

01;09

# Исследования электромагнитных полей на скачке диэлектрической проницаемости

© И.П. Козлов

Московский авиационный институт,  
Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики,  
125871 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 24 июня 1997 г. В окончательной редакции 20 октября 1998 г.)

Рассмотрена задача о прохождении плоской волной неоднородного плоского слоя диэлектрика произвольной толщины без поглощения. Дан метод решения через элементарные функции, сокращающий количество независимых параметров слоя. Описан принцип подобия слоев, имеющих эквивалентные коэффициенты отражения. Показано, что вблизи критической точки  $\varepsilon = 0$  напряженность электрического поля может возрастать до бесконечности.

В исследованиях прохождения электромагнитных волн в плоскостой среде без поглощения в окрестности нуля диэлектрической проницаемости имеется ряд узких мест. Так, в [1] показывается, что для линейной функции  $\varepsilon(z)$  требование обращения в нуль решения на бесконечности несовместимо с требованием конечности поля в нуле  $\varepsilon$ . Около точки  $\varepsilon = 0$  выделяется особая плоскость, где напряженность магнитного поля  $H = 0$ . В работе [2] доказывается, что вблизи нуля  $\varepsilon$  характер поведения  $E$  остается неизменным при отклонении закона  $\varepsilon$  от линейного. Исследования решения для линейного слоя без потерь через функции Эйри [3] показывают, что напряженность электрического поля ( $E$ ) в области  $\varepsilon < 0$  больше нуля — волна просачивается в эту область. В нашей работе [4] это решение уточняется, на модели слоя произвольной толщины при  $\varepsilon > 0$  показывается, что волна не проходит в область  $\varepsilon < 0$ . Выделяется критическая точка  $\varepsilon = 0$ , связанная с качественной зависимостью поведения решения от малых изменений параметров среды.

В связи с выявленной критической точкой  $\varepsilon = 0$  точное решение математической задачи о прохождении нормально падающей плоской электромагнитной волной неоднородного плоского слоя диэлектрика без поглощения приобретает особую значимость. Это основное решение из бифуркационного множества решений соответствует предельному случаю  $\psi_1 \Rightarrow 0$ ,  $\Theta_1 \Rightarrow 0$ ,  $r \Rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon'' \Rightarrow 0$ ,  $H^0 \Rightarrow 0$ , где  $\psi_1$  — угловая ширина падающего на слой потока электромагнитной энергии (луча),  $\Theta_1$  — угол падения на слой луча,  $r$  — радиус кривизны уровня  $\varepsilon = \text{const}$  неоднородной среды,  $H^0$  — величина постоянного магнитного поля,  $\varepsilon'' = \text{const}$  — мнимая часть диэлектрической проницаемости при  $\varepsilon > 0$ .

В настоящей работе исследуются поля на скачке  $\varepsilon$ , который задается плоским линейным слоем произвольной толщины, переходящим в нелинейный при непрерывности функции  $\varepsilon(z)$  на слое, так что сдвиг фаз волны при прохождении слоя  $\Delta\phi \ll 1$  и  $\varepsilon > 0$  (в этом случае для полей справедлив закон сохранения). Нелинейный участок, играющий вспомогательную роль, используется

для исключения отраженной волны от края линейного слоя, на нелинейном участке функции  $\varepsilon(z)$  выбирается из условия простоты получения решения. Рассматриваемый случай нормального падения не нарушает общности, поскольку наклонное падение простым образом сводится к нормальному заменой переменных [3]. А при предполагаемом условии  $\varepsilon'' \ll \varepsilon$  наиболее ярко проявляются "резонансные" свойства особой точки  $\varepsilon = 0$ .

В соответствии с предлагаемым методом решения непрерывно неоднородный слой представляется совокупностью однородных подслоев переменной толщины, так что в соседних подслоях  $\delta^2 \equiv \varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} = \text{const}$ ,  $(\delta^2 - 1) \ll 1$ [4]. Применение конечных разностей с переменным шагом по аргументу — толщине подслоев, согласованной с изменением волнового сопротивления среды, позволяет сократить количество независимых параметров слоя. Тем самым упрощаются теоретические исследования и создается эффективный алгоритм расчета.

