

01;03

О некоторых закономерностях реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 3 марта 1998 г.)

Получено дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний полусфероидального выступа (сплюснутого и вытянутого) на плоской поверхности проводящей жидкости в однородном электростатическом поле, параллельном оси симметрии выступа. Для основной моды реализующихся капиллярных колебаний выступа найдена критическая зависимость параметра, характеризующего его устойчивость во внешнем электростатическом поле, от величины квадрата его эксцентриситета при вытягивании выступа от сплюснутого полусфероида к вытянутому. Такое изменение формы приводит к снижению пороговой величины напряженности поля, вызывающего неустойчивость выступа.

Известно [1–6], что бесконечная граница раздела вакуума и идеально проводящей жидкости плотности ρ с поверхностным натяжением σ в перпендикулярном к свободной поверхности жидкости электростатическом поле E_0 неустойчива по отношению к возмущениям вида

$$\zeta = \zeta_0 \exp(St - kx) \quad (1)$$

(S — комплексная частота, t — время, k — волновое число, x — горизонтальная координата), если

$$W_{TF} \geq \frac{1}{ak} + ak; \quad a = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}};$$

$$W_{TF} = \frac{E_0^2}{4\pi(\rho g \sigma)^{1/2}} \equiv \frac{E_0^2 a}{4\pi \sigma}. \quad (2)$$

Здесь a — капиллярная постоянная; g — ускорение свободного падения; W_{TF} — безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость поверхности жидкости по отношению к индуцированному на ней полю E заряду.

Наименьшее значение напряженности поля E_0 , в котором становится неустойчивой наиболее легко возбудимая мода с $k = 1/a$, т.е. реализуется неустойчивость Тонкса–Френкеля (НТФ), определится из критического значения параметра Тонкса–Френкеля $W_{TF} = 2$ [1,2]. Возмущения плоской равновесной свободной поверхности жидкости вида (1) существуют уже в силу теплового движения молекул, при этом $\zeta_0 \approx \sqrt{(kT)/\sigma}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, и при достаточно большой величине поверхностного заряда (поля E) и выполнении условия (2) амплитуды некоторых из волн вида (1) начинают экспоненциально расти со временем.

Сформулированные утверждения справедливы в рамках линейной теории неустойчивости ($\zeta_0 \ll 1/k$), которая предсказывает экспоненциальный рост амплитуды возмущения до значений, при которых амплитуда возмущения ζ сравнится с длиной волны $1/k$, т.е. $\zeta < 1/k$; при $\zeta \gtrsim 1/k$ результатами этой теории руководствоваться

уже нельзя. Ясности в понимании нелинейной стадии развития НТФ в настоящее время нет. Тем не менее теоретически [1–3] и экспериментально [7] показано, что результатом нелинейной стадии развития НТФ является образование так называемых конусов Тейлора — выступов на поверхности жидкости, имеющих вытянутую полусферическую форму с конусообразной вершиной, с которых происходит эмиссия сильно заряженных капелек, уносящих избыточный заряд [8–10]. Механизм образования конусов Тейлора неоднократно являлся предметом исследования [3,7,11–14]. Тем не менее в силу нелинейности задачи корректные результаты получены лишь для начальной и конечной стадий образования таких выступов. Основные же закономерности роста эмиссионных выступов известны лишь на качественном уровне первой работы Тонкса [1], хотя сама проблема представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями.

Для того чтобы сделать аргументированные выводы о промежуточной стадии эволюции конусов Тейлора, представляется полезным исследовать вопрос об устойчивости полусфероидальных выступов (сплюснутых и вытянутых) на плоской поверхности проводящей жидкости в перпендикулярном к ней электростатическом поле E . Решая подобную задачу и обращая внимание на зависимость критической для реализации неустойчивости выступов величины напряженности электростатического поля от величины сфероидальной деформации, можно получить информацию о закономерностях эволюции эмиссионных выступов, образующихся при реализации неустойчивости, когда они в своем росте проходят полусферическую форму.

Поскольку нас интересуют именно критические условия реализации неустойчивости полусфероидальных выступов с различными эксцентриситетами, то, исключая из рассмотрения вопрос о притоке массы в растущий выступ, целесообразно рассмотреть модельную задачу об устойчивости полусфероидальной капли с заданным экс-

центриситетом, лежащей на твердой электропроводной подложке в электростатическом поле, перпендикулярном подложке. В такой постановке задача может представлять интерес для трактовки феномена огней св. Эльма [9,10], для объяснения резкого усиления энергопотерь на линиях электропередач во время дождя [15], при анализе проблемы взрыво- и пожаробезопасности емкостей для хранения легко воспламеняющихся жидкостей [16].

1. Рассмотрим каплю несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ , лежащую на плоской проводящей подложке. Пусть вся система находится во внешнем однородном электростатическом поле, перпендикулярном плоскости подложки. Примем, что капля имеет форму сплюснутого осесимметричного полусфероида с уравнением свободной поверхности в сферической системе координат с началом в центре основания капли

$$r(\Theta) = \frac{R(1 - e_1^2)^{1/3}}{(1 - e_1^2 \sin^2 \Theta)^{1/2}}; \quad e_1^2 = 1 - \frac{d^2}{c^2},$$

d и c — меньшая и большая полуоси сфероида; d — ось симметрии; R — радиус полусферы, объем которой равен объему капли.

