01;10

Об асимптотике неустановившихся движений газа заряженных частиц

© Н.Д. Наумов

Центральный физико-технический институт,
141300 Сергиев Посад, Россия

(Поступило в Редакцию 5 марта 1998 г.)

Получено аналитическое решение задачи о расширении под действием пространственного заряда неоднородного сгустка вращающихся частиц. Показано, что с течением времени процесс расширения сгустка выходит на автомодельный режим.

Введение

Интерес к построению аналитических решений уравнений газодинамики обусловлен тем, что они являются одним из методов изучения свойств нелинейных систем [1–5]. Аналитические решения самосогласованных уравнений движения газа заряженных частиц могут быть получены, как правило, при определенных предположениях, упрощающих реальную постановку задачи. Тем не менее эти решения имеют практический интерес и они могут быть использованы для проведения оценок, а также для тестирования расчетных программ численного моделирования. Особую роль для газодинамических систем играют автомодельные решения, так как при определенных условиях они служат промежуточными асимптотиками. Для неавтомодельных процессов детали начальной стадии "забываются", и процесс выходит на самоподобный режим.

В данной работе это показано на примере решения задачи о расширении под влиянием пространственного заряда вращающегося сгустка заряженных частиц. Возможны два варианта вращения частиц в шарообразном сгустке, для которых характеристика вращательного движения зависит только от радиальной координаты и времени. В первом варианте упорядоченное движение частиц происходит только в меридиональном направлении $V_\theta \neq 0$, $V_\varphi = 0$. Для такой модели сравнительно несложно построить автомодельное решение уравнений газодинамики, соответствующее однородному сгустку заряженных частиц. Как оказывается, в этом случае можно получить и самосогласованное неавтомодельное решение для неоднородного сгустка. Для второго варианта, который соответствует неупорядоченному вращению частиц, т.е. $V_\theta = 0$, $V_\varphi = 0$, но отличны от нуля соответствующие диагональные компоненты тензора давления, аналогичное решение получается в рамках кинетического описания.

Решение уравнений газодинамики

При отсутствии азимутального движения уравнение Эйлера для холодного шарообразного сгустка заряженных частиц имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r\frac{\partial}{\partial r}\right)V_r - \frac{1}{r}V_\theta^2 = \frac{e}{m}E, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r\frac{\partial}{\partial r}\right)V_\theta + \frac{1}{r}V_rV_\theta = 0. \qquad (2)$$

Здесь предполагается, что плотность частиц и радиальная скорость сгустка зависят только от радиальной координаты и времени. Из уравнения (2) для функции $F = rV_\theta$ найдем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r\frac{\partial}{\partial r}\right)F = 0. \qquad (3)$$

Наиболее простое решение уравнения (3) имеет вид $F = C$, где C — некоторая постоянная. Нестационарное решение этого уравнения получается в случае неустановившихся движений, для которых скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии $V_r = r\dot{a}/a$, где a — радиус шара, точкой обозначается дифференцирование по времени. В этом случае из уравнения (3) найдем $F = \Omega r^2 a_0^2/a^2$, где Ω — некоторая постоянная. Для рассматриваемого класса движений характерно однородное распределение плотности частиц по объему сгустка, поэтому для коллективного поля имеем $E = 4\pi enr/3$. В итоге из уравнения (1) найдем, что радиус сгустка удовлетворяет следующему уравнению:

$$\ddot{a} = \frac{a_0^3}{a^2}\left(\omega_0^2 + \Omega^2\frac{a_0}{a}\right),$$

где $\omega_0^2 = Ne^2/ma_0^3$, N — полное число частиц в сгустке.

Решение этого уравнения можно представить в параметрическом виде [6]

$$a = \frac{a_0}{1+\varepsilon}(\varepsilon \operatorname{ch}\psi + 1),$$

$$\omega_0 t = \frac{1}{(1+\varepsilon)^{3/2}}(\varepsilon \operatorname{sh}\psi + \psi), \qquad (4)$$

где для неподвижного в начальный момент времени газа $\varepsilon = 1 + \Omega^2/\omega_0^2$.

