

# Численный анализ рассеяния электростатического поля двухэлектродной камеры на проводящих поверхностях

© С.И. Сафронов, Р.П. Тарасов

Научно-исследовательский институт импульсной техники,  
115304 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 4 ноября 1997 г. В окончательной редакции 27 марта 1998 г.)

Проведен численный анализ электростатического поля *ТЕМ*-камеры и рассеяния исходного поля *ТЕМ*-камеры идеально проводящими поверхностями вращения и параллелепипедом.

## Введение

Неотъемлемой составляющей процесса разработки, создания и эксплуатации *ТЕМ*-камеры [1] является построение соответствующих численных моделей: предварительные расчеты поля *ТЕМ*-камеры заданной формы позволяют оценить возможности данной конструкции и в конечном счете синтезировать устройство, оптимально удовлетворяющее заданным характеристикам, при этом могут быть определены допуски для сборки реальной конструкции. В свою очередь численный анализ рассеяния поля *ТЕМ*-камеры на проводящих поверхностях заданной формы позволяет оценить возмущения исходного поля, внесенные различными измерительными датчиками. Кроме того, если численный анализ данной задачи может быть проведен с высокой точностью, то возникает возможность калибровки измерительных приборов вплоть до создания эталонного образца. Численный анализ задач рассеяния не менее важен и при непосредственной эксплуатации *ТЕМ*-камеры.

При низкочастотном возбуждении электромагнитное поле *ТЕМ*-камеры является квазистатическим, что позволяет калибровать различные измерительные приборы при заданных электростатических потенциалах электродов (корпус и внутренняя шина) *ТЕМ*-камеры. Поэтому в этом случае можно ограничиться численным анализом электростатического поля *ТЕМ*-камеры и рассеянием исходного поля различными проводящими объектами, внесенными в объем *ТЕМ*-камеры.

Геометрия *ТЕМ*-камеры такова, что задача численного моделирования электростатического поля *ТЕМ*-камеры и в большей мере численный анализ рассеяния исходного поля на проводящих поверхностях представляют собой существенно трехмерные задачи, решение которых обусловлено рядом принципиальных трудностей, связанных со сложной геометрией и разнородностью граничной поверхности, образованной электродами *ТЕМ*-камеры и соответствующими экранами. В свою очередь дискретизация данной граничной поверхности с приемлемой точностью приводит к необходимости построения экономических и устойчивых алгоритмов численного решения сеточных задач очень большого размера. Поэтому известные вычислительные процедуры в данном случае оказываются малоэффективны и не позволяют провести

численный анализ полей *ТЕМ*-камеры с необходимой точностью. Из-за этого от трехмерных моделей на практике обычно отказываются и переходят к более простым и менее точным качественным двумерным моделям.

Методы [2–6] позволяют проводить численный анализ существенно трехмерных задач с высокой точностью. В настоящей работе на основе этих методов решается задача численного моделирования электростатического поля *ТЕМ*-камеры Крауфорда [1,7], а также проводится численный анализ рассеяния полей *ТЕМ*-камеры на параллелепипеде и поверхностях вращения с кусочно-гладкой образующей. При этом достигается точность вычислений порядка долей процента.

## 1. Численное моделирование электростатического поля *ТЕМ*-камеры

Рассмотрим задачу определения электростатического поля *ТЕМ*-камеры, принципиальная геометрия которой приведена в традиционном виде на рис. 1, *a, b*, а общий вид дан на рис. 1, *c*. Будем полагать, что внутренний электрод *ТЕМ*-камеры, образующий поверхность  $S_1$ , и внешний электрод *ТЕМ*-камеры (поверхность  $S_2$ ) находятся под заданными потенциалами  $C_1$  и  $C_2$  соответственно. Тогда потенциал электростатического поля данной системы  $v(x)$ , где  $x = \{x_i\}$  — декартовы координаты в трехмерном пространстве  $V_3$ , является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta_3 v(x) = 0, \quad \Delta_3 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$x \in V_3/S, \quad v(x) = f(x), \quad x \in S. \quad (1)$$

При этом  $S = S_1 \cup S_2$ ,  $f(x) = \chi_{S_i}(x)C_i$ ,  $x \in S_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\chi_{S_i}$  — характеристическая функция множества точек поверхности  $S_i$ . Известно, что решение краевой задачи (1) можно построить на основе потенциала простого слоя. В этом случае поверхностная функция плотности зарядов  $u(x)$ ,  $x \in S$  удовлетворяет следующей системе

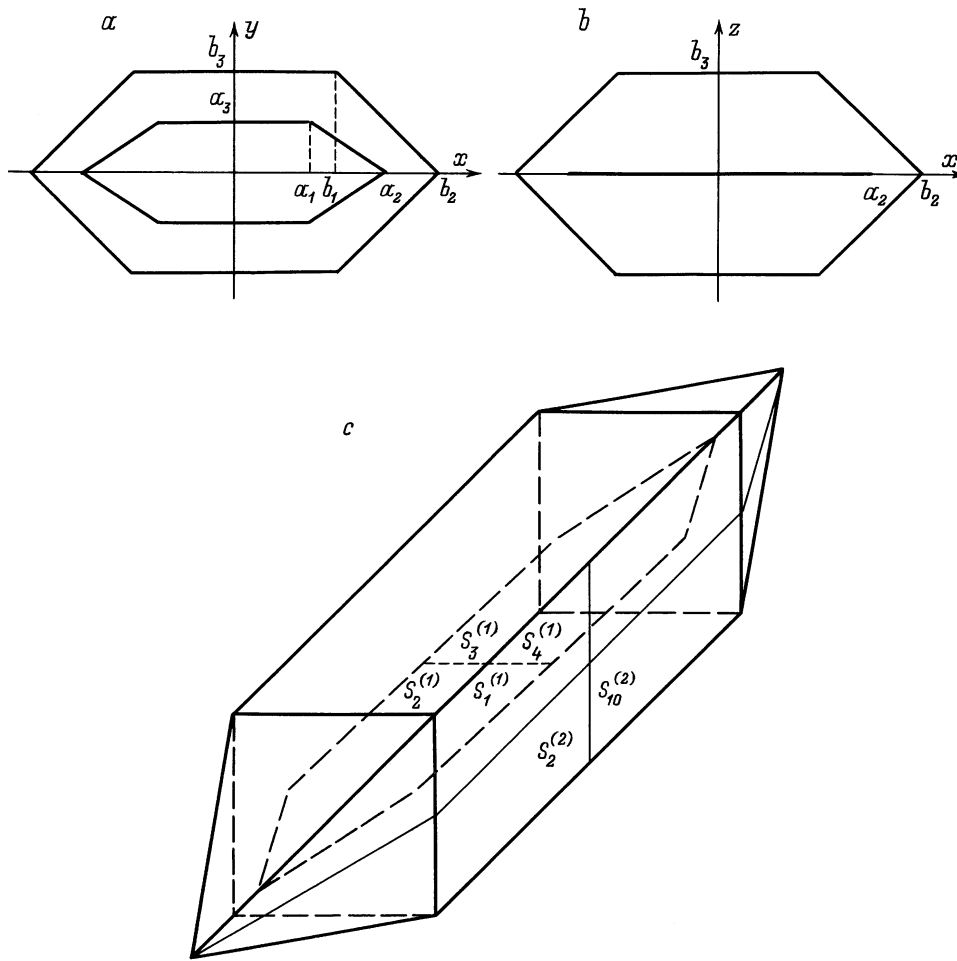


Рис. 1.