1. Пусть плоская волна нормально падает на неоднородный плоский слой произвольной толщины от  $z_1$  до  $z_N$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_N$ ) диэлектрика без потерь при  $\Delta\phi \ll 1$  и  $\varepsilon > 0$  (рис. 1). Слой состоит из двух частей: линейной от  $z_1$

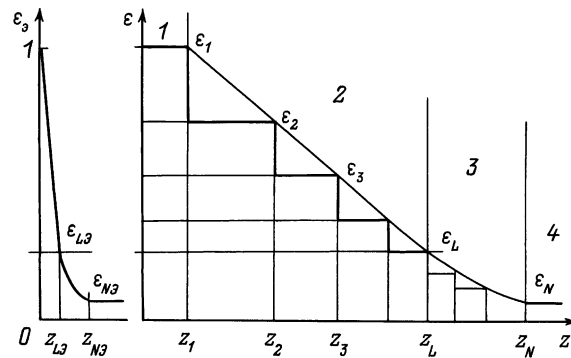


Рис. 1. Подобные слои  $a$  и  $b$  имеют эквивалентные коэффициенты отражения при  $gr(\varepsilon_{1a}) = gr(\varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_{1a}/\varepsilon_{Na} = \varepsilon_1/\varepsilon_N$ ,  $\varepsilon_{1a}/\varepsilon_{La} = \varepsilon_1/\varepsilon_L$  (разбиение на однородные подслои предполагает  $\varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} = \text{const}$ ).

до  $z_L$  (в области 2) при  $\varepsilon(kz) = \varepsilon(kz_1) + \alpha_1 k(z - z_1)$  и нелинейной от  $z_L$  до  $z_N$  (в области 3) при  $gr(\varepsilon) \equiv \alpha/(\varepsilon)^{3/2} = gr(\varepsilon_L) = \text{const}$ , где  $\alpha \equiv d\varepsilon/d(kz)$ ,  $\alpha_1 < 0$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве. На слое функция  $\varepsilon(kz)$  непрерывна вместе с производной и  $|gr(\varepsilon_1)| \gg 1$  (так как  $\Delta\phi \ll 1$ ). До слоя (в области 1) при  $z < z_1$  ( $\varepsilon = \varepsilon_1$ ) и за слоем (в области 4) при  $z > z_N$  ( $\varepsilon = \varepsilon_N$ ) среда однородная, за слоем имеется только проходящая волна.

Зададим решение волнового уравнения

$$\frac{d^2 E}{d(kz)^2} + \varepsilon(kz)E = 0 \quad (1)$$

в однородных подслоях (в областях 2, 3), толщина которых определяется условием  $\delta^2 = \varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} = \text{const}$  в виде

$$E_x^n = A^n \exp(-i\sqrt{\varepsilon_n}kz) + C^n \exp(i\sqrt{\varepsilon_n}kz), \quad (2)$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $A^1 = 1$ ;  $C^N = 0$ .

Тогда для коэффициентов отражения  $R^n = C^n/A^n$  и амплитуд волн  $A^n$  после удовлетворения граничных условий на краях однородных подслоев получим следующие выражения:

$$R^n \exp\{2i\rho_n\} = R_0^n = \frac{r_n + R_0^{n+1} \exp\{i\Delta\rho_{n+1}\}}{1 + r_n R_0^{n+1} \exp\{i\Delta\rho_{n+1}\}}, \quad (3)$$

$$A^{n+1} = \exp\left\{-i\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \sum_{p=1}^n \rho_p\right\} P^{n+1},$$

$$P^n = \prod_{m=1}^{n-1} \left[1 + \frac{\delta - 1}{2}(1 - R_0^m)\right], \quad (4)$$

где  $n = 1, \dots, N - 1$ ;  $R_0^N = 0$ ;  $\Delta\rho_N = 0$ ;  $\rho_n = \sqrt{\varepsilon_n}kz_n$ ;  $\varepsilon_L/\varepsilon_1 = \delta^{-2(L-1)}$ ;

$$r_n = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}; \quad \Delta\rho_{n+1} = \frac{2 \cdot (\delta^2 - 1)}{v_n gr(\varepsilon_1)}; \quad (5)$$

$$v_n = \begin{cases} \delta^{3n} & \text{при } n < L, \\ 1 & \text{при } n > L. \end{cases}$$

Заметим, что коэффициент отражения  $R_0^n$  задается в локальной системе координат с центром  $0_n$ , который определяется условием  $z_n = 0$ . В рекуррентных соотношениях (3) множитель  $\rho_n = \sqrt{\varepsilon_n}kz_n$  вынесен в левую часть, функция  $gr(\varepsilon_n)$  представлена через  $gr(\varepsilon_1)$  (благодаря используемому способу разбиений), поэтому  $R_0^n$  не зависит явно от  $\varepsilon_n$  и  $kz_n$ .

