

01;03

Термофоретический перенос в двухкомпонентных газах умеренно крупных сферических и цилиндрических частиц

© Е.Р. Щукин¹, Н.Н. Карева², Ю.И. Яламов², З.Л. Шулиманова²¹ Объединенный Институт высоких температур РАН,
127412 Москва, Россия² Московский педагогический университет,
Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 3 октября 1997 г. В окончательной редакции 11 января 1999 г.)

При числе $Re \ll 1$ решена задача о термофоретическом движении в двухкомпонентном газе твердых умеренно крупных сферических и цилиндрических частиц. Получены формулы, позволяющие непосредственно оценивать скорость термофоретического движения как однослойных, так и многослойных частиц. При выводе этих формул в граничных условиях учтены поправки, непосредственно зависящие от числа Кнудсена. Коэффициент теплопроводности частиц считался функцией, зависящей от радиальной координаты. Показано, что термодиффузия и зависимость коэффициента теплопроводности частицы от радиальной координаты могут оказать значительное влияние на скорость термофоретического переноса частиц.

В газах с неоднородным распределением температуры на частицу действует термофоретическая сила [1–4], вызывающая упорядоченное движение частиц относительно газообразной среды. Термофоретическое движение частиц происходит в каналах тепло- и массообменников [4–7], зонах просветления облаков и туманов [8], в окрестности вымывающих частицы капель [9], фильтрах, предназначенных для тонкой очистки газов [4–7]. В связи с этим вывод формул, позволяющих оценивать скорость термофоретического движения частиц, наряду с научным представляет и практический интерес.

Полученные до настоящего времени формулы позволяют оценивать скорость термофореза умеренно крупных сферических [1–3] и цилиндрических [10] частиц лишь в однокомпонентных газах, причем при постоянной величине коэффициента теплопроводности частиц. В реальных условиях термофоретическое движение частиц может происходить не только в однокомпонентных, но и многокомпонентных газах [11,12]. Следует также отметить, что в состав природных и производственных аэродисперсных систем входят частицы как однородные, так и неоднородные по своим теплофизическим свойствам [11,13,14]. Неоднородные по теплофизическим свойствам частицы содержатся, например, в конденсационных аэрозолях металлургических заводов [13] и химических комбинатов [14], выбросах химических предприятий и транспорта [11,15], образуются в результате протекания природных процессов, например вулканической деятельности. Выведенные в настоящей работе формулы позволяют оценивать величину термофоретической скорости находящихся в двухкомпонентном газе умеренно крупных твердых сферических и цилиндрических частиц при коэффициенте теплопроводности, зависящем от радиальной координаты. К умеренно крупным частицам относят частицы с числом Кнудсена, находящиеся в интервале $0.01 \leq Kn \leq 0.3$.

Остановимся сначала более подробно на решении задачи о термофоретическом движении сферической частицы. При выводе формулы для скорости термофореза будем предполагать, что в двухкомпонентной газообразной среде во внешнем поле градиента температуры происходит движение многослойной твердой сферической частицы с радиусом R_N . Частица состоит из N слоев. Слой с номером k ограничен внутренней и внешней по отношению к нему сферическими поверхностями соответственно с радиусами R_{k-1} и R_k . В пределах каждого из слоев коэффициент теплопроводности ε_k и его производная по радиальной координате являются непрерывными функциями. Коэффициент ε_k зависит от радиальной координаты r . Индекс k в ε_k указывает номер слоя. Номером $k = 1$ обозначено внутреннее ядро, $k = N$ — внешний слой. Движение частицы происходит при числах Рейнольдса и Пекле, много меньших единицы. На величину градиента температуры наложено ограничение

$$\frac{f_T M_p |\nabla T_{e\infty}|}{6\pi R^2 \rho_e T_{e\infty}} \ll 1,$$

где M_p — масса частицы; ρ_e — плотность газа; f_T — скалярный коэффициент, входящий в выражение для скорости термофореза [19].

При выполнении этого условия описание процесса термофоретического переноса частиц можно проводить в квазистационарном приближении в силу малости времен релаксации температурных, концентрационных и газодинамических полей, а также характерного времени вязкого торможения частицы по сравнению со временем прохождения частицей расстояния, равного ее радиусу.

При рассмотренных условиях распределения в системе частица–газообразная среда массовой скорости \mathbf{v} , температур газа T_e , слоев частицы T_k и относительной концентрации c_1 молекул первого компонента описыва-

ются следующей системой уравнений [1–3,16]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta \mathbf{v} = 0, \quad \Delta T_e = 0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon_k \nabla T_k) = 0, \quad \Delta c_1 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

в которой $c_1 = n_1/n$, $n = n_1 + n_2$, n_1 и n_2 — концентрации молекул первого и второго вида газообразной среды; Δ — оператор Лапласа.

При записи уравнений Стокса было учтено, что в случае установившегося термофоретического движения частицы, действующая на частицу полная сила равна нулю [1–3]. При этом термофоретический перенос частицы происходит при постоянном давлении. В связи с этим в уравнениях гидродинамики $\nabla p = 0$.