Пусть $\xi(\Theta, t)$ есть возмущение равновесной полусфероидальной формы капли, связанное с тепловым движением молекул жидкости. Рассмотрим задачу о капиллярных колебаниях и устойчивости поверхности такой капли. Решение проведем в приближении, линейном по возмущению полусфероидальной формы капли $|\xi|/R$ и по квадрату эксцентриситета e_1^2 с точностью до слагаемых $\sim e_1^2 |\xi|/R$. В этом приближении уравнение поверхности капли запишется в виде

$$r = r(\Theta) + \xi \approx R \left[1 - e_1^2 \frac{h(\Theta)}{R} + \frac{\xi}{R} \right];$$

$$\frac{h(\Theta)}{R} \equiv \frac{1}{6} (3 \cos^2 \Theta - 1). \quad (3)$$

Когда капля имеет форму вытянутого полусфероида, уравнение ее свободной поверхности имеет вид

$$r(\Theta) = \frac{R(1 - e_2^2)^{1/6}}{(1 - e_2^2 \cos^2 \Theta)^{1/2}}; \quad e_2^2 = 1 - \frac{c^2}{d^2},$$

d и c — большая и меньшая полуоси сфероида, d — ось симметрии.

Разложение этого выражения по степеням e_2^2 отличается от (3) лишь знаком коэффициентов при e_1^2 и e_2^2

$$r = r(\Theta) + \xi \approx R \left[1 + e_2^2 \frac{h(\Theta)}{R} + \frac{\xi}{R} \right];$$

$$\frac{h(\Theta)}{R} \equiv \frac{1}{6} (3 \cos^2 \Theta - 1). \quad (3a)$$

В дальнейшем будем считать e^2 некоторым формальным действительным параметром, освобожденным от

требования неотрицательности квадрата эксцентриситета, и решать задачу одновременно для сплюснутой полусфероидальной формы капли с квадратом эксцентриситета $e_1^2 \equiv -e^2$ (когда $e^2 < 0$) и для вытянутого полусфероида с квадратом эксцентриситета $e_2^2 \equiv e^2$ (если $e^2 > 0$).

Поскольку жидкость принимается идеальной, то волновое движение в капле будет потенциальным. Полная математическая формулировка задачи о расчете капиллярных колебаний такой капли имеет вид

$$\Delta \psi = 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi \rightarrow 0; \quad (5)$$

$$r = r(\Theta) + \xi; \quad 0 \leq \Theta < \frac{\pi}{2}: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} \approx (\mathbf{n} \cdot \nabla) \psi; \quad (6)$$

$$\Delta \mathbf{F} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathfrak{F}_E = \mathfrak{F}_\sigma; \quad (7)$$

$$\Delta \Phi = 0; \quad (8)$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow \Phi_\infty = -E_0 z = -E_0 r \cos \Theta; \quad (9)$$

$$r = r(\Theta) + \xi; \quad \Theta = \frac{\pi}{2}: \quad \Phi = \text{const} = 0. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{n} — орт нормали к поверхности капли; $\psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей; Φ — потенциал электрического поля; $\Delta \mathbf{F}$ — перепад давлений внутри и вне капли; \mathfrak{F}_E — давление электрического поля; \mathfrak{F}_σ — давление сил поверхностного натяжения.

2. Представим возмущение полусфероидальной поверхности капли $\xi(\Theta, t)$ в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(t) P_j(\cos \Theta), \quad (11)$$

где $Z_j(t)$ — зависящие от времени амплитуды отдельных мод капиллярных колебаний капли.

При колебаниях поверхности капли ее объем остается неизменным

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \Theta d\Theta \int_0^{r(\Theta)+\xi} r^2 dr - \frac{2\pi}{3} R^3$$

$$\approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z_j(t)}{R} 3 \int_0^1 P_j(x) dx = 0.$$

Здесь пренебрегается слагаемым $\sim e^2 \xi$ ввиду независимости сфероидальной деформации полусфероида и теплового возмущения свободной поверхности жидкости. Для полиномов Лежандра на полусфере справедливы интегральные соотношения [17]

$$\int_0^1 P_m(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0; \\ 0, & \text{если } m = 2n; \\ A_m, & \text{если } m = 2n + 1; \end{cases}$$

$$\int_0^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2n+2}, & \text{если } m = n; \\ 0, & \text{если } n - m = 2n \neq 0; \\ B_{nm}, & \text{если } m = 2n + 1 \text{ и } n \text{ четное;} \end{cases}$$

$$A_j \equiv \frac{(-1)^{2m}(2m)!}{2^{2m+1}m!(m+1)!};$$

$$B_{nm} \equiv \frac{(-1)^{\frac{n+2j}{2}}(2m+1)!n!}{2^{n+2m}(n-2m-1)(n+2m+2) \left[\left(\frac{n}{2} \right)! m! \right]^2}. \quad (12)$$

С учетом (12) условие постоянства объема капли примет вид

$$3 \frac{Z_0(t)}{R} + \sum_{j=0}^{\infty} 3A \frac{Z_{2j+1}(t)}{R} = 0,$$

следовательно,

$$Z_0 = Z_{2j+1} = 0; \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

т. е. нулевая мода и все нечетные моды не возбуждаются. Поэтому выражение (11) можно переписать следующим образом:

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{j=1}^{\infty} Z_{2j}(t) P_{2j}(\cos \Theta). \quad (14)$$

Решение уравнения (4), удовлетворяющее граничному условию (5), в сферической системе координат имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) r^m P_m(\cos \Theta). \quad (15)$$

Здесь $C_m(t)$ — зависящие от времени амплитуды потенциальных движений жидкости, связанных с различными модами. Запишем орт нормали к поверхности возмущенного полусфероида в линейном по e^2 и $|\xi|/R$ приближении

$$\mathbf{n} \approx \left[1 - e^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} \frac{\partial \xi(\Theta, t)}{\partial \Theta} \right] \mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \left[e^2 \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} + \frac{\partial \xi(\Theta, t)}{\partial \Theta} - e^2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} (h(\Theta)\xi(\Theta, t)) \right] \mathbf{e}_{\Theta}, \quad (16)$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_{Θ} — орты сферической системы координат.

Кинематическое граничное условие (6) с учетом выражения (16) примет вид

$$r \approx R \left[1 + e^2 \frac{h(\Theta)}{R} \right]; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} \approx \frac{\partial \psi}{\partial r} - e^2 \frac{1}{R} - \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} \frac{1}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}. \quad (17)$$

Положим, что

$$Z_m(t) = Z_m \exp(St). \quad (18)$$

Подставляя (14), (15) в (17), приведем кинематическое граничное условие к виду

$$\sum_{j=1}^{\infty} SZ_{2j}(t)P_{2j}(\cos \Theta) \approx \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t)R^{(m-1)} \times \left[mP_m(\cos \Theta) + e^2 m(m-1) \frac{h(\Theta)}{R} P_m(\cos \Theta) - e^2 \frac{1}{R} \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} \frac{\partial P_m(\cos \Theta)}{\partial \Theta} \right]. \quad (19)$$

В нижеследующих вычислениях использованы рекуррентные разложения для полиномов Лежандра [17]

$$\cos \Theta P(\cos \Theta) = a_m P_{m+1}(\cos \Theta) + b_m P_{m-1}(\cos \Theta);$$

$$\frac{h(\Theta)}{R} P_m(\cos \Theta) = \frac{1}{2} \mu_m P_{m+2}(\cos \Theta) + \varkappa_m P_m(\cos \Theta)$$

$$+ \frac{1}{2} \zeta_m P_{m-2}(\cos \Theta);$$

$$\sin \Theta \frac{dP_m(\cos \Theta)}{d\theta} = ma_m [P_{m+1}(\cos \Theta) - P_{m-1}(\cos \Theta)];$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} \frac{dP_m(\cos \Theta)}{d\theta} = -m\mu_m P_{m+2}(\cos \Theta)$$

$$+ 3\varkappa_m P_m(\cos \Theta) + (m+1)\zeta_m P_{m-2}(\cos \Theta);$$

$$a_m \equiv \frac{(m+1)}{(2m+1)}; \quad b_m \equiv \frac{m}{(2m+1)}; \quad \mu_m \equiv a_m a_{m+1};$$

$$\varkappa_m \equiv \frac{m(m+1)}{3(2m-1)(2m+3)}; \quad \zeta_m \equiv b_{m-1} b_m. \quad (20)$$

Используя (20), преобразуем (19) к виду

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ SZ_m(t) \delta_{m,2j} - \left[m + e^2 (m(m-1) - 3) \varkappa_m \right] C_m(t) R^{(m-1)} - e^2 \frac{1}{2} (m-1)(m-2) \mu_{m-2} C_{m-2}(t) R^{(m-3)} - e^2 \frac{1}{2} \left[(m+2)(m+1) - 2(m+3) \right] \zeta_{m+2} C_{m+2}(t) R^{(m+1)} \right\} \times P_m(\cos \Theta) = 0.$$

В силу ортогональности полиномов Лежандра это равенство справедливо, если обращаются в нули коэффициенты при разных P_m . В результате получим бесконечную систему линейных связанных уравнений относительно коэффициентов $C_m(t)$. При $m = 2j$, где $j = 1, 2, 3, 4, \dots$, система будет неоднородной и, решая ее методом последовательных приближений, несложно найти

$$C_{2j}(t) \approx \frac{1}{2jR^{(2j-1)}} \left\{ SZ_{2j}(t) - e^2 \left[\frac{2j(2j-1)-3}{2j} \varkappa_{2j} SZ_{2j}(t) + \frac{(j-1)(2j-1)}{2(j-1)} \mu_{2j-2} SZ_{2j-2}(t) + \frac{(j+1)(2j+1)-(2j+3)}{2(j+1)} \zeta_{2j+2} SZ_{2j+2}(t) \right] \right\}. \quad (21)$$

При $m = 2j + 1$, где $j = 0, 1, 2, \dots$, получим однородную систему уравнений с отличным от нуля определителем. Такая система имеет лишь тривиальное решение, т. е.

$$C_{2j+1}(t) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Выпишем слагаемые, входящие в (7). Давление капиллярных сил на произвольную поверхность определяется известным соотношением:

$$\mathfrak{F}_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}, \quad (23)$$

где \mathbf{n} — орт нормали к поверхности.

