3. P. 304.
- [5] *Куч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1979.