Решение системы (1) проводилось в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром частицы. При этом предполагалось, что полярная ось OZ параллельна градиенту температуры $\nabla T_{e\infty}$. В сферической системе координат граничные условия, при которых решалась система (1), имеют следующий вид [2,3,17]:

$$v_r \Big|_{r=R_N} = C_r^{(c)} \operatorname{Kn} \frac{D}{R} \operatorname{div}_\Theta c_1 + C_r^{(T)} \operatorname{Kn} \frac{\nu_e}{RT_e} \operatorname{div}_\Theta T_e \Big|_{r=R_N}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v_\Theta \Big|_{r=R_N} = C_\Theta \operatorname{Kn} R \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\Theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \Theta} \right] \\ + (C_D^{(0)} + C_D' \operatorname{Kn}) \frac{D}{R} \frac{\partial c_1}{\partial \Theta} + C_D^{(R)} \operatorname{Kn} D \frac{\partial^2 c_1}{\partial r \partial \Theta} \\ + C_D^{(B)} \operatorname{Kn} D \left[\frac{\partial^2 c_1}{\partial r \partial \Theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial c_1}{\partial \Theta} \right] + (C_T^{(0)}) \\ + C_T' \operatorname{Kn} \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \Theta} + C_T^{(R)} \operatorname{Kn} \nu_e \frac{1}{T_e} \frac{\partial^2 T_e}{\partial r \partial \Theta} \\ - C_T^{(B)} \operatorname{Kn} \frac{\nu_e}{T_e} \left[\frac{\partial^2 T_e}{\partial r \partial \Theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial T_e}{\partial \Theta} \right] \Big|_{r=R_N}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$T_e - T_N \Big|_{r=R_N} = C_T^{(T)} \operatorname{Kn} R_N \frac{\partial T_e}{\partial r} + C_T^{(n)} \operatorname{Kn} R_N T_e \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{r=R_N}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -\kappa \frac{\partial T_e}{\partial r} + \varepsilon_N \frac{\partial T_N}{\partial r} - \kappa T_e C_q^{(k)} \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{r=R_N} \\ = -T_e C_q^{(c)} \operatorname{Kn} \frac{\kappa}{R} \operatorname{div}_\Theta c_1 - C_q^{(T)} \operatorname{Kn} \frac{\kappa}{R} \operatorname{div}_\Theta T_e \Big|_{r=R_N}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c_1}{\partial r} + K_T \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_N} = C_v^{(c)} \operatorname{Kn} \frac{1}{R} \operatorname{div}_\Theta c_1 \\ + C_v^{(T)} \operatorname{Kn} \frac{1}{RT_e} \operatorname{div}_\Theta T_e \Big|_{r=R_N}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$T_k \Big|_{r=R_k} = T_{k+1} \Big|_{r=R_k},$$

$$-\varepsilon_k \frac{\partial T_k}{\partial r} \Big|_{r=R_k} = -\varepsilon_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial r} \Big|_{r=R_k}, \quad (7)$$

$$v_r \Big|_{r \rightarrow \infty} = -u_{TZ} \cos \Theta, \quad v_\Theta \Big|_{r \rightarrow \infty} = u_{TZ} \sin \Theta, \quad (8)$$

$$T_e \Big|_{r \rightarrow \infty} = T_{e\infty} + |\nabla T_{e\infty}| r \cos \Theta, \quad c_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} = c_{1\infty}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Kn} = \frac{\lambda}{R_N}; \quad \lambda = \mu_e \left(\frac{\pi}{2n\rho_e k T_e} \right)^{1/2}; \\ \operatorname{div}_\Theta = \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \operatorname{ctg} \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}; \end{aligned}$$

κ — постоянная Больцмана; $\nu_e = \mu_e/\rho_e$ — кинематическая вязкость; μ_e — динамическая вязкость; $\rho_e = n_1 m_1 + n_2 m_2$ — плотность газа; D и κ — коэффициенты взаимной диффузии и теплопроводности газовой смеси; K_T — термодиффузионное отношение; u_{TZ} — проекция скорости термофореза на полярную ось OZ ; индекс k в (7) принимает значения от $k = 1$ до $k = N - 1$.

Граничные условия на поверхности частицы (2)–(6) записаны с учетом поправок, зависящих от числа Кнудсена [2,3,17]. В (2)–(6) $C_D^{(0)}, C_T^{(0)}, C_\Theta$ — коэффициенты диффузионного, теплового и изотермического скольжений; C_D', C_T' — поправки на кривизну поверхности; $C_D^{(B)}, C_T^{(B)}$ — коэффициенты барнеттовского скольжения появляющиеся в связи с учетом членов, пропорциональных вторым производным от относительных концентраций газообразных компонентов и температуры (по r и Θ) в функциях распределения газовых молекул в слое Кнудсена; $C_D^{(R)}$ и $C_T^{(R)}$ — коэффициенты, связанные с неоднородностью градиентов относительных концентраций газообразных компонентов и температуры (появление этих поправок обусловлено также кривизной поверхности); $C_T^{(n)}, C_T^{(c)}$ — коэффициенты скачка температуры; $C_v^{(T)}$ и $C_v^{(c)}, C_q^{(T)}$ и $C_q^{(c)}, C_r^{(T)}$ и $C_r^{(c)}$ — соответственно газокинетические коэффициенты потоков диффузии, тепла, а также среднemasсового потока, растекающегося в слое Кнудсена; $C_q^{(k)} = DknK_T/\kappa c_1 c_2$ [14]; $C_q^{(c)} = DknC_q/\kappa$ [14]. При проведении оценок значения входящих в (2)–(6) газокинетических коэффициентов нужно находить при $c_1 = c_{1\infty}, T_e = T_{e\infty}, p = p_{\infty}$.

Граничные условия (2)–(6) записаны в соответствии с результатами работ [2,3,17]. В этих работах приведены не только выражения для входящих в (2)–(6) газокинетических коэффициентов, но и конкретные значения этих коэффициентов. Входящие в граничные условия совместно с числом Kn газокинетические коэффициенты в общем случае являются функциями, зависящими от числа Kn .