2. Решение (2)–(5) является точным для дискретной модели среды. Записанные в конечных разностях рекуррентные соотношения (3) при  $N \Rightarrow \infty$  ( $\delta^2 \Rightarrow 1$ ) сводятся к дифференциальному уравнению Риккати, демонстрируя переход к непрерывной модели среды. А поскольку  $\delta$  и  $N$  взаимосвязаны через равенство  $\varepsilon_1/\varepsilon_N = \delta^{2(N-1)}$ , то

при заданной функции  $\varepsilon(kz)$  коэффициент отражения  $R_0^1$  при  $N \Rightarrow \infty$  становится функцией двух переменных  $R_0^1 = f(gr(\varepsilon_1), (\varepsilon_N/\varepsilon_1))$ . Решение в области 3 легко получается из уравнения Риккати, оно дано в Приложении. Поэтому, используя (5П), примем в (3)  $N = L$ ,  $R_0^N = R_0$  (если  $\varepsilon_N \Rightarrow 0$ , то  $R_0 = \gamma + i\beta$ ).

3. Зависимость  $R_0^1$  от двух параметров позволяет описать принцип подобия слоев, выделив, например, линейные подобные слои, у которых эти два параметра равны, но отличаются значения  $\alpha_1$  и  $\varepsilon_1$  ( $gr(\varepsilon_1) = \alpha_1/(\varepsilon_1)^{3/2}$ ) [5]. Если в рассматриваемом случае  $\Delta\phi \ll 1$  в (4) пренебречь фазовым множителем в фигурных скобках, т.е. принять  $A^n \cong P^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , то у подобных слоев эквивалентны коэффициенты отражения и равны амплитуды волн. Принцип подобия имеет место для слоев из двух частей при дополнительном условии равенства у них параметра  $\varepsilon_L/\varepsilon_N$ , подобные слои показаны на рис. 1.

4. Проведем исследование решения для слоя из двух частей при  $\varepsilon_N \Rightarrow 0$ . В этом случае  $R_0^1 = f(gr(\varepsilon_1), \varepsilon_L/\varepsilon_1)$  и из (3) имеем, что  $|R_0^1| \Rightarrow 1$  при  $\varepsilon_L/\varepsilon_1 \Rightarrow 0$ . Последнее тем более справедливо при  $\varepsilon_1 \Rightarrow 0$  ( $\Delta\phi \Rightarrow 0$ ), а значит, коэффициент прохождения  $S_N/S_1 = 1 - |R_0^1|^2 \Rightarrow 0$  при  $\varepsilon_L/\varepsilon_1 \Rightarrow 0$  и волна по плотности потока не доходит до точки  $\varepsilon = 0$ , откуда  $|H_y| \Rightarrow 0$  при  $\varepsilon_L \Rightarrow 0$ .

Теперь определим сходимость произведения (4), принимая  $L \Rightarrow \infty$  ( $\varepsilon_L \Rightarrow 0$ ) и используя признак сходимости Доламбера соответствующего ряда. Тогда при достаточном больших  $m$  получим, что

$$q = \frac{r_{m+1}}{r_m} [1 + r_m (1 + R_0^{m+1})] > 1,$$

т.е. произведение (4) расходится, а значит, возможно  $|E_x^L| \Rightarrow \infty$ . Аналогично из уравнения для  $H$  в [6] получено, что возможно  $|1/H_y| \Rightarrow \infty$  при  $\varepsilon_L \Rightarrow 0$ .

5. Если в (3) представить  $R_0^n$  в виде  $R_0^n = |R_0^n|(1 + i\Delta\phi^n)$ , то при  $\Delta\phi^n \ll 1$  переменные разделяются и решение, которое в этом случае не зависит от вида функции  $\varepsilon(kz)$ , представляется в виде

$$|R_0^n| = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_N} - 1}{\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_N} + 1}. \quad (6)$$

В первом приближении для  $|R_0^1|$  справедлива формула (6), а в следующем — (9П). Напряженность магнитного поля, как и коэффициент отражения, мало критична к функции  $\varepsilon(kz)$ , что позволяет для линейного слоя пользоваться формулой (9П) из Приложения. Но для напряженности электрического поля ( $E$ ) положение иное. Так, из формулы (8П) следует, что  $E$  существенно зависит от функции  $\varepsilon(kz)$  на слое. Поэтому для расчета линейного слоя целесообразно использовать соотношения (3)–(5).