интегральных уравнений первого рода:

$$\sum_{j=1}^2 A_{ij} u_j = C_i, \quad [A_{ij} \Psi](x) = \int \frac{\Psi(y)}{|x-y|} ds_y, \quad (2)$$

$$x \in S_i, \quad y \in S_j, \quad i, j = 1, 2,$$

где  $|x-y|$  — евклидово расстояние между точками  $x$  и  $y$  в пространстве  $V_3$ .

Методы приближенного решения уравнения вида (2), основанные на численном решении сеточных задач небольшого размера  $M$  ( $M \leq 500$ ), аппроксимирующих исходное граничное уравнение, хорошо известны [8–10]. Для поверхностей  $S$  простой формы они продемонстрировали несомненные преимущества в численной реализации метода граничных интегральных уравнений в сравнении с другими подходами. Вместе с тем поскольку число арифметических операций, необходимое для решения сеточной задачи, аппроксимирующей исходное граничное уравнение, пропорционально  $M^3$ , то с увеличением размера сеточной задачи происходит существенный рост машинных затрат. Кроме того, для сеточных

задач большого размера трудно построить устойчивые алгоритмы их численного обращения.

В [2,3] для граничных интегральных уравнений, инвариантных относительно преобразований симметрии некоторой конечной абелевой группы  $\{\tau_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , были предложены методы построения решения исходного уравнения, которые в численной реализации существенно устойчивее и в  $N^2$  раз экономичнее традиционных алгоритмов. Эти методы могут быть использованы для численного решения (2), поскольку поверхность  $S = S_1 \cup S_2$  допускает разбиение на конгруэнтные составляющие относительно группы симметрий Клейна четвертого порядка. Учет данной симметрии при построении численных алгоритмов позволяет уменьшить объем вычислений в 16 раз, что, однако, недостаточно для построения с высокой точностью приближенного решения задачи рассеяния электростатического поля ТЕМ-камеры на проводящих поверхностях.

Абелевой группой преобразований симметрии Клейна  $\{\tau_k^{(1)}\}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) обладает поверхность  $S_i$  (внутренний электрод). Поверхность же  $S_2$  (внешний электрод) обладает конечной неабелевой группой преобразований

симметрии  $\{\tau_k^{(2)}\}$  ( $k = 1, 2, \dots, 16$ ) шестнадцатого порядка. Поэтому при построении решения (2) имеет смысл учесть симметрию поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  отдельно, используя предложенные в [2–5] высокоэффективные методы численного решения граничных интегральных уравнений с коммутативной и некоммутативной группой симметрий конечного порядка.

Следуя работе [6], численное решение уравнения (2) будем искать на основе итерационного процесса

$$\begin{aligned} A_{11}u_1^{(n+1)} &= (1 - \omega)A_{11}u_1^{(n)} + \omega[C_1 - A_{12}u_2^{(n)}], \\ A_{22}u_2^{(n+1)} &= (1 - \omega)A_{22}u_2^{(n)} + \omega[C_2 - A_{21}u_1^{(n+1)}], \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

или в другой форме

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)} &= (1 - \omega)u_1^{(n)} + \omega A_{11}^{-1}[C_1 - A_{12}u_2^{(n)}], \\ u_2^{(n+1)} &= (1 - \omega)u_2^{(n)} + \omega A_{22}^{-1}[C_2 - A_{21}u_1^{(n+1)}], \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3')$$

где  $A_{11}^{-1}$  и  $A_{22}^{-1}$  — операторы, обратные  $A_{11}$  и  $A_{22}$  соответственно.

Инвариантность операторов  $A_{11}$  и  $A_{22}$  относительно конечных групп  $\{\tau_k^{(1)}\}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) и  $\{\tau_k^{(2)}\}$  ( $k = 1, 2, \dots, 16$ ) преобразований симметрии поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  устанавливается непосредственно. Следовательно, построение операторов  $A_{11}^{-1}$  и  $A_{22}^{-1}$  может быть проведено на основе методов [2,3] и [4,5] соответственно.

Поскольку алгоритмы обращения операторов, инвариантных относительно преобразований из группы симметрий Клейна четвертого порядка, подробно рассмотрены в [11], в настоящей работе приведем только окончательные результаты. Именно поверхность  $S_1$  допускает представление в виде

$$\begin{aligned} S_1 &= \bigcup_{i=1}^4 s_i^{(1)}, \quad s_i^{(1)} \cap s_j^{(1)} = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \\ \tau_i^{(1)} s_1^{(1)} &= s_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \mapsto \quad S_1 = \bigcup_{i=1}^4 \tau_i^{(1)} s_1^{(1)}, \end{aligned}$$

где  $\tau_1^{(1)} = e$  — единичное преобразование;  $\tau_2^{(1)}$  и  $\tau_4^{(1)}$  — отражения относительно двух ортогональных плоскостей, проходящих через оси поворота (на рис. 1 плоскости  $XZ$  и  $YZ$ );  $\tau_3^{(1)} = \tau_2^{(1)}\tau_4^{(1)}$  — поворот на угол  $\pi$  (на рис. 1 ось  $Z$  — ось поворота);  $\{s_i^{(1)}\}$  — множество конгруэнтных составляющих поверхности  $S_1$  относительно абелевой группы  $\{\tau_k^{(1)}\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Далее, в [11] показано, что в результате унитарных преобразования оператор  $A_{11} = \|a_{ij}\|$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) может быть приведен к диагональному виду

$$A_{11} \mapsto \hat{A}_{11} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3, b_4), \quad (4)$$

где

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad b_2 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4,$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_1 + a_2 - a_3 - a_4, \quad b_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \\ a_i &= a_{1i} T_i^{(1)}, \quad T_i^{(1)} u(x) = u(\tau_i^{(1)-1} x), \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

$$[a_{ij}\Psi](x) = \int \frac{\Psi(y)}{|x-y|} ds_y,$$

$$x \in s_i^{(1)}, \quad y \in s_j^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Таким образом, алгоритм обращения оператора  $A_{11}$  сводится к построению операторов  $b_i^{-1}$ , обратных к  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Последнее позволяет уменьшить объем вычислений в 16 раз при использовании прямых численных методов обращения числовых матриц.