Для поверхности (3), используя (16) и (14), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\sigma \approx & 2 \frac{\sigma}{R} \left[1 + e^2 2 \frac{h(\Theta)}{R} \right] + \frac{\sigma}{R} \sum_{j=1}^{\infty} \left[(2j-1)(2j+2) \right. \\ & \left. - 2\beta_{2j} e^2 \frac{h(\Theta)}{R} \right] \frac{Z_{2j}(t)}{R} P_{2j}(\cos \Theta); \\ & \beta_m \equiv m^2 + m + 4. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения (20) позволяют привести это выражение к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\sigma \approx & \mathfrak{F}_\sigma^{(0)} + \delta \mathfrak{F}_\sigma(\xi) = 2 \frac{\sigma}{R} \left[P_0(\cos \Theta) + e^2 \frac{2}{3} P_2(\cos \Theta) \right] \\ & + \frac{\sigma}{R} \sum_{j=2}^{\infty} \left\{ \left[(2j-1)(2j+2) - e^2 2 \kappa_{2j} \beta_{2j} \right] \frac{Z_{2j}(t)}{R} \right. \\ & \left. - e^2 \beta_{2j-2} \mu_{2j-2} \frac{Z_{2j-2}(t)}{R} - e^2 \beta_{2j+2} \zeta_{2j+2} \frac{Z_{2j+2}(t)}{R} \right\} \\ & \times P_{2j}(\cos \Theta), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\mathfrak{F}_\sigma^{(0)}$ — давление капиллярных сил на невозмущенную поверхность капли, содержащее слагаемые нулевого порядка малости и слагаемые $\sim e^2$; $\delta \mathfrak{F}_\sigma(\xi)$ — добавка к давлению капиллярных сил, вызванная возмущением $\xi(\Theta, t)$, содержащая слагаемые $\sim \xi$ и $\sim e^2 \xi$.

3. Чтобы выписать выражение для давления электрического поля на поверхность капли, нужно найти распределение поля в пространстве, решая краевую задачу (8)–(10). Представим потенциалы электрического поля в виде разложения

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \quad (26)$$

где Φ_0 — потенциал нулевого порядка малости, Φ_1 — добавка порядка e^2 , Φ_2 — добавка порядка ξ , Φ_3 — добавка порядка $e^2 \xi$.

Подставляя (26) в уравнения (8)–(10), получим четыре краевые задачи для каждой из функций Φ ($q = 0, 1, 2, 3$)

$$\Delta \Phi_q = 0 \quad (q = 0, 1, 2, 3), \quad (27)$$

при $r \rightarrow \infty$: $\Phi_0 \rightarrow -E_0 r \cos \Theta$,

$$\Phi_q \rightarrow 0 \quad (q = 1, 2, 3); \quad (28)$$

при $\Theta = \frac{\pi}{2}$: $\Phi_q \rightarrow 0$ ($q = 0, 1, 2, 3$); (29)

при $r = R$: $\Phi_0 = 0$,

$$\Phi_1 = -e^2 h(\Theta) \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}, \quad \Phi_2 = -\xi(\Theta, t) \frac{\partial \Phi_0}{\partial r},$$

$$\Phi_3 = -e^2 h(\Theta) \xi(\Theta, t) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial^2 r}$$

$$- \xi(\Theta, t) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} e^2 h(\Theta) \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}. \quad (30)$$

Решения сформулированных задач для определения Φ_q , удовлетворяющие условиям (28) и (29), следует искать в виде

$$\Phi_0(r, \Theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_m^{(0)} r^m + D_m^{(0)} r^{-(m+1)} \right] P_m(\cos \Theta);$$

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{\infty} D_{2j+1}^{(q)}(t) \left(\frac{R}{r} \right)^{2j+2} P_{2j+1}(\cos \Theta)$$

$$(q = 1, 2, 3). \quad (31)$$

Подстановка этих выражений и соотношения (14) в граничные условия (28)–(30) с учетом (20) позволяет получить выражения для неизвестных коэффициентов $A_m^{(j)}$ и $D_m^{(j)}$

$$A_1^{(0)} = -E_0; \quad A_m^{(0)} = 0 (\forall m \neq 1);$$

$$D_1^{(0)} = E_0 R^3; \quad D_m^{(0)} = 0 (\forall m \neq 1);$$

$$D_1^{(1)} = \frac{2}{5} e^2 E_0 R; \quad D_3^{(1)} = \frac{3}{5} e^2 E_0 R;$$

$$D_{2m+1}^{(1)} = 0 \quad (m = 2, 3, 4, \dots);$$

$$D_{2j+1}^{(2)} = 3E_0 \left[a_{2j} Z_{2j}(t) + b_{2j+2} Z_{2j+2}(t) \right];$$

$$D_{2j+1}^{(3)} = e^2 3E_0 \left(a_{2j} \left[-\frac{4}{15} + 2(j+2) \kappa_{2j+1} \right. \right.$$

$$\left. + (j+1) a_{2j-1} b_{2j} \right] Z_{2j}(t) + b_{2j+2} \left[-\frac{4}{15} \right.$$

$$\left. + 2(j+2) \kappa_{2j+1} + (j+3) a_{2j+2} b_{2j+3} \right] Z_{2j+2}(t)$$

$$\left. + (j+1) a_{2j-2} \mu_{2j-1} Z_{2j-2}(t) + (j+3) b_{2j+4} \zeta_{2j+3} Z_{2j+4}(t) \right);$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots). \quad (32)$$

Коэффициенты a_m, b_m, ζ_m, μ_m определены в (20).