Отметим, что полученное решение самосогласованной задачи в виде шарообразного сгустка с резкой границей относится к классу автомодельных решений, в чем нетрудно убедиться, введя автомодельную переменную $\xi = r/a$,

$$n(r,t) = n_0 \Gamma \frac{a_0^3}{a^3}, \quad V_r(r,t) = \xi \dot{a} \Gamma,$$

$$V_\theta(r,t) = \xi \Omega \Gamma \frac{a_0^2}{a}, \quad \Gamma = H(1-\xi^2).$$

Здесь $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Можно построить более общее решение уравнения (3), соответствующее неоднородному сгустку частиц. Для этого следует учесть, что выражение для радиальной скорости газа можно представить в следующем виде:

$$V_r(r,t) = \Lambda\big(t, \rho(r,t)\big). \qquad (5)$$

Здесь функция Λ имеет вид

$$\Lambda(t, r_0) = \frac{\partial s(t, r_0)}{\partial t},$$

где $s = s(t, r_0)$ — координата радиального слоя газа, рассматриваемая как функция времени и значения этой координаты в начальный момент времени; функция $\rho(r,t)$ является решением трансцендентного уравнения $s(t,\rho) = r$, т. е. $s(t, \rho(r,t)) \equiv r$.

Соответственно в переменных Лагранжа радиальная скорость этого элемента газа равна

$$v_r(t, r_0) = \Lambda(t, r_0). \qquad (6)$$

Таким образом, указанная выше структура выражения для радиальной скорости газа является следствием перехода от лагранжева описания движения к эйлерову. Тогда, как несложно проверить, $F(r,t) = W\big(\rho(r,t)\big)$, где $W(r)$ — некоторая функция, является решением уравнения (3). Поэтому в переменных Эйлера поперечная составляющая скорости равна

$$V_\theta(r,t) = \frac{W(\rho(r,t))}{r}.$$

В переменных Лагранжа эта скорость имеет вид

$$v_\theta(t, r_0) = \frac{W(r_0)}{s(t, r_0)}.$$

Из этих результатов следует, что функция $W(r)$ определяется начальным распределением поперечной скорости сгустка

$$W(r) = rV_{\theta 0}(r), \quad V_{\theta 0}(r) \equiv V_\theta(r, 0).$$

При условии перемещения слоев частиц в радиальном направлении друг за другом, без обгонов, величина коллективного поля, действующего на рассматриваемый слой газа, определяется как начальным значением его положения r_0, так и заданным начальным распределением плотности частиц $n(r,0) = n_0\nu(r)$

$$E = 4\pi n_0 \frac{e}{s^2} q(r_0), \quad q(r_0) = \int\limits_0^{r_0} \nu(x) x^2 dx.$$

Условие сохранения массы слоя при движении газа имеет вид $4\pi n(t, r_0) s^2 ds = 4\pi n_0 \nu(r_0) r_0^2 dr_0$. Отсюда для плотности частиц найдем

$$n(t, r_0) = n_0 \nu(r_0) \frac{r_0^2}{s^2 R}, \quad R(t, r_0) = \frac{\partial s(t, r_0)}{\partial r_0}. \qquad (7)$$

Изменение радиальной скорости слоя газа, как следует из уравнения (1), обусловлено воздействием коллективного поля, а также влиянием центробежной силы

$$\ddot{s} = \omega^2 \frac{q(n_0)}{s^2} + \frac{W^2(r_0)}{s^3}, \qquad (8)$$

где $\omega^2 = 4\pi n_0 e^2/m$.

Начальные условия для уравнения (8) имеют вид $s(0, r_0) = r_0$, $\dot{s}(0, r_0) = u(r_0)$, где $u(r)$ — заданное начальное распределение радиальной скорости.

Решение уравнения Власова

Решение для сферически симметричного сгустка с неупорядоченным вращением частиц можно получить в рамках кинетического описания. Рассмотрим следующую функцию распределения, описывающую начальное состояние такого сгустка с неоднородной плотностью частиц $n(r,0) = n_0\nu(r)$ и начальным распределением радиальной скорости $V_r(r,0) = u(r)$,

$$f_0(X, I) = \frac{n_0}{\pi} r^2 \nu(r) \delta\big(p_r - mu(r)\big) \delta\big(I - m^2 W^2(r)\big).$$

Здесь через X для краткости обозначается совокупность переменных r, p_r; $I = P_\theta^2 + P_\varphi^2/\sin^2\theta$; $P_\theta = rp_\theta$, $P_\varphi = r\sin\theta p_\varphi$ — компоненты обобщенного импульса. Для этой функции распределения поперечные составляющие газодинамической скорости равны нулю

$$V_\theta = \frac{1}{mn} \int p_\theta f_0 d^3 p = 0, \quad V_\varphi = \frac{1}{mn} \int p_\varphi f_0 d^3 p = 0.$$