Поверхность  $S_2$  описывается неабелевой группой преобразований симметрии  $\{\tau_k^{(2)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 16$ , т.е. она допускает разбиение вида

$$S_2 = \bigcup_{i=1}^{16} s_i^{(2)}, \quad s_i^{(2)} \cap s_j^{(2)} = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 16,$$

$$\tau_i^{(2)} s_1^{(2)} = s_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots, 16, \quad \mapsto \quad S_2 = \bigcup_{i=1}^{16} \tau_i^{(2)} s_1^{(2)}$$

на конгруэнтные составляющие  $\{s_i^{(2)}\}$  относительно группы  $\{\tau_k^{(2)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 16$ , где

$$\begin{aligned} \tau_1^{(2)} &= e, \quad \tau_2^{(2)} = \sigma_1, \quad \tau_3^{(2)} = C, \quad \tau_4^{(2)} = C\sigma_1, \quad \tau_5^{(2)} = C^2, \\ \tau_6^{(2)} &= C^2\sigma_1, \quad \tau_7^{(2)} = C^3, \quad \tau_8^{(2)} = C^3\sigma_1, \quad \tau_9^{(2)} = \sigma_2, \\ \tau_{10}^{(2)} &= \sigma_2\sigma_1, \quad \tau_{11}^{(2)} = \sigma_2C, \quad \tau_{12}^{(2)} = \sigma_2C\sigma_1, \quad \tau_{13}^{(2)} = \sigma_2C^2, \\ \tau_{14}^{(2)} &= \sigma_2C^2\sigma_1, \quad \tau_{15}^{(2)} = \sigma_2C^3, \quad \tau_{16}^{(2)} = \sigma_2C^3\sigma_1, \end{aligned}$$

а преобразования евклидова пространства  $e$ ,  $C$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определены следующим образом:  $e$  — тождественное преобразование;  $C$  — поворот на угол  $2\pi/4$  (ось  $OX$  — ось поворота рис. 1);  $\sigma_1$  — операция зеркального отражения относительно плоскости, проходящей через ось поворота;  $\sigma_2$  — зеркальное отражение относительно плоскости, ортогональной оси поворота (плоскость  $YZ$  на рис. 1). Далее, если координатные функции, соответствующие неприводимым представлениям группы  $\{\tau_k^{(2)}\}$ , известны, то, следуя [4,5], от второго из уравнений (3) можно перейти к уравнениям его канонического представления относительно группы  $\{\tau_k^{(2)}\}$ .

Поскольку группы  $\{\tau_k^{(2)}\}$  ( $k = 1, 2, \dots, 16$ ) можно представить как прямое произведение двух ее подгрупп — абелевой группы второго порядка  $\{e, \sigma_2\}$  и неабелевой группы восьмого порядка (группы квадрата)  $\{e, \sigma_1, C, C\sigma_1, C^2, C^2\sigma_1, C^3, C^3\sigma_1\}$ , то вычисление координатных функций  $\{\tau_k^{(2)}\}$  сводится к вычислению координатных функций двух указанных ее подгрупп. Координатными функциями неприводимых регулярных представлений абелевой группы являются ее характеры. Характеры любой абелевой группы известны, и в случае группы второго порядка принимают значения 1 и  $-1$  (более подробно см. раздел 3). В свою очередь группа квадрата  $\{\tau_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) имеет три образующие:

Таблица 1.

$u_i(\tau_k)$	$e$	$\sigma_1$	$C$	$C\sigma_1$	$C^2$	$C^2\sigma_1$	$C^3$	$C^3\sigma_1$
$u_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$u_2$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$u_3$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$u_4$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

$\tau_1 = e$ ,  $\tau_2 = \sigma_1$ ,  $\tau_3 = C$ , что позволяет непосредственно вычислить координатные функции  $u_i(\tau_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , соответствующие пяти неприводимым регулярным представлениям данной группы. Значения  $u_i(\tau_k)$ , ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ ) приведены в табл. 1.

Координатные функции  $u_5(\tau_k)$ , ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_5(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & u_5(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ u_5(C) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & u_5(C\sigma_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ u_5(C^2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & u_5(C^2\sigma_1) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ u_5(C^3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & u_5(C^3\sigma_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисленные значения  $u_i(\tau_k)$  позволяют записать уравнения канонического представления относительно группы  $\{\tau_k^{(2)}\}$  второго из уравнений (3)

$$(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i)\tilde{u}_i(x) = \tilde{f}_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad x \in s_1^{(2)}, \quad (5)$$

где  $\tilde{A}_i = \tilde{A}_{i+5}$ ,  $\tilde{B}_i = -\tilde{B}_{i+5}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ .

Для операторов  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{B}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 + \hat{A}_5 + \hat{A}_6 + \hat{A}_7 + \hat{A}_8, \\ \tilde{A}_2 &= \hat{A}_1 - \hat{A}_2 + \hat{A}_3 - \hat{A}_4 + \hat{A}_5 - \hat{A}_6 + \hat{A}_7 - \hat{A}_8, \\ \tilde{A}_3 &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 - \hat{A}_3 - \hat{A}_4 + \hat{A}_5 + \hat{A}_6 - \hat{A}_7 - \hat{A}_8, \\ \tilde{A}_4 &= \hat{A}_1 - \hat{A}_2 - \hat{A}_3 + \hat{A}_4 + \hat{A}_5 - \hat{A}_6 - \hat{A}_7 + \hat{A}_8, \\ \tilde{A}_5 &= \begin{bmatrix} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 - \hat{A}_5 - \hat{A}_6 & -\hat{A}_3 - \hat{A}_4 + \hat{A}_7 + \hat{A}_8 \\ \hat{A}_3 - \hat{A}_4 - \hat{A}_7 + \hat{A}_8 & \hat{A}_1 - \hat{A}_2 - \hat{A}_5 + \hat{A}_6 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_1 &= \hat{A}_9 + \hat{A}_{10} + \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12} + \hat{A}_{13} + \hat{A}_{14} + \hat{A}_{15} + \hat{A}_{16}, \\ \tilde{B}_2 &= \hat{A}_9 - \hat{A}_{10} + \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} + \hat{A}_{13} - \hat{A}_{14} + \hat{A}_{15} - \hat{A}_{16}, \\ \tilde{B}_3 &= \hat{A}_9 + \hat{A}_{10} - \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} + \hat{A}_{13} + \hat{A}_{14} - \hat{A}_{15} - \hat{A}_{16}, \\ \tilde{B}_4 &= \hat{A}_9 - \hat{A}_{10} - \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12} + \hat{A}_{13} - \hat{A}_{14} - \hat{A}_{15} + \hat{A}_{16}, \\ \tilde{B}_5 &= \begin{bmatrix} \hat{A}_9 + \hat{A}_{10} - \hat{A}_{13} - \hat{A}_{14} & -\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} + \hat{A}_{15} + \hat{A}_{16} \\ \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} - \hat{A}_{15} + \hat{A}_{16} & \hat{A}_9 - \hat{A}_{10} - \hat{A}_{13} + \hat{A}_{14} \end{bmatrix}, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= T_i^{(2)}A_{i1}, \quad T_i^{(2)}u(x) = u(\tau_i^{(2)-1}x), \quad i = 1, 2, \dots, 16, \\ [A_{ij}\Psi](x) &= \int \frac{\Psi(y)}{|x-y|} ds_y, \\ x &\in s_i^{(2)}, \quad y \in s_j^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 16. \quad (7) \end{aligned}$$

Переход от второго из уравнений к уравнениям (5)–(7) приводит к уменьшению объема вычислений при построении  $A_{22}^{-1}$  в  $\cong 170$  раз. Кроме того, рассматриваемая здесь процедура построения обратного к сеточному оператору, аппроксимирующему  $A_{22}$ , обладает существенно большей вычислительной устойчивостью, чем существующие.