Теперь можно выписать выражения для напряженности и давления электрического поля на свободной поверхности капли $r = R + e^2 h(\Theta) + \xi(\Theta, t)$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla \cdot \Phi \approx & \left\{ E_0 \cos \Theta \left[3 - e^2 2 \left(\frac{2}{5} - 3 \frac{h(\Theta)}{R} \right) \right] \right. \\ & - 6E_0 \cos \Theta \left[1 - e^2 2 \left(\frac{7}{15} - 3 \frac{h(\Theta)}{R} \right) \right] \frac{\xi(\Theta, t)}{R} \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2) \left[\left(1 - e^2 (2j+3) \frac{h(\Theta)}{R} \right) \frac{D_{2j+1}^{(2)}(t)}{R} \right. \\ & \left. + \frac{D_{2j+1}^{(3)}(t)}{R} \right] P_{2j+1}(\cos \Theta) \Big\} \mathbf{e}_r \\ & + \left\{ e^2 E_0 \sin \Theta \left(1 + 6 \frac{h(\Theta)}{R} \right) \right. \\ & - 3E_0 \sin \Theta \left[1 + e^2 \left(\frac{7}{5} + 11 \frac{h(\Theta)}{R} \right) \right] \frac{\xi(\Theta, t)}{R} \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(1 - e^2 (2j+3) \frac{h(\Theta)}{R} \right) \frac{D_{2j+1}^{(2)}(t)}{R} + \frac{D_{2j+1}^{(3)}(t)}{R} \right] \\ & \left. \times \frac{dP_{2j+1}(\cos \Theta)}{d\Theta} \right\} \mathbf{e}_{\Theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_E = \frac{E^2}{8\pi} \approx & \frac{9E_0^2}{8\pi} \cos^2 \Theta \left[1 - e^2 \left(\frac{8}{15} - 4 \frac{h(\Theta)}{R} \right) \right] \\ & - \frac{1}{4\pi} \left\{ 6E_0^2 \left[1 + 6 \frac{h(\Theta)}{R} \right] \frac{\xi(\Theta, t)}{R} \right. \\ & - e^2 6E_0^2 \left[\frac{13}{15} - \frac{9}{15} \frac{h(\Theta)}{R} - 42 \left(\frac{h(\Theta)}{R} \right)^2 \right] \frac{\xi(\Theta, t)}{R} \\ & - 3E_0 \cos \Theta \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2) \left[\left(1 - e^2 \left(\frac{4}{15} + (2j+1) \frac{h(\Theta)}{R} \right) \right) \right. \\ & \left. \times \frac{D_{2j+1}^{(2)}(t)}{R} + \frac{D_{2j+1}^{(3)}(t)}{R} \right] P_{2j+1}(\cos \Theta) \\ & \left. + e^2 E_0 \sin \Theta \left[1 + 6 \frac{h(\Theta)}{R} \right] \right. \\ & \left. \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_{2j+1}^{(2)}(t)}{R} \frac{dP_{2j+1}(\cos \Theta)}{d\Theta} \right\}. \end{aligned}$$

С помощью (14), (20) и выражений (32) для $D_{2j+1}^{(2)}(t)/R$ и $D_{2j+1}^{(3)}(t)/R$ после несложных, весьма громоздких выкладок выражение для давления электрического поля на поверхности полусферической капли

запишется в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_E \approx \mathfrak{F}^{(0)} + \delta \mathfrak{F}_e(\xi) = & \frac{3E_0^2}{8\pi} \left\{ P_0(\cos \Theta) \right. \\ & + 2 \left[1 + e^2 \frac{18}{35} \right] P_2(\cos \Theta) + e^2 \frac{48}{35} P_4(\cos \Theta) \Big\} \\ & + \frac{9E_0^2}{8\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ e^2 (3j-7) \mu_{2j-4} \mu_{2j-2} \frac{Z_{2j-4}(t)}{R} \right. \\ & + \mu_{2j-2} \left[(2j-2) + e^2 f_j^{(1)} \right] \frac{Z_{2j-2}(t)}{R} \\ & + \left[(2j-2) \gamma_{2j-1} + 2j \gamma_{2j} + e^2 f_j^{(2)} \right] \frac{Z_{2j}(t)}{R} \\ & + \zeta_{2j+2} \left[2j + e^2 f_j^{(3)} \right] \frac{Z_{2j+2}(t)}{R} \\ & \left. + e^2 3(j-1) \zeta_{2j+2} \zeta_{2j+4} \frac{Z_{2j+4}(t)}{R} \right\} P_{2j}(\cos \Theta); \end{aligned}$$

$$\gamma_m = a_m b_{m+1};$$

$$\begin{aligned} f_m^{(1)} \equiv & (3m-7) \gamma_{2m-3} + (5m-7) \gamma_{2m-2} + (m-6) \gamma_{2m-1} \\ & + (3m-4) \gamma_{2m} - \frac{1}{15} (31m-61); \\ f_m^{(2)} \equiv & \gamma_{2m-1} \left[(m-6) \gamma_{2m-1} + (5m-7) \gamma_{2m-2} - \frac{1}{15} (31m-61) \right] \\ & + \gamma_{2m} \left[(m-5) \gamma_{2m+1} + (5m-2) \gamma_{2m} - \frac{1}{15} (31m-30) \right] \\ & + 2(3m-5) \gamma_{2m-1} \gamma_{2m}; \\ f_m^{(3)} \equiv & 3(m-2) \gamma_{2m-1} + (5m-2) \gamma_{2m} + (m-5) \gamma_{2m+1} \\ & + 3(m-1) \gamma_{2m+2} - \frac{1}{15} (31m-30). \end{aligned} \quad (33)$$