Решения системы уравнений (1), удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности, имеют следующий вид:

$$v_r = \left(\frac{E}{y^3} - u_{TZ} \right) \cos \Theta, \quad v_\Theta = \left(\frac{E}{2y^3} + u_{TZ} \right) \sin \Theta, \quad (10)$$

$$T_e = T_{e\infty} + R_N \left(y + \frac{1}{y^2} A \right) |\nabla T_{e\infty}| \cos \Theta,$$

$$T_k = T_{e\infty} + R_N (B_{k,1} \varphi_{k,1} + B_{k,2} \varphi_{k,2}) |\nabla T_{e\infty}| \cos \Theta, \quad (11)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + R_N M \frac{1}{y^2} \frac{1}{T_{e\infty}} |\nabla T_{e\infty}| \cos \Theta, \quad (12)$$

где $E, M, A, B_{k,1}, B_{k,2}$ — постоянные интегрирования; $y = r/R_N$.

Функции $\varphi_{k,1}$ и $\varphi_{k,2}$ линейно независимые частные расходящиеся при $y = 0$ ($\varphi_{k,1}$) и нерасходящиеся при $y = 0$ ($\varphi_{k,2}$) решения уравнения

$$\varepsilon_k y^2 \frac{d^2 \varphi_k}{dy^2} + \frac{d}{dy} (\varepsilon_k y^2) \frac{d \varphi_k}{dy} - 2 \varepsilon_k \varphi_k = 0. \quad (13)$$

В связи с конечностью температуры в центре частицы постоянная $B_{1,1} = 0$. В общем случае зависимость функций $\varphi_{k,1}$ и $\varphi_{k,2}$ от y может быть найдена в ходе численного решения уравнения (13). Если в кольцевой области, ограниченной окружностями с радиусами y_{k-1} и y_k , выражение для ε_k может быть представлено в виде сходящегося степенного ряда

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(k)} y^n, \quad \alpha_0^{(k)} = 1 \quad (14)$$

с радиусом сходимости в комплексной области $a \geq y_k$, то при этом решения $\varphi_{k,1}$ и $\varphi_{k,2}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{k,1} &= y \left\{ \sum_{n=-3}^{\infty} \beta_{n,k}^{(1)} y^n + \Delta^{(k)} (\ln y) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n \right\}, \\ \varphi_{k,2} &= y \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

После подстановки (14), (15) в уравнение (13) и последующего приравнивания нулю коэффициентов, стоящих перед одинаковыми степенями y^n , были получены следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов $\beta_{n,k}^{(1)}$ и $\beta_{n,k}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \beta_{n,k}^{(1)} &= -\frac{1}{n(n+3)} \left\{ \Delta^{(k)} (2n+3) \beta_{n,k}^{(2)} \right. \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n+3} \left[((n-m)(n+3) + m) \beta_{n-m,k}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta^{(k)} (2n-m+3) \beta_{n-m,k}^{(2)} \right] \alpha_m^{(k)} \right\}, \\ \beta_{n,k}^{(2)} &= -\frac{1}{n(n+3)} \sum_{m=1}^n \left[(n-m)(n+3) \right. \\ &\quad \left. + m \right] \alpha_m^{(k)} \beta_{n-m,k}^{(2)}, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Определяя величину $\beta_{n,k}^{(1)}$, нужно учитывать, что

$$\beta_{-3,k}^{(1)} = 1, \quad \beta_{0,k}^{(1)} = 0, \quad \Delta^{(k)} = \frac{2}{3} \sum_{m=1}^3 m \alpha_m^{(k)} \beta_{-m,k}^{(1)}.$$

При $\varepsilon_k = \text{const}$ соответственно $\varphi_{k,1} = 1/y^2$, $\varphi_{k,2} = y$. Если $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)} \exp(\alpha^{(k)} y)$, $\varepsilon_k^{(0)} = \text{const}$, $\alpha^{(k)} = \text{const}$, то

$$\varphi_{k,1} = \frac{1}{y^2} \exp(-\alpha^{(k)} y),$$

$$\varphi_{k,2} = 3 \left[\left(\frac{1}{\alpha^{(k)}} - \frac{2}{y \alpha^{(k)2}} + \frac{2}{y^2 \alpha^{(k)3}} \right) - \frac{2}{y^2 \alpha^{(k)3}} \exp(-\alpha^{(k)} y) \right].$$

В случае $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)} (1 + \alpha^{(k)} y)^{\gamma^{(k)}}$, $|\alpha^{(k)}| < 1$,

$$\varphi_{k,2} = y \left\{ \sum_{n=-3}^{\infty} \beta_{n,k}^{(1)} y^n + \Delta^{(k)} (\ln y) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n \right\},$$

$$\varphi_{k,2} = y \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1. \quad (17)$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов $\beta_{n,k}^{(1)}$ и $\beta_{n,k}^{(2)}$ равны

$$\begin{aligned} \beta_{n,k}^{(1)} &= -\frac{1}{n(n+3)} \left\{ \alpha^{(k)} (n^2 + n(1 + \gamma^{(k)}) - 2) \right. \\ &\quad \times \beta_{n-1,k}^{(1)} + \Delta^{(k)} (2n+3) \beta_{n,k}^{(2)} \\ &\quad \left. + \alpha^{(k)} \Delta^{(k)} (2n+1 + \gamma^{(k)}) \beta_{n-1,k}^{(2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\beta_{n,k}^{(2)} = -\alpha^{(k)} \frac{[n^2 + n(1 + \gamma^{(k)}) - 2]}{n(n+3)} \beta_{n-1,k}^{(2)}, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1. \quad (18)$$

Находя значения $\beta_{n,k}^{(1)}$, нужно учитывать, что $\beta_{-3,k}^{(1)} = 1$, $\beta_{0,k}^{(1)} = 0$, $\Delta^{(k)} = (2/3) \alpha^{(k)} \beta_{-1,k}^{(1)}$. Из (18) следует, что значения коэффициентов $\beta_{n,k}^{(2)}$ можно находить по формуле

$$\beta_{n,k}^{(2)} = (-\alpha^{(k)})^n \prod_{m=1}^n \frac{[m^2 + (1 + \gamma^{(k)})m - 2]}{m(m+3)}, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1.$$