Реализация итерационного процесса (3') в условии, что построение операторов  $A_{11}^{-1}$  и  $A_{22}^{-1}$  проводится на основе соотношений (4) и (5)–(7), позволила устойчиво и с высокой точностью получить решения сеточных задач, аппроксимирующих уравнения (2) с порядком дискретизации  $M \cong 10^4$ . Поэтому значения функции плотности распределения электростатических зарядов  $u(x)$  на электродах *ТЕМ*-камеры  $S_1$  и  $S_2$  могут быть рассчитаны с погрешностью, не превышающей доли процента, и, следовательно, в любой точке  $x$  евклидова пространства  $V_3$  с высокой точностью могут быть определены значения потенциала  $v(x)$  и вектора напряженности  $E(x) = -\text{grad}v(x)$  электростатического поля *ТЕМ*-камеры согласно соотношениям

$$\begin{aligned} v(x) &= \int \frac{u(y)}{|x-y|} ds_y, \quad E(x) = - \int \text{grad}_x \frac{u(y)}{|x-y|} ds_y, \\ x &\in V_3 \setminus S, \quad y \in S = S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

Описанные в настоящем разделе алгоритмы вычисления электростатического поля *ТЕМ*-камеры позволяют эффективно и с высокой точностью определить положение и требуемые характеристики рабочих объемов *ТЕМ*-камеры, при этом процедура определения рабочих объемов *ТЕМ*-камеры в достаточной мере может быть визуализирована.

На рис. 2,3 приведены линии равного уровня для потенциала  $v(x, y, z)$  (здесь  $x, y$  и  $z$  — координаты точки в декартовой системе  $XYZ$ , приведенной на рис. 1) и составляющих  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$  и  $E_z(x, y, z)$  вектора напряженности  $E(x, y, z)$  электростатического поля *ТЕМ*-камеры, представленной на рис. 1. На внутренний электрод  $S_1$  подавался единичный потенциал, а на внешнем электроде (поверхность  $S_2$ ) значение потенциала полагалось равным нулю. При этом на рис. 2,а приведено распределение эквипотенциалей в прямоугольнике  $y = 0.2b_3$ ,  $x \in [-a_1, a_1]$ ,  $z \in [0, b_3]$ , а на рис. 3,а — в прямоугольнике  $x = 0.2b_3$ ,  $y \in [-b_3, b_3]$ ,  $z \in [0, b_3]$ . На рис. 2,б и рис. 3,б в этих же прямоугольниках показаны линии равного уровня для  $E_x(x, y, z)$ ; на рис. 2,с и 3,с — для  $E_y(x, y, z)$ , а на рис. 2,д и 3,д — для  $E_z(x, y, z)$ .

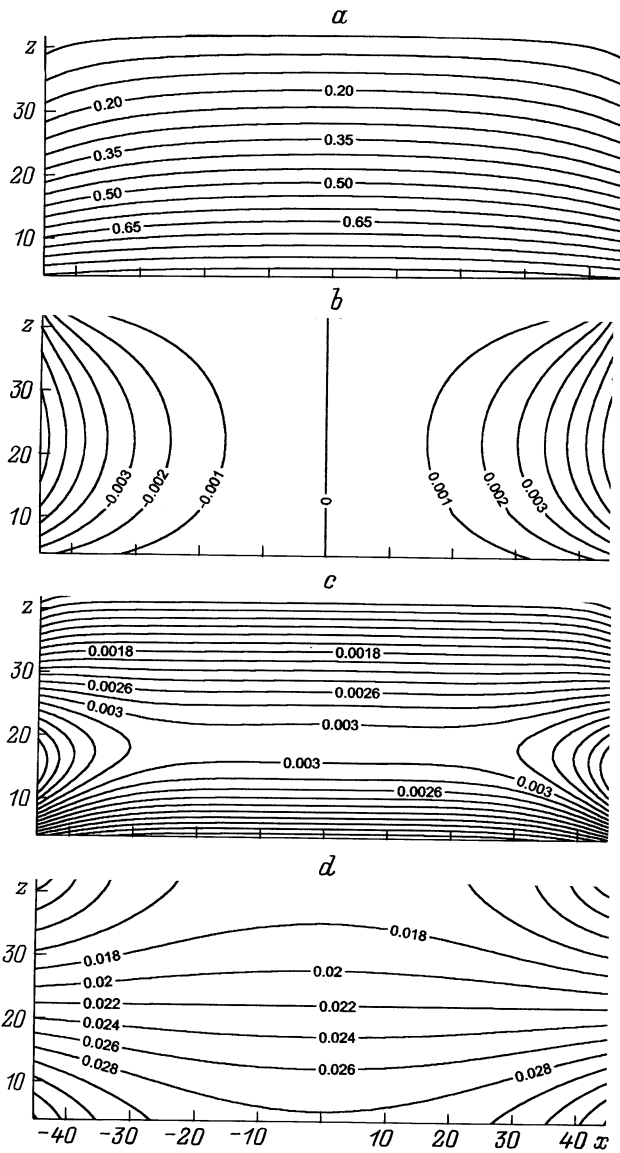


Рис. 2.

В проведенных расчетах число узлов на граничной поверхности  $S = S_1 \cup S_2$  равнялось 8000, т.е. исходный граничный интегральный оператор (2) аппроксимировался плотно заполненной матрицей размером  $(8000 \times 8000)$ .

При разработке *TEM*-камер составляющие вектора напряженности электростатического поля  $E_x(x, y, z)$  и  $E_y(x, y, z)$  обычно не учитываются, поскольку считается, что их значения пренебрежительно малы в сравнении со значениями  $E_z(x, y, z)$ . Однако достоверные количественные оценки в подтверждение этого факта получены не были.