33. Распишем гидродинамическое слагаемое, входящее в динамическое граничное условие (7), используя решение (15) с коэффициентами (21) и (22), зависимость (18), а также соотношения (20). В результате получим, что на свободной поверхности капли выполняются соотношения

$$\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} \approx \rho S \sum_{j=1}^{\infty} C_{2j}(t) R^{2j} \left[1 + e^2 2j \frac{h(\Theta)}{R} \right] P_{2j}(\cos \Theta);$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \approx & \rho R^2 S^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j} \left[\left(1 + e^2 \frac{(2j+3)}{2j} \kappa_{2j} \right) \frac{Z_{2j}(t)}{R} \right. \\ & \left. + e^2 \frac{1}{2} \mu_{2j-2} \frac{Z_{2j-2}(t)}{R} + e^2 \frac{j+2}{2j+2} \zeta_{2j+2} \frac{Z_{2j+2}(t)}{R} \right] \\ & \times P_{2j}(\cos \Theta). \end{aligned} \quad (34)$$

Из динамического граничного условия (7) на невозмущенной поверхности капли получим уравнение

$$\Delta \mathbf{F} + \mathfrak{F}_E^{(0)} = \mathfrak{F}_\sigma^{(0)},$$

которое в нулевом порядке малости определяет перепад давлений на невозмущенной поверхности капли

$$\Delta \mathbf{F} = 2 \frac{\sigma}{R} - \frac{3E_0^2}{8\pi},$$

а в первом порядке по e^2 дает известное соотношение между величиной электрического поля и квадратом эксцентриситета капли e^2 [18,19]

$$e^2 \approx \frac{9}{16\pi} \frac{E_0^2 R}{\sigma}.$$

На возмущенной поверхности капли динамическое граничное условие (7) запишется в виде

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \delta \mathfrak{F}_E(\xi) = \delta \mathfrak{F}_\sigma(\xi).$$

Подставив сюда (25), (33), (34) и используя ортогональность полиномов Лежандра, получим бесконечную систему линейных однородных связанных уравнений относительно неизвестных амплитуд $Z_{2j}(t)/R$

$$\begin{aligned} & \left\{ -\Omega^2 \frac{1}{2j} \left[1 + e^2 \frac{(2j+3)}{2j} \varkappa_{2j} \right] + W \left[(2j-2)\gamma_{2j-1} + 2j\gamma_{2j} \right. \right. \\ & \left. \left. + e^2 f_j^{(2)} \right] - \left[(2j-1)(2j+2) - e^2 2\varkappa_{2j}\beta_{2j} \right] \right\} \frac{Z_{2j}(t)}{R} \\ & + \left\{ -\Omega^2 e^2 \frac{(j+2)}{4j(j+1)} + W \left[2j + e^2 f_j^{(3)} \right] + e^2 \beta_{2j+2} \right\} \zeta_{2j+2} \\ & \times \frac{Z_{2j+2}(t)}{R} + \left\{ -\Omega^2 e^2 \frac{1}{4j} + W \left[(2j-2) + e^2 f_j^{(1)} \right] \right. \\ & \left. + e^2 \beta_{2j-1} \right\} \mu_{2j-2} \frac{Z_{2j-2}(t)}{R} + \left\{ e^2 W 3(j-1) \zeta_{2j+2} \zeta_{2j+4} \right\} \\ & \times \frac{Z_{2j+4}(t)}{R} + \left\{ e^2 W (3j-7) \mu_{2j-4} \mu_{2j-2} \right\} \frac{Z_{2j-4}(t)}{R} = 0; \\ & \Omega^2 \equiv \frac{\rho R^3}{\sigma} S^2; \quad W \equiv \frac{9}{4\pi} \frac{E_0^2 R}{\sigma}. \end{aligned} \quad (35)$$

5. Система (35) имеет нетривиальное решение, если определитель, составленный из коэффициентов при $Z_j(t)$, обращается в нуль. Это условие определяет дисперсионное уравнение задачи

$$\begin{aligned} & \det(\alpha_{mm}) = 0; \\ & \alpha_{mm} = -\Omega^2 \frac{1}{2m} \left[1 + e^2 \frac{2m+3}{2m} \varkappa_{2m} \right] \\ & + W \left[(2m-2)\gamma_{2m-1} + 2m\gamma_{2m} + e^2 f_m^{(2)} \right] \\ & - \left[(2m-1)(2m+2) - e^2 2\varkappa_{2m}\beta_{2m} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{mm+1} = & \left\{ -\Omega^2 e^2 \frac{(m+2)}{4m(m+1)} + W \left[2m + e^2 f_m^{(3)} \right] \right. \\ & \left. + e^2 \beta_{2m+2} \right\} \zeta_{2m+2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{mm-1} = & \left\{ -\Omega^2 e^2 \frac{(1)}{4m} + W \left[(2m-2) + e^2 f_m^{(1)} \right] \right. \\ & \left. + e^2 \beta_{2m-2} \right\} \mu_{2m-2}; \end{aligned}$$