6. Отметим неустойчивость решения по  $\Theta$  в полупространстве  $\varepsilon > 0$ . Переходя к наклонному падению заменой  $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon - \varepsilon_1 \sin^2 \Theta_1$ , легко показать, что сколь угодно малое  $\Delta\Theta_1$  (обусловленное, например, непараллельностью подслоев) приводит к тому, что направление вектора Умова–Пойнтинга  $\Theta \Rightarrow \pi/2$  при  $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \Delta\Theta_1^2$ .

Таким образом, волна не проходит в область  $\varepsilon < 0$ . Полученный нами результат находится в соответствии с рассмотренным выше решением для случая  $\Theta \equiv 0$  и уточняет данное в [3] решение для линейного слоя через функции Эйри. Приближенный характер последнего решения при  $\alpha_1 \ll 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1$  отметил еще Фок [7]. В нем ошибка при вычислении напряженности электрического поля возрастает с уменьшением  $\varepsilon$  и из энергетических соображений определяется величиной  $\varepsilon^{1/4}E$ . Во многих практических случаях, например, в расчетах атмосферной плазмы этой ошибкой можно пренебречь.

7. Из двух полученных решений для линейного слоя при  $\varepsilon_L \Rightarrow 0$  имеем, что  $|R| \Rightarrow 1$ , а значит,  $S_L/S_1 = 1 - |R|^2 \Rightarrow 0$ . Принцип подобия линейных слоев позволяет результаты исследований полей на скачке  $\varepsilon$  перенести на окрестность нуля  $\varepsilon$ , где функция  $\varepsilon(kz)$  меняет знак. В результате точное решение позволяет выделить особую плоскость  $\varepsilon = 0$ , так что  $S_L/S_1 \Rightarrow 0$ ,  $E \Rightarrow \infty$  и  $H \Rightarrow 0$  при  $\varepsilon \Rightarrow 0$ . Точка  $\varepsilon = 0$  является критической точкой, поведение решения около которой качественно зависит от малых изменений параметров среды.

Наличие в физической задаче кривизны поверхности  $\varepsilon = \text{const}$  приведет к "сворачиванию" этой поверхности при  $\varepsilon \Rightarrow 0$  в точку, так как при этом  $\sqrt{\varepsilon}kr \Rightarrow 0$ , что при  $\sqrt{\varepsilon}kr \sim 1$  вызовет дифракционные потери. Наличие поглощения устранил это явление и приведет к тому, что  $E$  станет конечным при  $\varepsilon = 0$ , особая плоскость "расплывается" в слой, толщина ( $\Delta z$ ) которого  $k\Delta z \sim |\text{Im}(\varepsilon - i\varepsilon'')/\alpha_1|$ . В зависимости от величины поглощения волна либо будет распространяться вдоль слоя, либо пройдет в область  $\varepsilon < 0$ . При этом резкое возрастание  $E$  может привести к нелинейным эффектам.

В окрестности точки  $\varepsilon = 0$  возможно ветвление решения (решение условно многозначно), что допускается описанным выше принципом подобия слоев ( $\varepsilon_1, \varepsilon_N$ ), у которых эквивалентны коэффициенты отражения, а поля за которыми приблизительно равны. Решение рассматриваемой математической задачи является основным, оно соответствует предельному переходу  $\varepsilon'' \Rightarrow 0$ ,  $\Theta \Rightarrow 0$ ,  $r \Rightarrow \infty$  в физической задаче прохождения волной неоднородного слоя диэлектрика. Имеется бифуркационное множество решений, отвечающих от основного при малых изменениях параметров.

8. При значении фундаментального параметра  $|gr(\varepsilon)| \ll 1$  справедлива коротковолновая асимптотика. Так, в [5] дан количественный критерий ее применимости для заданного коэффициента отражения. При  $|gr(\varepsilon)| \gg 1$  применима длинноволновая асимптотика для заданной величины  $S/S_1$ , причем качественно различные решения в этом случае могут быть описаны предлагаемым методом решения. Известное приближенное решение для линейного слоя через функции Эйри является одним из возможных решений.