Сравнение приведенных на рис. 2 изолиний с линиями равного уровня  $v(x, y, z)$ ,  $E_x(x, y, z)$  и  $E_z(x, y, z)$ , полученными в прямоугольнике  $y = 0$ ,  $x \in [-a_1, a_1]$ ,  $z \in [0, b_3]$  (в этом случае  $E_y(x, y, z) \equiv 0$ ), выявило их качественные различия. Последнее справедливо и по отношению к

изолиниям  $v(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$  и  $E_z(x, y, z)$ , полученным в прямоугольнике  $x = 0$ ,  $y \in [-b_3, b_3]$ ,  $z \in [0, b_3]$ , и изолиниям, приведенным на рис. 3. Значения потенциала электростатического поля  $v(x, y, z)$  и соответствующих составляющих вектора напряженности  $E_x(x, y, z)$  в точках  $(x, 0, z)$  и  $(x, 0.2b_3, z)$  при  $x \in [-a_1, a_1]$  и  $z \in [0, b_3]$ , а также в точках  $(0, y, z)$  и  $(0.2b_3, y, z)$  при  $y \in [-b_3, b_3]$  и  $z \in [0, b_3]$  отличались на несколько процентов. Последнее свидетельствует о том, что моделирование полей *TEM*-камеры на основе электростатических задач на плоскости (что было проверено соответствующими вычислительными экспериментами) в определенных условиях может дать качественно (но не количественно) верную картину распределения потенциала и составляющей вектора напряженности электростатического поля в плоскостях симметрии *XY* и *XZ*, однако оно оказывается очень грубым при моделировании рассеяния поля *TEM*-камеры на проводящих поверхностях.

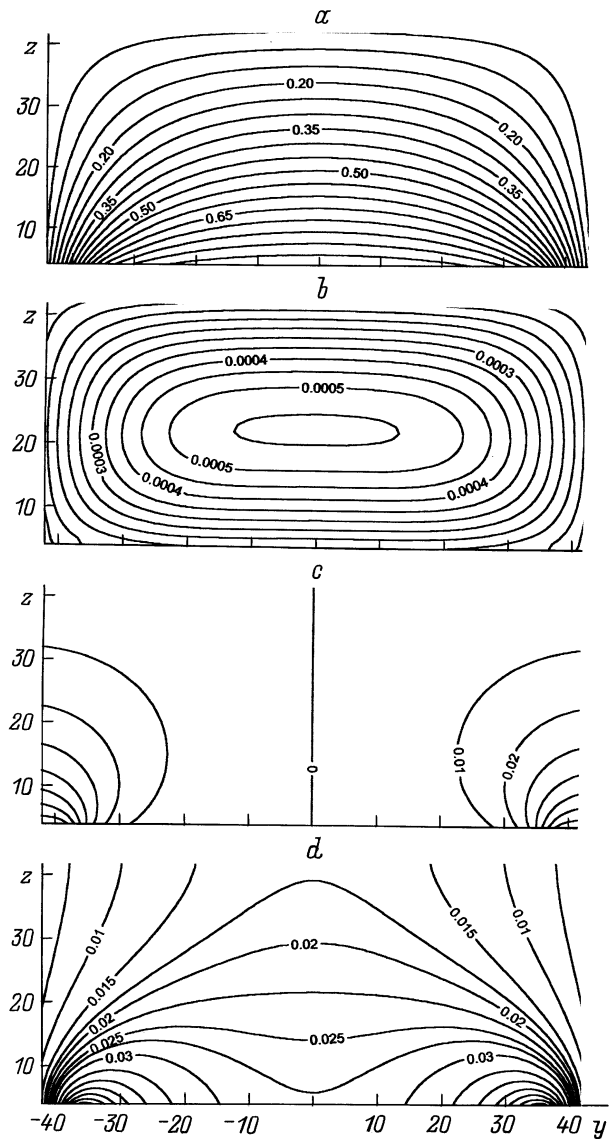


Рис. 3.

## 2. Рассеяние электростатического поля ТЕМ-камеры на проводящей поверхности вращения

Большой практический интерес представляет задача определения возмущения поля ТЕМ-камеры, вызванного внесенными в камеру различными проводящими объектами. В настоящем разделе рассмотрим задачу рассеяния поля ТЕМ-камеры бесконечно проводящими экранами и телами, представляющими собой различные поверхности вращения (цилиндр, конус, сфера, эллипсоид вращения и т.д.). В этом случае требуется найти решение краевой задачи (1), множество граничных точек которой образует поверхность  $S$  следующего вида:  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — ранее рассмотренные электроды ТЕМ-камеры, а  $S_3$  — некоторая поверхность вращения при условии, что потенциал  $v(x)$  электростатического поля данной системы принимает на границе  $S$  следующие значения:

$$v(x) = f(x), \quad x \in S, \quad f(x) = \chi_{S_i}(x)C_i, \quad x \in S_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — заданные постоянные,  $C_3$  — в общем случае неизвестная константа.

По аналогии с разделом 1 от краевой задачи перейдем к рассмотрению следующей системы граничных интегральных уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 A_{ij}u_j = C_i, \quad [A_{ij}, \Psi](x) = \int \frac{\Psi(y)}{|x-y|} ds_y, \\ x \in S_i, \quad y \in S_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Численное решение уравнений (8) будем строить на основе итерационного процесса

$$A_{11}u_1^{(n+1)} = (1-\omega)A_{11}u_1^{(n)} + \omega[C_1 - A_{12}u_2^{(n)} - A_{13}u_3^{(n)}], \\ A_{22}u_2^{(n+1)} = (1-\omega)A_{22}u_2^{(n)} + \omega[C_2 - A_{21}u_1^{(n+1)} - A_{23}u_3^{(n)}], \\ A_{33}u_3^{(n+1)} = (1-\omega)A_{33}u_3^{(n)} + \omega[C_3 - A_{31}u_1^{(n+1)} - A_{32}u_2^{(n+1)}], \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Рассмотрим вопрос построения оператора  $A_{33}^{-1}$ , обратного  $A_{33}$ , поскольку операторы  $A_{11}^{-1}$  и  $A_{22}^{-1}$  строятся на основе соотношений (4) и (5)–(7) соответственно.

Поверхность вращения  $S_3$  описывается группой  $C_\infty$  преобразований симметрии евклидова пространства, следовательно, она обладает конечной абелевой подгруппой  $C_n$  группы  $C_\infty$  для любого  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ );  $C_n$  — циклическая группа преобразований симметрии следующего вида:  $\{e, \tau, \dots, \tau^{(n-1)}\}$ , где  $\tau$  — поворот на угол  $2\pi/n$  с поворотной осью, совпадающей с осью симметрии поверхности вращения. Поскольку  $C_n$  — конечная абелева группа преобразований симметрии поверхности  $S_3$ , а оператор  $A_{33}$  инвариантен к преобразованиям движения из группы симметрий граничной поверхности, то построение оператора  $A_{33}^{-1}$  имеет смысл проводить на основе методов [2,3].