После подстановки (10)–(12) в граничные условия (2)–(7) и последующего исключения из них $\cos \Theta$ и $\sin \Theta$ была получена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $E, A, M, B_{k,1}, B_{k,2}$ и u_{TZ} . В ходе решения этой линейной системы было получено выражение для проекции u_{TZ} . Формула для скорости термофореза, полученная с учетом этого выражения, имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}_T = -f_T \frac{\nu_e}{T_{e\infty}} \nabla T_{e\infty}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_T &= \frac{1}{(1 + 2C_{\Theta} \text{Kn})(1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) d_1} \\ &\quad \times \left[d_2 \left\{ \left[(1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) - (C_q^{(k)} - C_q^{(c)} \text{Kn}) K_T \right] \kappa \Delta_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[(1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) C_T^{(T)} - K_T C_T^{(n)} \right] \text{Kn} \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + d_3 \left\{ \left[1 - \text{Kn} (C_v^{(c)} - 2C_v^{(T)} C_T^{(n)} \text{Kn}) \right] \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left[C_q^{(T)} (1 - C_q^{(c)} \text{Kn}) - C_v^{(T)} (C_q^{(k)} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - C_q^{(c)} \text{Kn}) \right] \text{Kn} \kappa \Delta_1 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

В формуле (20) κ -коэффициент теплопроводности газа;

$$d_1 = \left\{ 2 \left[(1 - C_q^{(T)} \text{Kn}) (1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) + (C_q^{(k)} - C_q^{(c)} \text{Kn}) \right. \right. \\ \left. \left. \times (C_v^{(T)} \text{Kn} - K_T) \right] \kappa \Delta_1 + \left[(1 + 2C_T^{(T)} \text{Kn}) \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) + 2(C_v^{(T)} \text{Kn} - K_T) C_T^{(n)} \text{Kn} \right] \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 \right\},$$

$$d_2 = \left\{ \left[C_T^{(0)} + \text{Kn} ((C_T' + C_T^{(B)}) - (1 + 6C_\Theta \text{Kn}) C_T^{(T)}) \right] \right. \\ \left. \times (1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) + \frac{D}{\nu_e} \left[C_D^{(0)} + \text{Kn} ((C_D' - 3C_D^{(B)}) \right. \right. \\ \left. \left. - 2C_D^{(R)}) - (1 + 6C_\Theta \text{Kn}) C_r^{(c)} \right] C_r^{(T)} \text{Kn} \right\},$$

$$d_3 = \left\{ \text{Kn} (C_T^{(R)} - C_T^{(B)} \text{Kn}) (1 - C_v^{(c)}) + \frac{D}{2\nu_e} \left[C_D^{(0)} \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Kn} ((C_D' - 3C_D^{(B)}) - 2C_D^{(R)}) - (1 + 6C_\Theta \text{Kn}) C_r^{(c)} \right] K_T \right\}.$$

Выражения для коэффициентов Δ_1 и Δ_2 имеют вид (21)

$$\Delta_1 = \det \|a_{im}\|, \quad \Delta_2 = \det \|b_{im}\|, \\ 1 \leq i \leq 2N - 1, \quad 1 \leq m \leq 2N - 1. \quad (21)$$

Значения элементов a_{im} и b_{im} матриц находятся по формулам

$$a_{2k-1,2k-2} = \varphi_{k,1}^{(2)}, \quad a_{2k-1,2k} = \varphi_{k,1}^{(2)}, \quad a_{2k-1,2k} = -\varphi_{k+1,1}^{(1)},$$

$$a_{2k-1,2k+1} = -\varphi_{k+1,2}^{(1)}, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad a_{2k-1,m \leq 2k-3} = 0,$$

$$a_{2k-1,m \geq 2k+2} = 0, \quad a_{2k,2k-2} = \varepsilon_k^{(2)} \frac{d\varphi_{k,1}^{(2)}}{dy},$$

$$a_{2k,2k-1} = \varepsilon_k^{(2)} \frac{d\varphi_{k,2}^{(2)}}{dy}, \quad a_{2k,2k} = -\varepsilon_{k+1}^{(1)} \frac{d\varphi_{k+1,1}^{(1)}}{dy},$$

$$a_{2k,2k+1} = -\varepsilon_{k+1}^{(1)} \frac{d\varphi_{k+1,2}^{(1)}}{dy}, \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

$$a_{2k,m \leq 2k-3} = 0, \quad a_{2k,m \geq 2k+2} = 0, \quad a_{2N-1,m \leq 2N-3} = 0,$$

$$a_{2N-1,2N-2} = \varphi_{N,1}^{(2)}, \quad a_{2N-1,m \leq 2N-3} = 0, \quad b_{im} = a_{im},$$

$$1 \leq i \leq 2N-2, \quad 1 \leq m \leq 2N-1, \quad b_{2N-1,m \leq 2N-3} = 0,$$

$$b_{2N-1,2N-2} = \frac{d\varphi_{N,1}^{(2)}}{dy}, \quad b_{2N-1,2N-1} = \frac{d\varphi_{N,2}^{(2)}}{dy}, \quad (22)$$