9. Предложенный метод решения из-за сокращения количества независимых параметров в выражении для

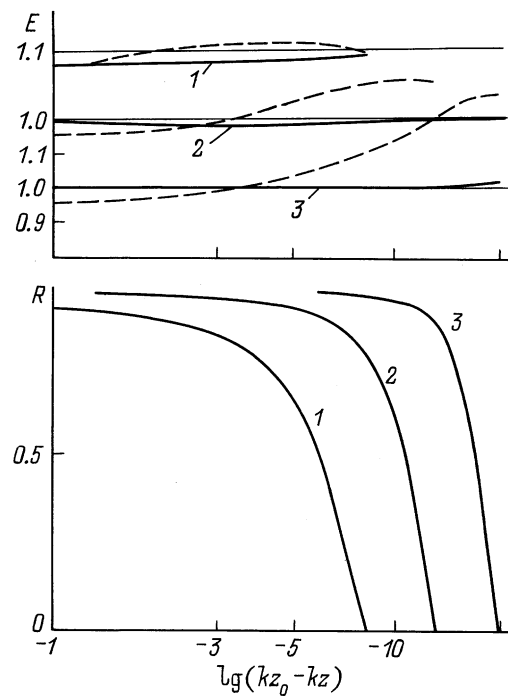


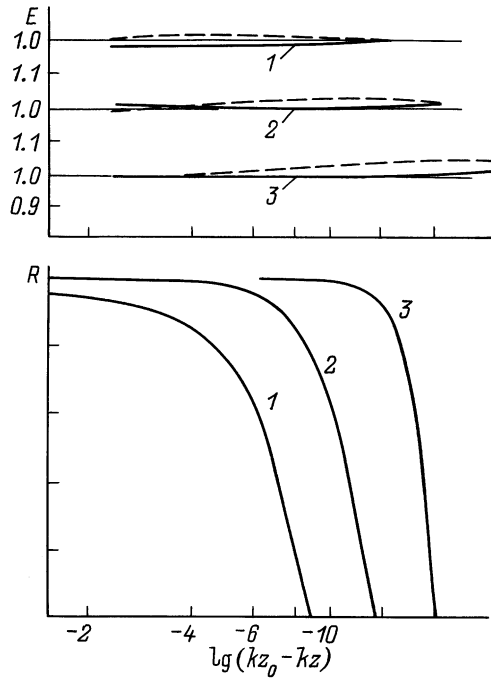
Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения  $R$  и напряженности электрического поля  $E$  от координаты  $z$  при  $gr(\varepsilon_1) = 10$  для неоднородных слоев разной толщины:  $\varepsilon_1/\varepsilon_N = 0.2 \cdot 10^4$  (1),  $0.2 \cdot 10^6$  (2),  $0.2 \cdot 10^9$  (3).

коэффициента отражения, кроме аналитических исследований, эффективен в расчетных исследованиях, например, связанных с проектированием антенных систем космических аппаратов [8, доб. 2].

Результаты расчетов на ЭВМ коэффициентов отражения  $R$  и полей  $E$  приводятся на рис. 2, 3 для значений  $gr(\varepsilon_1)$ , равных 10 и 20 соответственно. При этом  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $z_0$  соответствует точке  $\varepsilon = 0$ , сплошными кривыми показаны результаты расчетов для линейного слоя, а штриховыми — для исследуемого нелинейного слоя. Как следует из формулы (4), в рассматриваемом диапазоне изменения параметров  $A^n \cong P^n$ , поэтому решение не зависит от  $\varepsilon_1$ , т.е.  $R = f(gr(\varepsilon_1), \varepsilon_1/\varepsilon_N)$ ,  $E = f(gr(\varepsilon_1), \varepsilon_1/\varepsilon_N)$ . Это подтверждается численными исследованиями. Заметим, что решение для  $E$  в случае линейного слоя менее критично к изменению параметров, чем в случае нелинейного слоя, так как  $\rho_n$  в первом случае меньше, чем во втором. Количественный критерий применимости длинноволнового приближения может быть дан из сравнения полей для рассматриваемых функций  $\varepsilon(kz)$ . Для контроля точности расчета используется закон сохранения энергии.