В силу свойств симметрии поверхность  $S_3$  допускает разбиение вида

$$S_3 = \bigcup_{i=1}^n s_i^{(3)}, \quad s_i^{(3)} \cap s_j^{(3)} = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ \tau^{i-1}s_i^{(3)} = s_1^{(3)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \mapsto \quad S_3 = \bigcup_{i=1}^n \tau^{n-i+1}s_1^{(3)}$$

на конгруэнтные составляющие  $\{s_i^{(3)}\}$  относительно группы  $C_n$ . Далее, в [2,3] показано, что в результате известных унитарных преобразований оператор  $A_{33} = \|a_{ij}\|$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) может быть приведен к диагональному виду [12]

$$A_{33} \mapsto \hat{A}_{33} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \quad (10)$$

где

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon^{n-(j-1)(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varepsilon = \exp(2\pi I/n), \quad I^2 = 1,$$

$$a_{ij} = a_{1j} T^{n-j+1}, \quad T^{n-j+1}u(x) = u(\tau^{j-1}x), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$[a_{ij}\Psi](x) = \int \frac{\Psi(y)}{|x-y|} ds_y,$$

$$x \in s_i^{(3)}, \quad y \in s_j^{(3)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Построение  $A_{33}^{-1}$  на основе соотношений (10) позволяет уменьшить число арифметических действий при обращении сеточных операторов, аппроксимирующих  $A_{33}$ , в  $\cong n^2$  раз. Например, при  $n = 100$  число операций будет сокращено в  $\cong 10^4$  раз при использовании прямых методов обращения числовых матриц.

Как показали вычислительные эксперименты, если значение постоянной  $C_3$  известно (потенциал поверхности вращения), то итерационный алгоритм (9), где вычисление операторов  $A_{11}^{(-1)}$ ,  $A_{22}^{(-1)}$  и  $A_{33}^{(-1)}$  проводится на основе соотношений (4), (5)–(7) и (10) соответственно, позволяет определить электростатическое поле, создаваемое системой электродов  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  с заданными потенциалами  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  с погрешностью, не превышающей доли процента.

Рассмотрим задачу рассеяния электростатического поля ТЕМ-камеры бесконечно проводящим рассеивателем. Известно, что приближенное решение этой задачи может быть получено на основе численного решения уравнений (8), дополненных следующим условием (закон сохранения заряда):

$$\int u(y) ds_y = 0, \quad y \in S_3. \quad (11)$$

Условие (11) естественным образом, фактически без реального увеличения числа арифметических операций может быть включено в итерационный процесс (9) для определения константы  $C_3$ , а именно

$$A_{11}u_1^{(n+1)} = (1-\omega)A_{11}u_1^{(n)} + \omega[C_1 - A_{12}u_2^{(n)} - A_{13}u_3^{(n)}], \\ A_{22}u_2^{(n+1)} = (1-\omega)A_{22}u_2^{(n)} + \omega[C_2 - A_{21}u_1^{(n+1)} - A_{23}u_3^{(n)}],$$

$$A_{33}\tilde{u}_3^{(n+1)} = (1 - \omega)A_{33}\tilde{u}_3^{(n)} - \omega[A_{31}u_1^{(n+1)} + A_{32}u_2^{(n+1)}],$$

$$u_3^{(n+1)} = C_3^{(n+1)}\hat{u}_3 + \tilde{u}_3^{(n+1)}, \quad C_3^{(n+1)} = -\frac{\int \tilde{u}_3^{(n+1)} ds_y}{\int \hat{u}_3 ds_y},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где  $\hat{u}_3$  есть решение уравнения  $A_{33}\hat{u}_3 = 1$ .

Нетрудно видеть, что реализация итерационного процесса (12) практически не требует увеличения числа операций в сравнении с (9), т.е. итерационный процесс (12) в решении задач рассеяния обладает теми же достоинствами, что и итерационный процесс (9) в задачах определения электростатического поля, создаваемого поверхностью  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Подчеркнем, что как в случае итерационного процесса (9), так и в случае итерационного процесса (12) пространственное расположение поверхностей  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  произвольно относительно друг друга.

Рассмотрим задачу рассеяния электростатического поля *TEM*-камеры (рис. 2, 3) на цилиндре высотой  $H = 0.065b_3$  и радиуса  $R = 0.18b_3$ . Приближенное решение данной задачи для различных положений цилиндра в объеме *TEM*-камеры было получено на основе описанного итерационного процесса (12). Так, на рис. 4, *a* приведены линии равного уровня для потенциала поля  $v(x, y, z)$  данной системы в прямоугольнике  $y = 0$ ,  $x \in [-a_1, a_1]$ ,  $z \in [0, b_3]$ . Линии равного уровня для составляющей вектора напряженности электростатического поля  $E_z(x, y, z)$

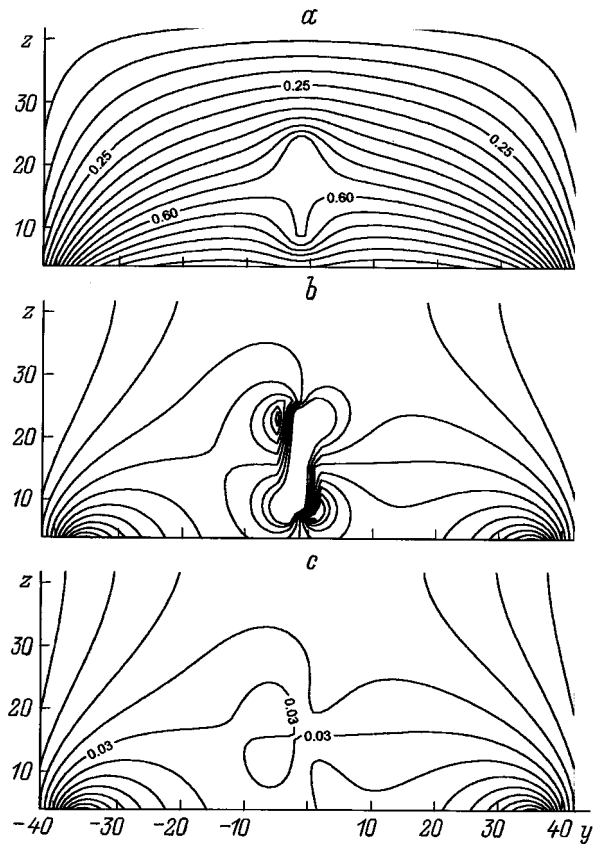


Рис. 5.