в которых индекс k принимает значения от $k = 1$ до $k = N - 1$;

$$y_k = R_k/R_N; \quad \varphi_{k,1}^{(1)} = \varphi_{k,1}, \quad \varphi_{k,2}^{(1)} = \varphi_{k,2}|_{y=y_{k-1}},$$

$$\frac{d\varphi_{k,1}^{(1)}}{dy} = \frac{d\varphi_{k,1}}{dy}|_{y=y_{k-1}}, \quad \frac{d\varphi_{k,2}^{(1)}}{dy} = \frac{d\varphi_{k,2}}{dy}|_{y=y_{k-1}},$$

$$\varepsilon_k^{(1)} = \varepsilon_k|_{y=y_{k-1}}, \quad \varphi_{k,1}^{(2)} = \varphi_{k,1}|_{y=y_k}, \quad \varphi_{k,2}^{(2)} = \varphi_{k,2}|_{y=y_k},$$

$$\frac{d\varphi_{k,1}^{(2)}}{dy} = \frac{d\varphi_{k,1}}{dy}|_{y=y_k}, \quad \frac{d\varphi_{k,2}^{(2)}}{dy} = \frac{d\varphi_{k,2}}{dy}|_{y=y_k}, \quad \varepsilon_k^{(2)} = \varepsilon_k|_{y=y_k}.$$

У однослойных частиц ($N - 1$) выражения для коэффициентов Δ_1 и Δ_2 равны

$$\Delta_1 = \varphi_{1,2}^{(2)}, \quad \Delta_2 = \frac{d\varphi_{1,2}^{(2)}}{dy}. \quad (23)$$

При $\varepsilon_1 = \text{const}$ коэффициенты (23) равны $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$. В случае двухслойной частицы

$$\Delta_1 = \left[\varepsilon_1^{(2)} (\varphi_{2,1}^{(1)} \varphi_{2,2}^{(2)} - \varphi_{2,2}^{(1)} \varphi_{2,1}^{(2)}) \frac{d\varphi_{1,2}^{(2)}}{dy} \right. \\ \left. - \varepsilon_2^{(1)} \left(\varphi_{2,2}^{(2)} \frac{d\varphi_{2,1}^{(1)}}{dy} - \varphi_{2,1}^{(2)} \frac{d\varphi_{2,2}^{(1)}}{dy} \right) \varphi_{1,2}^{(2)} \right], \\ \Delta_2 = \left[\varepsilon_1^{(2)} \left(\varphi_{2,1}^{(1)} \frac{d\varphi_{2,2}^{(2)}}{dy} - \varphi_{2,2}^{(1)} \frac{d\varphi_{2,1}^{(2)}}{dy} \right) \frac{d\varphi_{1,2}^{(2)}}{dy} \right. \\ \left. - \varepsilon_2^{(1)} \left(\frac{d\varphi_{2,2}^{(2)}}{dy} \frac{d\varphi_{2,1}^{(1)}}{dy} - \frac{d\varphi_{2,1}^{(2)}}{dy} \frac{d\varphi_{2,2}^{(1)}}{dy} \right) \varphi_{1,2}^{(2)} \right]. \quad (24)$$

При постоянной величине коэффициентов ε_1 и ε_2 выражения (24) переходят в

$$\Delta_1 = -y_1 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{1}{y_1^3} - 1 \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{2}{y_1^3} + 1 \right) \right], \\ \Delta_2 = -y_1 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{1}{y_1^3} + 2 \right) + 2\varepsilon_2 \left(\frac{1}{y_1^3} - 1 \right) \right].$$

В случае однокомпонентного газа выражение для f_T (20) принимает следующий значительно более простой вид:

$$f_T = 2 \left\{ \left[C_T^{(0)} + \text{Kn} ((C_T' + C_T^{(B)}) - (1 + 6C_\Theta \text{Kn}) C_r^{(T)}) \right] \right. \\ \left. \times (\kappa \Delta_1 + \varepsilon_N^{(2)} C_T^{(T)} \text{Kn} \Delta_2) + \text{Kn} (C_T^{(R)} - C_T^{(B)}) \right. \\ \left. \times (\varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 - 2C_q^{(T)} \text{Kn} \kappa \Delta_1) \right\} \frac{1}{(1 + 2C_\Theta \text{Kn}) d_1},$$

где $d_1 = 2(1 - C_q^{(T)} \text{Kn}) \kappa \Delta_1 + (1 + 2C_T^{(T)} \text{Kn}) \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2$.

Решение задачи о термофоретическом движении многослойной умеренно крупной цилиндрической частицы расположенной перпендикулярно $\nabla T_{e\infty}$ проводится аналогично вышеизложенному. Выражение для проекции скорости термофореза u_T на полярную ось $0Z$ цилиндрической системы координат находится в ходе решения граничной задачи (1)–(9), в которой r и Θ — цилиндрические координаты, $\text{div}_\Theta = \partial^2 / \partial \Theta^2$. Решения системы (1) в случае цилиндрической частицы равны

$$v_r = \left(\frac{E}{y^2} - u_{TZ} \right) \cos \Theta, \quad v_\Theta = \left(\frac{E}{y^2} + u_{TZ} \right) \sin \Theta, \quad (25)$$

$$T_e = T_{e\infty} + R_N \left(y + \frac{A}{y} \right) |\nabla T_{e\infty}| \cos \Theta,$$

$$T_k = T_{e\infty} + R_N (B_{k,1} \varphi_{k,1} + B_{k,2} \varphi_{k,2}) |\nabla T_{e\infty}| \cos \Theta, \quad (26)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + R_N \frac{M}{y} \frac{1}{T_{e\infty}} |\nabla T_{e\infty}| \cos \Theta, \quad (27)$$

где $E, A, M, B_{k,1}$ и $B_{k,2}$ — постоянные интегрирования; $y = r/R_N$; $B_{1,1} = 0$.