Исходя из расчетов, в качестве критерия применимости длинноволнового приближения  $gr(\varepsilon) \gg 1$  при  $\varepsilon_1/\varepsilon_N \gg 1$ , будем использовать условие  $gr(\varepsilon) > 20$ .

10. При учете влияния поглощения в физической задаче для линейного слоя, пересекающего точку  $\varepsilon = 0$ , введем на нелинейном участке ( $\varepsilon_L, \varepsilon_N$ )  $\varepsilon'' = \text{var}$  так,



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента отражения  $R$  и напряженности электрического поля  $E$  от координаты  $z$  при  $gr(\varepsilon_1) = 20$  для неоднородных слоев разной толщины (1–3 — то же, что и на рис. 2).

чтобы  $\varepsilon' = \varepsilon - i\varepsilon''$  удовлетворяло формуле (1П) из Приложения. В зависимости от величины  $\varepsilon_L''$  функция  $\varepsilon(kz)$  либо пересекает ось  $z$  при  $\varepsilon_L'' \sim \varepsilon_L$ , либо при  $\varepsilon_L'' \ll \varepsilon_L$  асимптотически приближается к оси  $z$  ( $\varepsilon > 0$ )  $z$ . Применительно ко второму случаю дадим следующую оценку пригодности рассматриваемой модели  $\varepsilon'' \ll 0.1\alpha_1^{2/3}$ .

Основные результаты работы состоят в следующем. Предложен метод решения волнового уравнения (1) через элементарные функции, использующий конечные разности с переменным шагом, который согласован с изменением волнового сопротивления среды без поглощения. Сокращение количества независимых параметров слоя и применение закона сохранения позволило упростить исследования полей на скачке  $\varepsilon$ , что оправдано при малых потерях. Описанный принцип подобия неоднородных слоев позволил результаты исследований полей на скачке  $\varepsilon$  перенести на окрестность нуля  $\varepsilon$ .

Выявлена критическая точка  $\varepsilon = 0$ , решение вблизи которой качественно зависит от малых изменений параметров. Причем для коэффициента прохождения слоя, напряженностей электрического и магнитного полей:  $S_N/S_1 \Rightarrow 0$ ,  $E \Rightarrow \infty$  и  $H \Rightarrow 0$  при  $\varepsilon \Rightarrow 0$ .

Рассмотренная в работе модель легко может быть обобщена на случай среды с потерями, а предложенный метод решения волнового уравнения может быть широко применен в математической физике.

## Приложение

Рассмотрим решение волнового уравнения (1) на нелинейном слое в области 3 (рис. 1), где функция  $\varepsilon(kz)$  задается условием  $gr(\varepsilon) = gr(\varepsilon_L) = \text{const}$  и в системе координат с центром  $0_n$  при  $z_L = 0$  представляется зависимостью

$$\varepsilon = \frac{\beta^2}{4(kz + b)^2}, \quad (1П)$$

где

$$b = \frac{\beta}{-2\sqrt{\varepsilon_L}} = \frac{2\varepsilon_L}{-\alpha_1}, \quad \beta = 4/gr(\varepsilon_L), \quad |\beta| \ll 1,$$

а волновое уравнение (1) имеет точное решение в элементарных функциях, полученное впервые Рэлеем [9],

$$E_3 = C_1(kz + b)^{r_1} + C_2(kz + b)^{r_2}, \quad (2П)$$

где  $r_{1,2} = 0.5(1 \pm \gamma)$ ,  $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Заметим, что  $E_3 \Rightarrow 0$  при  $kz \Rightarrow -b$ , где  $\varepsilon$  имеет особенность (полюс), а решение для случая  $\beta^2 > 1$  рассмотрено в [3]. В свою очередь поля в областях 2 и 4 соответственно имеют вид

$$E_4 = A_N \exp(-i\sqrt{\varepsilon_N}kz),$$

$$E_2 = \exp(-i\sqrt{\varepsilon_L}kz) + R_0 \exp(i\sqrt{\varepsilon_L}kz). \quad (3П)$$

На границе при  $z = z_L$  должны соблюдаться условия

$$E_2 = E_3, \quad \frac{dE_2}{d(kz)} = \frac{dE_3}{d(kz)}.$$

Используя их и аналогичные граничные условия при  $z = z_N$ , а кроме этого, выражения (2П), (3П), для коэффициента отражения  $R_0$  получим следующее выражение:

$$R_0 + i\beta = \gamma \frac{(c + 1)}{(c - 1)},$$

где

$$C = -\frac{(\gamma + i\beta)}{(\gamma - i\beta)}h, \quad h = \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_N}\right)^{\gamma/2}, \quad (4П)$$