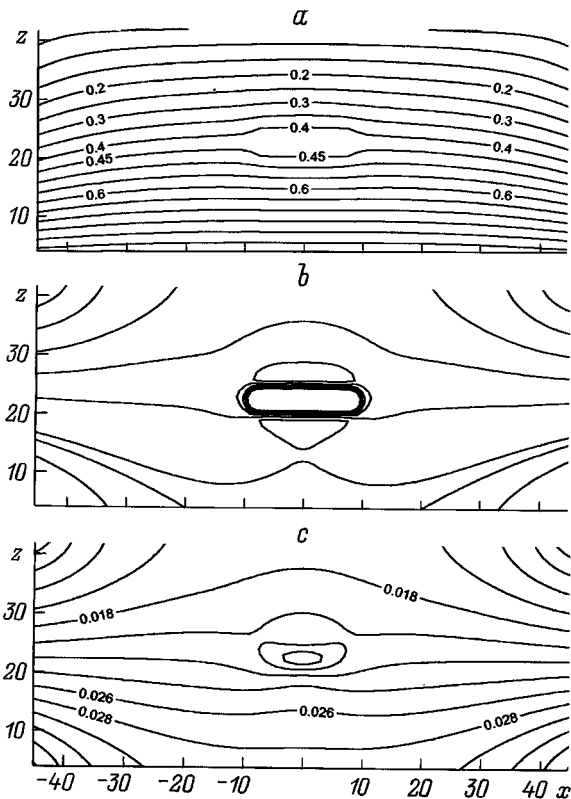


Рис. 4.

в указанном прямоугольнике приведены на рис. 4, *b*, а на рис. 4, *c* представлены изолинии  $E_z(x, y, z)$  в прямоугольнике  $y = 0.2b_3$ ,  $x \in [-a_1, a_1]$ ,  $z \in [0, b_3]$ . Ось вращения цилиндра в этом случае совпадала с осью  $Z$  (рис. 1, *a, b*), расстояние от внутреннего электрода *TEM*-камеры до нижнего дна цилиндра равнялось  $h = 0.45b_3$ .

Пусть описанный выше цилиндр расположен следующим образом: ось вращения цилиндра параллельна оси  $Y$  и пересекает ось  $Z$  на высоте  $h = 0.35b_3$  при этом одно из доннышек цилиндра лежит в плоскости  $XZ$ . Для данного расположения цилиндра изолинии, характеризующие распределение потенциала  $v(x, y, z)$  в прямоугольнике  $x = 0$ ,  $y \in [-b_3, b_3]$ ,  $z \in [0, b_3]$ , приведены на рис. 5, *a*. В этом же сечении на рис. 5, *b* показаны линии равного уровня  $E_z(x, y, z)$ , а на рис. 5, *c* — изолинии  $E_z(x, y, z)$  в прямоугольнике  $x = 0.2b_3$ ,  $y \in [-b_3, b_3]$ ,  $z \in [0, b_3]$ .

Сравнивая рис. 4, 5 с рис. 2, 3, можно определить характерные особенности возмущений электростатического поля *TEM*-камеры, вызванных наличием идеально проводящего цилиндра в некоторой части объема *TEM*-камеры. Поскольку электростатическое поле является потенциальным, а идеально проводящий цилиндр — эквипотенциальной поверхностью, то можно говорить об обтекании полем поверхности цилиндра, характер которого непосредственно определяется из рис. 4, 5, при этом можно наглядно судить о степени возмущений

электростатического поля  $ТЕМ$ -камеры, вызванных цилиндром, и скорости их затухания в пространстве.

В проведенных расчетах число узлов на граничной поверхности  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  равнялось 9000, т.е. исходный граничный интегральный оператор (8) аппроксимировался плотно заполненной матрицей размером  $(9000 \times 9000)$ .

В заключение данного раздела отметим, что авторы ограничились разработкой программ моделирования рассеяния поля  $ТЕМ$ -камеры на поверхностях вращения с кусочно-гладкой образующей, представимой в виде конечного объединения отрезков прямых и дуг окружностей (замкнутые и незамкнутые цилиндрические и конические поверхности, сфера и т.д.). Вместе с тем указанная программа может служить основой для рассмотрения поверхностей вращения с образующими любых типов, поскольку описанные алгоритмы реализуют определенный тип симметрии поверхности и не связаны с конкретной формой поверхности. Последнее означает, что разработка программ для решения задачи рассеяния поля  $ТЕМ$ -камеры для поверхностей вращения с образующей определенного типа сводится к программному описанию только класса этих поверхностей.

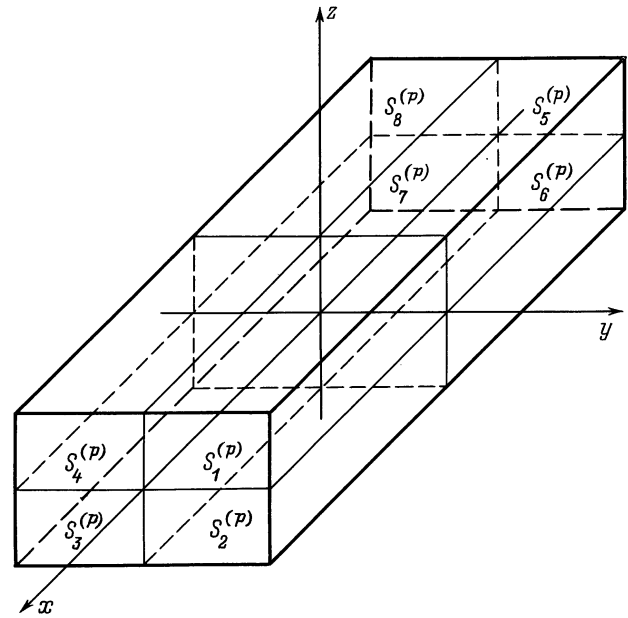


Рис. 6.

### 3. Рассеяние электростатического поля $ТЕМ$ -камеры на параллелепипеде

Если в качестве составляющей  $S_3$  граничной поверхности  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , рассмотренной в предыдущем разделе, взять параллелепипед (рис. 6), то приближенные значения потенциала электростатического поля при известных постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  могут быть получены на основе итерационного процесса (9). В свою очередь численное решение задачи рассеяния электростатического поля  $ТЕМ$ -камеры на бесконечно проводящем параллелепипеде может быть получено на основе итерационного процесса (12). Вместе с тем высокую точность расчетов на основе итерационных алгоритмов (9) или (12) можно ожидать при условии существования эффективных алгоритмов обращения оператора  $A_{33}$

$$[A_{33}\Psi](x) = \int \frac{\Psi(y)}{|x-y|} ds_y, \quad x, y \in S_3,$$

где  $S_3$  — параллелепипед.

Поверхность  $S_3$  описывается абелевой группой симметрий  $\{\tau_k^{(3)}\}$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) (рис. 6), а инвариантность оператора  $A_{33}$  к преобразованиям движения евклидова пространства из группы  $\{\tau_k^{(3)}\}$  восьмого порядка устанавливается непосредственно. В [13] были рассмотрены три существующие абстрактные абелевы группы восьмого порядка, получены канонические представления операторов, инвариантных относительно преобразований из данных групп. Результаты работы [13] и составят основу алгоритма построения оператора  $A_{33}^{-1}$ , обратного  $A_{33}$ .