Функции $\varphi_{k,1}$ и $\varphi_{k,2}$ — линейно независимые частные расходящиеся при $y = 0$ ($\varphi_{k,1}$) и нерасходящиеся при $y = 0$ ($\varphi_{k,2}$) решения уравнения

$$\varepsilon_k y^2 \frac{d^2 \varphi_k}{dy^2} + y \frac{d}{dy} (\varepsilon_k y) \frac{d \varphi_k}{dy} - \varepsilon_k \varphi_k = 0. \quad (28)$$

Интегрирование (28) может быть проведено численно, или в квадратурах. Если выражение для ε_k может быть представлено в виде сходящегося степенного ряда (14), то при этом частные решения (28) равны

$$\varphi_{k,1} = y \left\{ \sum_{n=-2}^{\infty} \beta_{n,k}^{(1)} y^n + \Delta^{(k)} (\ln y) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n \right\},$$

$$\varphi_{k,2} = y \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1. \quad (29)$$

Значения входящих в (29) коэффициентов $\beta_{n,k}^{(1)}$ и $\beta_{n,k}^{(2)}$ находятся по следующим формулам:

$$\beta_{n,k}^{(1)} = -\frac{1}{n(n+2)} \left\{ \sum_{m=1}^{n+2} [(n-m)(n+1)+n] \beta_{n-m,k}^{(1)} + \Delta^{(k)} (2n-m+2) \beta_{n-m,k}^{(2)} \right\} \alpha_m^{(k)} + 2 \Delta^{(k)} (n+1) \beta_{n,m}^{(2)},$$

$$\beta_{n,k}^{(2)} = -\frac{1}{n(n+2)} \sum_{m=1}^n [(n-m)(n+1)+n] \alpha_m^{(k)} \beta_{n-m,k}^{(2)},$$

$$\beta_{0,k}^{(2)} = 1.$$

Определяя величину $\beta_{n,k}^{(1)}$, нужно учитывать, что

$$\beta_{-2,k}^{(1)} = 1, \quad \beta_{0,k}^{(1)} = 0, \quad \Delta^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 m \beta_{-m,k}^{(1)} \alpha_m^{(k)}.$$

При $\varepsilon_k = \text{const}$ соответственно $\varphi_{k,1} = 1/y$, $\varphi_{k,2} = y$. Если $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)} \exp(\alpha^{(k)} y)$, то $\varphi_{k,1} = (1/y) \exp(-\alpha^{(k)} y)$,

$$\varphi_{k,2} = 2 \left[\left(\frac{1}{\alpha^{(k)}} - \frac{1}{y \alpha^{(k)2}} \right) + \frac{1}{y \alpha^{(k)2}} \exp(-\alpha^{(k)} y) \right].$$

В случае $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)} (1 + \alpha^{(k)} y)^{\gamma^{(k)}}$, $|\alpha^{(k)}| < 1$

$$\varphi_{k,1} = y \left\{ \sum_{n=-2}^{\infty} \beta_{n,k}^{(1)} y^n + \Delta^{(k)} (\ln y) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n \right\},$$

$$\varphi_{k,2} = y \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} y^n, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1.$$

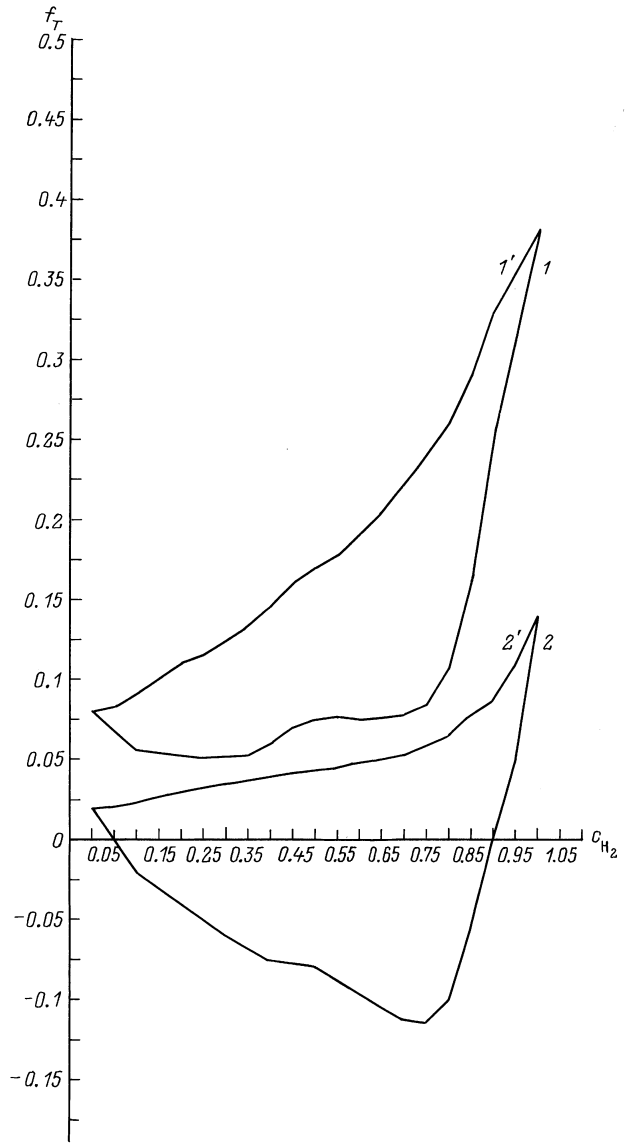


Рис. 1. Зависимости коэффициента f_T крупных сферических частиц от относительной концентрации молекул водорода.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов $\beta_{n,k}^{(1)}$ и $\beta_{n,k}^{(2)}$ (30) имеют следующий вид:

$$\beta_{n,k}^{(1)} = -\frac{1}{n(n+2)} \left\{ \alpha^{(k)} (n^2 + n \gamma^{(k)} - 1) \beta_{n-1,k}^{(1)} + 2 \Delta^{(k)} (n+1) \beta_{n,k}^{(2)} + \alpha^{(k)} \Delta^{(k)} (2n + \gamma^{(k)}) \beta_{n-1,k}^{(2)} \right\},$$

$$\beta_{n,k}^{(2)} = -\alpha^{(k)} \frac{[n^2 + n \gamma^{(k)} - 1]}{n(n+2)} \beta_{n-1,k}^{(2)}, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1.$$