или после ряда преобразований

$$R_0 = \frac{(h - 1)[\gamma(h + 1) - i\beta(h - 1)]}{(h + 1)^2 - 4h\beta^2},$$

$$|R_0|^2 = \frac{(h - 1)^2}{(h + 1)^2 - 4h\beta^2}. \quad (5П)$$

При  $h \gg 1$  имеем  $R_0 = \gamma + i\beta$ . Далее, принимая  $r_1 = 1 - \beta^2/4$ ,  $r_2 = \beta^2/4$ , получим, что

$$E_2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_L}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\beta^2/4} \left[ \frac{\sqrt{\varepsilon_N}}{\gamma\sqrt{\varepsilon}} (-3/2\beta^2 + \beta^3 + i\beta(1 - 3/2\beta^2)) + 2 - \beta^2/2 - i\beta \right], \quad (6П)$$

а из условия  $E_3 = E_4$  на границе  $z = z_N$  будем иметь

$$E_2|_{z=z_N} = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_L}}{\sqrt{\varepsilon_N}} \right)^{\beta^2/4} [2 - 2\beta^2 - i\beta(2 - 2\beta^2)],$$

$$A_N = \exp \left[ i \frac{\beta}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_N}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) \right] E_2|_{z=z_N}. \quad (7\Pi)$$

Подстановкой  $A_N$  в (3\Pi) заканчивается математическое решение задачи.

Решение для коэффициента отражения  $R_0$  от рассматриваемого нелинейного слоя может быть получено непосредственно из уравнения Риккати и в этом случае оно адекватно выражению (4\Pi). Если среда без потерь, то можно использовать закон сохранения. Тогда коэффициент прохождения — отношение средних значений вектора Пойнтинга для проходящей и падающей волн определяется соотношением  $S_N/S_1 = 1 - |R_0|^2$ , откуда для полей в области 4 получим

$$|E_4|^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_L}}{\sqrt{\varepsilon_N}} (1 - |R_0|^2) = 4 \left( \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_N} \right)^{\beta^2/4} (1 - \beta^2), \quad (8\Pi)$$

$$|H_4|^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_N}}{\sqrt{\varepsilon_L}} (1 - |R_0|^2) = 4 \left( \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_L} \right)^{1-\beta^2/4} (1 - \beta^2), \quad (9\Pi)$$

где

$$\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_N} = \frac{|\alpha_1|kz}{2\varepsilon_L} + 1.$$

Из (5\Pi), (8\Pi) и (9\Pi) следует, что  $|R_0| \Rightarrow 1$ ,  $E_4 \Rightarrow \infty$  и  $H_4 \Rightarrow 0$  при  $\varepsilon \Rightarrow 0$  — это первое приближение для линейного слоя, характеризуемого величиной  $gr(\varepsilon_1) = 4/\beta$ . Заметим, что  $E$  при  $\beta \ll 1$  весьма существенно зависит от функции  $\varepsilon(kz)$  в отличие от  $H$  и  $R_0$  из (5\Pi). Хотя точные решения (8\Pi), (9\Pi) описывают поле только за слоем, в отличие от выражения (6\Pi) они привлекательны простотой записи. Анализ выражения (6\Pi) показывает, что функция  $dE_2/dkz = 0$  при  $\varepsilon \cong 10\varepsilon_N$  и затем возрастает.

## Список литературы

- [1] Жекулин Л.А. // ЖЭТФ. 1934. Т. 4. Вып. 1. С. 76–95.
- [2] Пермьяков В.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. № 8. С. 1264–1265.
- [3] Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 683 с.
- [4] Козлов И.П. // Распространение и дифракция электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1993. С. 104–113.
- [5] Козлов И.П. // РиЭ. 1997. № 2. С. 142–146.
- [6] Козлов И.П. // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. М., 1996. Т. 4. № 4. С. 63–69.
- [7] Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 560 с.
- [8] Kozlov I.P. // 45<sup>th</sup> Congr. of the Intern Astr. Federation. (IAF-94-U.2.469). Jerusalem, 1994. 4 с.
- [9] Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955.