У тензора давления отличны от нуля только диагональные поперечные компоненты

$$\Pi_{\theta\theta} = \frac{1}{m} \int p_\theta^2 f_0 d^3 p = \frac{mn_0}{2mr^2} \nu(r) W^2(r),$$

$$\Pi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{m} \int p_\varphi^2 f_0 d^3 p = \frac{mn_0}{2mr^2} \nu(r) W^2(r).$$

Таким образом, функция $W(r)$ характеризует начальную зависимость степени неупорядоченного вращения частиц от радиальной координаты. Так как для центрального поля I является сохраняющейся величиной, то в уравнении Власова, записанном в сферических координатах, следует перейти от переменной θ к новой переменной I. В результате для функции распределения $f(X,I,t)$ получается следующее уравнение:

$$Lf \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_r}{m}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial}{\partial p_r}\right) f = 0, \qquad (9)$$

где $U = e\Phi + I/2mr^2$, Φ — потенциал коллективного поля.

В случае начальной функции распределения (8) решение уравнения (9) можно построить с помощью метода сингулярного решения, играющего роль функции Грина оператора L [6,7],

$$H(t)f(X,I,t) = \int G(X,X_0;t)f_0(X_0,I)dX_0,$$

$$LG(X,X_0;t) = \delta(t)\delta(X - X_0),$$

$$G(X,X_0;t) = H(t)\delta\big(r - r(t;X_0)\big)\delta\big(p_r - p_r(t;X_0)\big).$$

Здесь $r(t;X_0), p_r(t;X_0)$ — закон радиального движения одиночной частицы в поле с потенциальной энергией U, удовлетворяющий условиям $r(0;X_0) = r_0$, $p_r(0;X_0) = p_{r0}$. Такая возможность обусловлена тем, что в данном случае нестационарная самосогласованная задача сводится к расчету одномерного движения холодного газа заряженных частиц в совокупности коллективного и центробежного полей.

В итоге для функции распределения сгустка заряженных частиц найдем

$$f(X,I,t) = \frac{n_0}{\pi}\nu(\rho(r,t))\frac{\rho^2(r,t)}{Q(r,t)}\delta\big(p_r - m\Lambda(t,\rho(r,t))\big)\delta\big(I - m^2W^2(\rho(r,t))\big),$$

где наряду с уже ранее использовавшимися величинами введено обозначение $Q(r,t) = R(t,\rho(r,t))$.

Эта функция распределения приводит к тем же выражениям (7), (5) для плотности частиц и радиальной скорости. Для расчета тензора давления можно воспользоваться следующими соотношениями

$$\Pi_{\theta\theta}(s,t) = \Pi_{\varphi\varphi}(s,t) = \frac{mn_0}{2s^2}\nu(r_0)W^2(r_0). \qquad (10)$$

При последовательном изменении r_0 с небольшим шагом выражения (6), (7), (10) позволяют определить распределение газодинамических характеристик сгустка для заданного момента времени t.

Динамика сгустка

Как и для однородного сгустка, решение уравнения (8) записывается в параметрическом виде

$$s = \frac{r_0}{1+\varepsilon}(\varepsilon \operatorname{ch}\psi + 1),$$

$$\omega t = \sqrt{\frac{r_0^3}{q(1+\varepsilon)^3}}(\varepsilon \operatorname{sh}\psi + \psi). \qquad (11)$$

Для простоты в дальнейшем рассматривается разлет сгустка под влиянием пространственного заряда при $u(r) = 0$; в этом случае $\varepsilon = 1 + W^2(r_0)/\omega^2 r_0 q(r_0)$. Из выражений (11) для функции R найдем

$$R = \frac{1}{1+\varepsilon}\left[1 + \varepsilon\operatorname{ch}\psi + r_0\varepsilon\operatorname{sh}\psi\frac{\partial\psi}{\partial r_0} + \frac{r_0}{1+\varepsilon}(\operatorname{ch}\psi - 1)\frac{\partial\varepsilon}{\partial r_0}\right],$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r_0} = -\frac{1}{2s(1+\varepsilon)}\left[(\varepsilon\operatorname{sh}\psi + \psi)\left(3 - r_0^3\frac{\nu}{q} - \frac{3r_0}{1+\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r_0}\right) + 2r_0\operatorname{sh}\psi\frac{\partial\varepsilon}{\partial r_0}\right].$$