Находя значения $\beta_{n,k}^{(1)}$, нужно учитывать, что

$$\beta_{-2,k}^{(1)} = 1, \quad \beta_{0,k}^{(1)} = 0, \quad \Delta^{(k)} = \frac{1}{2} \alpha^{(k)} \beta_{-1,k}^{(1)}.$$

Значения коэффициентов $\beta_{n,k}^{(2)}$ (30) можно находить по формуле

$$\beta_{n,k}^{(2)} = (-\alpha^{(k)})^n \prod_{m=1}^n \frac{[m^2 + m\gamma^{(k)} - 1]}{m(m+2)}, \quad \beta_{0,k}^{(2)} = 1.$$

И в случае цилиндрических частиц выражение для скорости термофореза равно (19). Найденная в ходе решения граничной задачи (1)–(9) формула для коэффициента f_T многослойных цилиндрических частиц имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_T = & \frac{1}{(1 + 2C_\Theta \text{Kn})(1 - C_v^{(c)} \text{Kn})d_1} \\ & \times \left[d_2 \left\{ (1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) - (C_q^{(k)} - C_q^{(c)} \text{Kn})K_T \right\} \kappa \Delta_1 \right. \\ & + \left. \left[(1 - C_v^{(c)} \text{Kn})C_T^{(T)} - K_T C_T^{(n)} \right] \text{Kn} \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 \right\} \\ & + d_3 \left\{ \left[1 - \text{Kn}(C_v^{(c)} - C_v^{(T)} C_T^{(n)} \text{Kn}) \right] \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 - \left[C_q^{(T)} \right. \right. \\ & \left. \left. \times (1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) - C_v^{(T)} (C_q^{(k)} - C_q^{(c)} \text{Kn}) \right] \text{Kn} \kappa \Delta_1 \right\} \right], \quad (31) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_1 = & \left\{ \left[(1 - C_q^{(T)} \text{Kn})(1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) + (C_q^{(k)} - C_q^{(c)} \text{Kn}) \right. \right. \\ & \left. \left. \times (C_v^{(T)} \text{Kn} - K_T) \right] \kappa \Delta_1 + \left[(1 + C_T^{(T)} \text{Kn})(1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) \right. \right. \\ & \left. \left. + (C_v^{(T)} \text{Kn} - K_T) C_T^{(n)} \text{Kn} \right] \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 = & \left\{ \left[C_T^{(0)} + \text{Kn}((C_T' + C_T^{(B)}) - (1 + 4C_\Theta \text{Kn})C_T^{(T)}) \right] \right. \\ & \left. \times (1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) + \frac{D}{\nu_e} \left[C_D^{(0)} + \text{Kn}((C_D' - 2C_D^{(B)} - C_D^{(R)}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + 4C_\Theta \text{Kn})C_r^{(c)}) \right] C_v^{(T)} \text{Kn} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 = & \left\{ \text{Kn}(C_T^{(R)} - C_T^{(B)})(1 - C_v^{(c)} \text{Kn}) + \frac{D}{\nu_e} \left[C_D^{(0)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Kn}((C_D' - 2C_D^{(B)} - C_D^{(R)}) - (1 + 4C_\Theta \text{Kn})C_r^{(c)}) \right] K_T \right\}. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов Δ_1 и Δ_2 находятся по формулам (21). При определении величины элементов детерминантов a_{im} и b_{im} нужно использовать решения $\varphi_{k,1}$ и $\varphi_{k,2}$ уравнения (28). В случае однослойных и двухслойных частиц выражения для Δ_1 и Δ_2 равны (23) и (24). Если движение частицы происходит в однокомпонентном газе, то при этом выражение для f_T

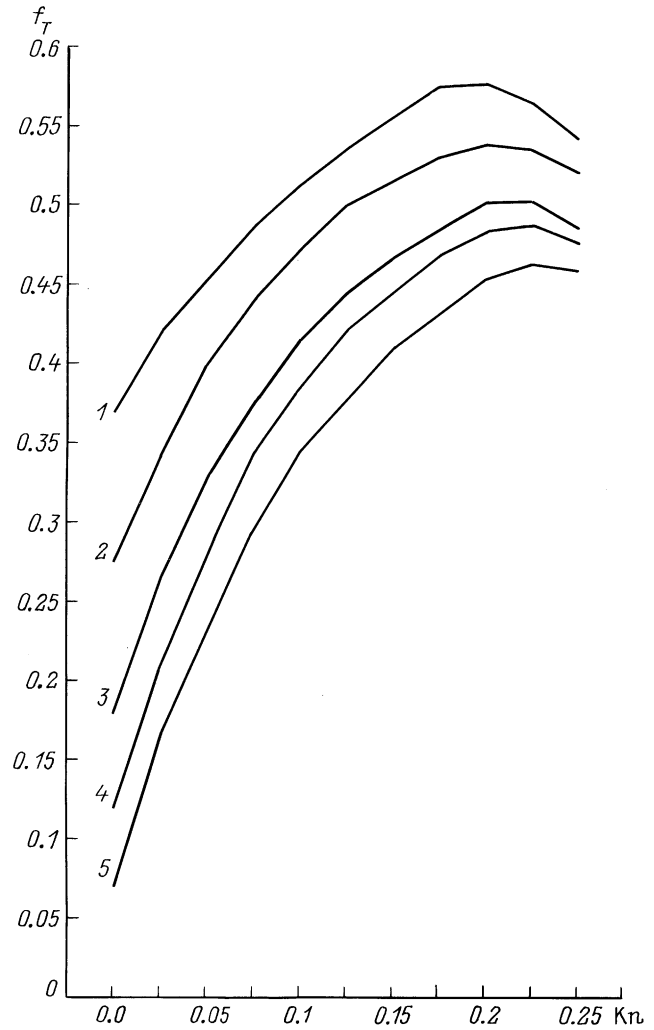


Рис. 2. Зависимости коэффициента f_T от числа Кнудсена: $\alpha = 4$ (1); 2 (2, 4); 0 (3); 4 (5).