$$\alpha_{mm+2} = 3(m-1)e^2 W \zeta_{2m+2} \zeta_{2m+4};$$

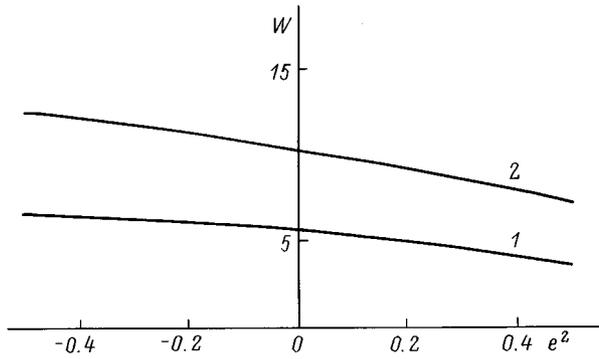
$$\alpha_{mm-2} = (3m-7)e^2 W \mu_{2m-4} \mu_{2m-2};$$

$$\alpha_{mm+h} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots; h = \pm 3, \pm 4, \dots). \quad (36)$$

Выражения для a_m, b_m, ζ_m, μ_m определены в (20), а γ_m и $f_m^{(i)}$ — в (33). В системе, описываемой дисперсионным уравнением (36), неустойчивые, экспоненциально со временем растущие решения появляются, когда свободный коэффициент уравнения (36) обращается в нуль, что соответствует появлению нулевого решения для Ω^2 . Поэтому, полагая в (36) $\Omega^2 = 0$, найдем уравнение бесконечного порядка, связывающее критическое для возникновения неустойчивости m -й моды значение параметра W и параметр деформации e^2 . Полученное таким образом уравнение целесообразно решать методом последовательных приближений, когда определитель бесконечного порядка последовательно аппроксимируется определителями конечного увеличивающегося порядка [20].

Уравнение, связывающее W и e^2 , имеет, согласно (14), бесконечное количество решений для различных четных мод капиллярных колебаний полусфероидальной капли. Напомним, что полусфероидальная деформация характеризуется действительным параметром e^2 : в области $e^2 < 0$ он равен квадрату эксцентриситета сплюснутого полусфероида, взятому со знаком "минус"; $e^2 = 0$ соответствует правильной полусфере; $e^2 > 0$ есть квадрат эксцентриситета вытянутого полусфероида.

На рисунке представлены зависимости критического значения W для второй (ветвь 1) и четвертой (ветвь 2) мод, вычисленные в приближении определителя 7-го порядка. Расчеты показывают, что в этом приближении точность определения критических значений W для основной моды определяется машинной точностью вычислений. Характер поведения кривых 1 и 2 позволяет говорить о тенденции к заметному снижению критических условий реализации исследуемой неустойчивости для полусфероидального выступа при вытягивании выступа от сплюснутого полусфероида к вытянутому. Полученные результаты, в частности, показывают, что для капель, осевших на проводах линий электропередачи, на высоких предметах во время грозы, на стенках емкостей для жидкого горючего, критические условия начала электростатической неустойчивости заметно меньше критических условий реализации НТФ.



Зависимости критического значения параметра Тейлора от квадрата эксцентриситета полусфероидального выступа на плоской свободной поверхности проводящей жидкости.

6. Как уже отмечалось выше, критическое условие неустойчивости заряженной плоской поверхности имеет вид $W_{TF} > 2$. Это означает, что для любой конкретной электропроводной жидкости по мере увеличения однородного электростатического поля \mathbf{E} , нормального к плоской свободной поверхности жидкости, до величины, определяемой из критерия неустойчивости (см. (2))

$$E_{TF}^0 \geq \sqrt{8\pi\sqrt{\rho g \sigma}}, \quad (37)$$

заряженная свободная поверхность жидкости претерпевает неустойчивость. Т.е. силы, с которыми внешнее электрическое поле \mathbf{E}_0 притягивает заряды, индуцированные на свободной поверхности жидкости самим полем \mathbf{E}_0 , стремясь увеличить площадь свободной поверхности жидкости, превышают капиллярные силы, стремящиеся сократить площадь свободной поверхности. В результате виртуальные возмущения свободной поверхности жидкости, происходящие уже из-за теплового движения ее молекул и имеющие в устойчивом состоянии физически бесконечно малую амплитуду, начинают расти со временем по экспоненциальному закону с инкрементом, определяющимся в начальный момент реализации неустойчивости амплитудой виртуального возмущения (см., например, [21]). По мере увеличения амплитуды растущего возмущения должен увеличиваться и инкремент неустойчивости, или, другими словами, скорость увеличения амплитуды, т.е. реализуется положительная обратная связь. Некоторые закономерности этого явления можно исследовать с помощью (36).