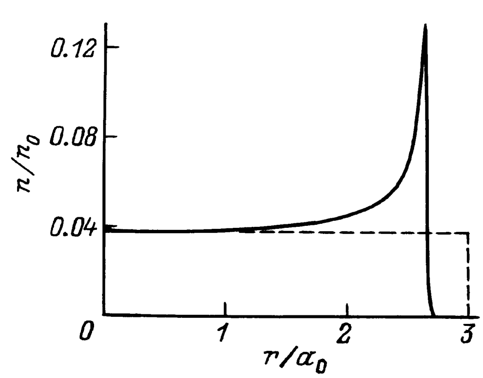
Очевидно, что более простое выражение для функции R получается в том случае, когда эксцентриситет не зависит от начального положения слоя $\varepsilon = 1 + \lambda$, т.е. если $W^2(r) = \lambda\omega^2 rq(r)$, где λ — некоторая постоянная. При таком выборе начального вращения частиц

$$R = \frac{1}{1+\varepsilon}\left[1 + \varepsilon\operatorname{ch}\psi - \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{sh}\psi\left(3 - r_0^3\frac{\nu}{q}\right)\frac{\varepsilon\operatorname{sh}\psi + \psi}{\varepsilon\operatorname{ch}\psi + 1}\right]. \qquad (12)$$

Пусть начальное распределение плотности частиц задано в виде сгустка с диффузной границей

$$\nu(r) = \exp\left(\frac{r^3}{a_0^3}\right). \qquad (13)$$

На рисунке сплошной кривой представлены результаты расчета с помощью выражений (7), (11), (12) распределения плотности частиц в сгустке для $\omega t = 4$ в случае $\varepsilon = 1.25$. Штриховая кривая соответствует автомодельному решению (4) для этого момента времени при таком же значении ε.



Формирование пика плотности частиц в этом примере иллюстрирует возникающее ограничение области применимости полученных результатов, обусловленное возможностью нарушения при расширении сгустка исходного предположения о движении слоев частиц без обгонов. Это выражается в выполнении в момент времени t_k условия $R(t_k, r_0) = 0$ для некоторых значений начальных положений слоев, вследствие чего плотность частиц стремится к бесконечности (так называемые градиентные катастрофы [8,9]).

Сравнительно простое выражение для функции R получается также при

$$\frac{r_0}{1+\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r_0} = 1 - r_0^3\frac{\nu}{3q}.$$

Это условие выполняется, если

$$W^2(r_0) = r_0\omega^2 q(r_0)(\varepsilon - 1), \quad \varepsilon = \mu\frac{r_0}{q^{1/3}} - 1, \qquad (14)$$

где μ — некоторая постоянная.

В этом случае

$$R = \frac{\nu r_0^3}{3q(1+\varepsilon)}(1 + \varepsilon\,\mathrm{ch}\psi) + \left(1 - \frac{\nu r_0^3}{3q}\right)\frac{\varepsilon\,\mathrm{ch}\psi + \varepsilon}{\varepsilon\,\mathrm{ch}\psi + 1}. \quad (15)$$

Как видно из выражения (15), если выполняется условие $3q(r) \geqslant \nu(r)r^3$, то разлет сгустка происходит без возникновения обгонов. В частности, это неравенство выполняется для начального распределения диффузного вида (13). Поэтому в этом случае не возникает указанного выше ограничения на длительность промежутка времени, в течение которого можно использовать аналитические выражения.

При больших значениях параметра $\mathrm{sh}\psi \simeq \mathrm{ch}\psi$, поэтому из (4), (11), (14), (15) для фигурирующих здесь величин найдем

$$a \simeq a_0\omega t\sqrt{\mu}3^{-1/3}, \quad s \simeq \omega t\sqrt{\mu}q^{1/3}, \quad R \simeq \frac{\nu}{3q}sr_0^2.$$

Отсюда следует, что

$$n_0\frac{\nu r_0^2}{s^2 R} \simeq \frac{3n_0}{(\omega t\sqrt{\mu})^3} \simeq n_0\frac{a_0^3}{a^3},$$

т. е. с течением времени детали начального распределения плотности частиц становятся несущественными и процесс расширения сгустка выходит на автомодельный режим. Аналогичного поведения плотности частиц следует ожидать после обгонов и в рассмотренном выше примере.

Список литературы

[1] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
[2] *Алешин И.М., Кузьменков Л.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия. 1994. Т. 35. № 2. С. 89–92.
[3] *Aliev Yu.M., Stenflo L.* // Phys. Scripta. 1994. Vol. 50. P. 701–702.
[4] *Поляков П.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 19. С. 46–49
[5] *Наумов Н.Д.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 19. С. 89–93.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973.
[7] *Наумов Н.Д.* // ДАН. 1997. Т. 357. № 6. С. 758–760.
[8] *Быков В.П., Герасимов А.В., Турин В.О.* // УФН. 1995. № 8. С. 955–966.
[9] *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. М.: Наука, 1997.