(31) переходит в

$$\begin{aligned} f_T = & \frac{1}{(1 + 2C_\Theta \text{Kn})d_1} \left\{ \left[C_T^{(0)} + \text{Kn}((C_T' + C_T^{(B)}) \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + 4C_\Theta \text{Kn})C_T^{(T)}) \right] (\kappa \Delta_1 + \varepsilon_N^{(2)} C_T^{(T)} \text{Kn} \Delta_2) \right. \\ & \left. + \text{Kn}(C_T^{(R)} - C_T^{(B)})(\varepsilon_N^{(2)} \Delta_2 - C_q^{(T)} \text{Kn} \kappa \Delta_1) \right\}, \end{aligned}$$

где $d_1 = (1 - C_q^{(T)} \text{Kn}) \kappa \Delta_1 + (1 + C_T^{(T)} \text{Kn}) \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2$.

Наиболее простой вид выражения для коэффициентов f_T (20) и (31) принимают в случае крупных частиц, у которых $\text{Kn} = 0$,

$$f_T^{(1)} = \frac{2[C_T^{(0)} \kappa \Delta_1 + C_D^{(0)} K_T (D/2\nu_e) \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2]}{(2\kappa \Delta_1 + \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2)},$$

$$f_T^{(2)} = \frac{[C_T^{(0)} \kappa \Delta_1 + C_D^{(0)} K_T (D/\nu_e) \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2]}{(\kappa \Delta_1 + \varepsilon_N^{(2)} \Delta_2)}.$$

С помощью $f_T^{(1)}$ находят значения f_T сферических частиц, а $f_T^{(2)}$ — цилиндрических. Если массы молекул не слишком близки, то входящее в $f_T^{(1)}$ и $f_T^{(2)}$ произведение $C_D^{(0)} K_T < 0$. Это означает, что диффузионное скольжение вызывает замедление термофоретического движения крупных частиц. Проведенные оценки показали, что в газовых смесях с сильно отличающимися массами молекул влияние диффузионного скольжения на скорость термофореза крупных частиц может быть значительным, вплоть до изменения направления движения. Это достаточно хорошо показывает ход приведенных на рис. 1 зависимостей от относительной концентрации молекул водорода коэффициента f_T крупных сферических частиц стекла (кривые 1) и гранита (кривые 2). При проведении вычислений предполагалось, что частицы находятся в газовой смеси, состоящей из молекул H_2 и N_2 . Их движение происходит при $T_{e\infty} = 293$ К и $p_\infty = 101\,325$ Па. При построении кривых 1', 2' влияние диффузионного скольжения не учитывалось. Значения газокинетических коэффициентов были взяты при коэффициентах accommodation, равных единице [3,17].

Значительное влияние на величину скорости термофореза может оказать зависимость коэффициента теплопроводности частиц от радиальной координаты. Зависимости коэффициента f_T сферических частиц от числа Кнудсена при $\kappa/\varepsilon^{(s)} = 0.1$ приведены на рис. 2. Кривые на рис. 2 построены в случае экспотенциальной зависимости от $y = r/R$ коэффициента ε однослойной частицы.

При проведении оценок предполагалось, что частица находится в воздухе с $T_{e\infty} = 293$ К и $p_\infty = 101\,325$ Па. Значения газокинетических коэффициентов были взяты из работы [2].

В заключение авторы благодарят фонд Сороса за материальную поддержку проведенного научного исследования.

Список литературы

- [1] Шукин Е.З. // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 6. С. 1332–1335.
- [2] Поддоскин А.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 11. С. 2253–2261.
- [3] Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 4. Вып. 6. С. 498–502.
- [4] Moo-Young M., Yataquchi K. // J. Chem. Eng. Sci. 1975. Vol. 30. N 6. P. 1291–1295.
- [5] Выскубенко Ю.А., Цалко Э.А. // ТВТ. 1978. Т. 16. № 2. С. 349–355.
- [6] Выскубенко Ю.А., Маслеников В.М., Цалко Э.А. // ТВТ. 1979. Т. 17. № 5. С. 1037–1041.
- [7] Shchukin E.R., Shulimanova Z.L., Zagainov V.A. // J. Aerosol Sci. 1990. Vol. 21. N 2. P. 189–201.
- [8] Зувев Е.В., Землянов А.А., Копытин Ю.Д. Мощное лазерное излучение в атмосферном аэрозоле. Новосибирск, 1984. 223 с.
- [9] Wang P.K., Proppucher E.R. // J. Atm. Sci. 1977. Vol. 34. N 10. P. 1664–1669.
- [10] Сафиуллин Р.А., Яламов Ю.И. // ТВТ. 1994. Т. 32. № 2. С. 271–275.
- [11] Грин Х., Лейн В. Аэрозоли — пыли, дымы и туманы. Л., 1969. 428 с.
- [12] Shchukin E.R., Kabanov A.N., Yankovska E. // J. Aerosol Sci. 1990. Vol. 21. N 3. P. 397–407.
- [13] Яворский Н.А., Терещин А.Н., Быков А.П. Улавливание аэрозолей в оловянной промышленности. Новосибирск, 1974. 86 с.
- [14] Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. М., 1986. 294 с.
- [15] Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М., 1955. 352 с.
- [16] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука: 1988. 733 с.
- [17] Яламов Ю.И., Юшканов А.А., Савков С.А. О диффузиофорезе умеренно крупных нелетучих аэрозольных частиц. // ДАН. 1988. Т. 301. № 5. С. 1111–1114.