Прежде всего из (36) и рисунка видно, что по мере увеличения амплитуды виртуального полусфероидального возмущения свободной поверхности критическое значение параметра W_* для него снижается, а значит, снижается и критическое значение напряженности поля E_* , при которой реализуется неустойчивость полусфероидального выступа. Поскольку же неустойчивость исходной плоской поверхности началась с напряженности поля E_{TF}^0 , величина которой определяется (37), которая и сохраняется все время развития неустойчивости, то

$E_* < E_{TF}^0$. Т.е. исходное поле E_{TF}^0 будет закритическим для полусфероидального выступа и величина скорости его роста со временем (величина инкремента) определяется разностью $W_{TF}^0 - W_*$ в любой момент времени.

Используя (36), в пренебрежении взаимодействием мод можно в линейном по e^2 приближении выписать выражение для величины инкремента роста полусфероидального выступа, когда его эксцентриситет имеет нулевое значение $e^2 = 0$, т.е. когда форма выступа, изменяясь от сплюснутого полусфероида к вытянутому, проходит через полусферическую.

В пренебрежении взаимодействием мод дисперсионное уравнение (36) распадается на систему не связанных между собой дисперсионных уравнений для отдельных волновых чисел. Наиболее неустойчивой является волна с $k = 1/a$, поэтому дальнейшее рассмотрение ограничим лишь уравнением, получающимся из (36) при $m = 1$,

$$-\Omega^2 \frac{1}{2} \left[1 + e^2 \frac{5}{2} \chi_2 \right] + W \left[2\gamma_2 + e^2 f_1^{(2)} \right] - \left[4 - 2e^2 \chi_2 \beta_2 \right] = 0. \quad (38)$$

Полагая в (38) $\Omega^2 = 0$, при $e^2 = \text{const}$ несложно найти критическое значение $W = W_*$, при котором полусфероидальный выступ с характерным линейным размером основания a становится неустойчивым,

$$W_* = \frac{4 - 2e^2 \chi_2 \beta_2}{2\gamma_2 + e^2 f_1^{(2)}}. \quad (39)$$

Вспомним теперь, что сам процесс реализации неустойчивости начался при $W = 4.5 W_{TF}^0 > W_*$. Подставим в (38) вместо W это значение, т.е. $4.5 W_{TF}^0$ и для инкремента $\delta \equiv \text{Re } \Omega > 0$ неустойчивости полусфероидального выступа на заряженной плоской поверхности жидкости, подверженной действию электрического поля, определенного в (37), и получим

$$\delta \equiv \sqrt{9W_{TF}^0 \left[2\gamma_2 + e^2 (f_1^{(2)} - 5\gamma_2 \chi_2) \right] - 4 \left[2 - e^2 \chi_2 (\beta_2 + 5) \right]}.$$

Несложно видеть, что с ростом e^2 величина инкремента неустойчивости δ также растет.

Заключение

Критические условия реализации в однородном внешнем поле \mathbf{E} неустойчивости полусфероидальной капли проводящей жидкости на твердой электропроводной подложке (полусфероидального выступа на свободной поверхности электропроводной жидкости, претерпевающей неустойчивость Тонкса–Френкеля) снижается с увеличением эксцентриситета сфероида и значительно меньше критических условий проявления неустойчивости в \mathbf{E} плоской свободной поверхности жидкости. Это обстоятельство дает физическое обоснование образованию

конусов Тейлора и указывает на превышение скорости роста конуса Тейлора при реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля экспоненциальной зависимости от времени.

Список литературы

- [1] *Tonks L.* // *Phys. Rev.* 1935. Vol. 48. P. 562–568.
- [2] *Френкель Я.И.* // *ЖЭТФ.* 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [3] *Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // *ЖТФ.* 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
- [4] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 1995. Т. 65. Вып. 11. С. 41–47.
- [5] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Муничев М.И., Ширяева С.О.* // *ПЖТФ.* 1996. Т. 22. Вып. 10. С. 84–89.
- [6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // *ЖТФ.* 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 27–33.
- [7] *Габович М.Д.* // *УФН.* 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [8] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // *J. Phys. D.* 1989. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [9] *Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryayeva S.O.* // *J. Sci. Exploration.* 1991. Vol. 5. N 2. P. 163–190.
- [10] *Григорьева И.Д., Ширяева С.О.* // *ЖТФ.* 1994. Т. 64. Вып. 9. С. 202–207.
- [11] *Miskovsky N.M., Chang M., Cutler P.H.* et al. // *J. Vac. Sci. Technol.* 1988. Vol. A6. N 5. P. 2992–2997.
- [12] *Габович М.Д., Порицкий В.Я.* // *ЖЭТФ.* 1983. Т. 85. Вып. 1. С. 146–154.
- [13] *Taylor G.I.* // *Proc. Roy Soc. (London).* 1964. Vol. 280. P. 383–397.
- [14] *Шевченко С.И.* // *ЖТФ.* 1990. Т. 60. Вып. 2. С. 54–58.
- [15] *Базелян Э.М., Горин Б.Н., Левитов В.И.* Физические и инженерные основы молниезащиты. Л.: Гидрометеоздат, 1978. 224 с.
- [16] *Попов Б.Г., Веревкин В.Н., Бондарь В.А., Горшков В.И.* Статическое электричество в химической промышленности. Л.: Химия, 1977. 238 с.
- [17] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [18] *O'Konski Ch.T., Thacher H.C.* // *J. Phys. Chem.* 1953. Vol. 57. P. 955–958.
- [19] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // *ЖТФ.* 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [20] *Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [21] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // *ЖТФ.* 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.