Абелева группа преобразований симметрии поверхности  $S_3$   $\{\tau_k^{(3)}\}$  восьмого порядка имеет следующий вид:

$\{e, \sigma_z, \sigma_y\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x, \sigma_x\sigma_z, \sigma_x\sigma_y\sigma_z, \sigma_x\sigma_z\}$ , где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — отражения относительно трех попарно ортогональных плоскостей  $\{YZ\}, \{XZ\}, \{XY\}$  соответственно (рис. 6). Поскольку  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = e$ ,  $e$  — тождественное преобразование, то группа  $\{\tau_k^{(3)}\}$  является прямым произведением трех своих абелевых подгрупп  $\{e, \sigma_x\}$ ,  $\{e, \sigma_y\}$  и  $\{e, \sigma_z\}$ . Поскольку подгруппы  $\{e, \sigma_x\}$ ,  $\{e, \sigma_y\}$  и  $\{e, \sigma_z\}$  являются циклическими группами, то таблицы их характеров имеют один и тот же вид:  $\chi_1(e) = 1, \chi_2(e) = 1, \chi_1(\tau) = 1, \chi_2(\tau) = -1, \tau = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ , используя который, можно непосредственно вычислить характеры  $\chi_i(\tau_k^{(3)})$  группы  $\{\tau_k^{(3)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$  (табл. 2).

Далее, поверхность  $S_3$  допускает разбиение вида

$$S_3 = \bigcup_{i=1}^8 s_i^{(p)}, \quad s_i^{(p)} \cap s_j^{(p)} = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$\tau_i^{(3)} s_1^{(p)} = s_i^{(p)}, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad \mapsto \quad S_3 = \bigcup_{i=1}^8 \tau_i^{(3)} s_1^{(p)}$$

на конгруэнтные составляющие  $\{s_k^{(p)}\}$  относительно группы  $\{\tau_k^{(3)}\}$ ;  $k = 1, 2, \dots, 8$ . С учетом последних соотношений для каждого  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), перепишем третье уравнение итерационных процессов (9) и (12) в виде

$$\sum_{j=1}^8 A_{ij} U_j(x) = F_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad x \in s_1^{(p)}, \quad (13)$$

где, например, для третьего из уравнений (9) введены следующие обозначения:

$$U_j(x) = u_3^{(n+1)}(\tau_j^{(3)}, x), \quad u_3^{(n+1)}(\tau_j^{(3)}, x) = u_3^{(n+1)}(\tau_j^{(3)} x),$$



Таблица 2.

$\chi_i(\tau_j)$	$\tau_1 = e$	$\tau_2 = \sigma_z$	$\tau_3 = \sigma_y\sigma_z$	$\tau_4 = \sigma_y$	$\tau_5 = \sigma_x$	$\tau_6 = \sigma_x\sigma_y$	$\tau_7 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z$	$\tau_8 = \sigma_x\sigma_z$
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$\chi_3$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi_4$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_5$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_6$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\chi_7$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
$\chi_8$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1

$$x \in s_1^{(p)}, \quad j = 1, 2, \dots, 8,$$

$$F_i(x) = f(\tau_i^{(3)}, x), \quad f(\tau_i^{(3)}, x) = f(\tau_i^{(3)}x),$$

$$x \in s_1^{(p)}, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

$$f(x) = (1-\omega)A_{33}u_3^{(n)}(x) + \omega[C_3 - A_{31}u_1^{(n+1)}(x) - A_{32}u_2^{(n+1)}(x)],$$

$$x \in S_3,$$

$$[A_{ij}\Psi](x) = \int \frac{\Psi(\tau_j^{(3)}y)}{|\tau_i^{(3)}x - \tau_j^{(3)}y|} ds_y,$$

$$x, y \in s_1^{(p)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 8.$$

Аналогичные обозначения соответствующим образом вводятся и для третьего из уравнений итерационного процесса (12).

От системы уравнений (13) на основе унитарных преобразований можно перейти к восьми независимым уравнениям

$$A(\hat{\sigma}_i)U(\hat{\sigma}_i) = F(\hat{\sigma}_i), \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (14)$$

где

$$A(\hat{\sigma}_i) = \sum_{j=1}^8 A_{j1}\chi_j(\tau_j^{(3)}), \quad U(\hat{\sigma}_i) = \sum_{j=1}^8 U_j\chi_j(\tau_j^{(3)}),$$

$$F(\hat{\sigma}_i) = \sum_{j=1}^8 F_j\chi_j(\tau_j^{(3)}), \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Если решение уравнений (14)  $U(\hat{\sigma}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) известно, то решение системы (13) восстанавливается следующим образом:

$$U_i = \sum_{j=1}^8 U(\hat{\sigma}_j)\chi_j(\tau_j^{(3)}), \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Таким образом, решение третьего из уравнений итерационных процессов (9) или (12) сводится к решению уравнений (14), т.е. обращение оператора  $A_{33}$  заменяется построением  $A^{-1}(\hat{\sigma}_i)$  операторов, обратных  $A(\hat{\sigma}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Последнее позволяет уменьшить объем вычислений при построении сеточных операторов, аппроксимирующих  $A_{33}^{-1}$ , в  $\cong 64$  раза. Следовательно, численное решение задачи рассеяния электростатического

поля на произвольно ориентированном параллелепипеде может быть получено с высокой точностью на основе итерационного процесса (12), где обращение операторов  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  и  $A_{33}$  проводится в соответствии с соотношениями (4), (5)–(7) и (14).

Рассмотрим задачу рассеяния электростатического поля  $TEM$ -камеры (рис. 2,3) на параллелепипеде со следующими характерными размерами:  $a_x = 0.18b_3$ ,  $b_y = 0.18b_3$  и  $c_z = 0.0325b_3$ , т.е. указанный параллелепипед представляет собой квадратную пластину со стороной основания, равной диаметру цилиндра, и толщиной, равной толщине цилиндра, описанного в предыдущем разделе. Данная пластина последовательно располагалась в тех же объемах, что и этот цилиндр. Расчет электростатических полей двух описанных систем с параллелепипедом проводился при 11 500 узлах, соответствующим образом выбранных на граничной поверхности  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Для потенциала электростатического поля  $v(x, y, z)$  и соответствующих составляющих вектора напряженности  $E(x, y, z)$  были построены графики линий равного уровня в тех же сечениях, что и на рис. 4,5. Сравнение указанных графиков изолиний рассеянного параллелепипедом электростатического поля  $TEM$ -камеры с графиками изолиний рассеянного цилиндром поля  $TEM$ -камеры (рис. 4, 5) показало их несомненное качественное сходство.

В [13] рассматривались квадрупольные системы, которые обладают той же группой симметрий, что и параллелепипед, т.е. класс поверхностей с указанным типом симметрии, представляющий интерес в приложениях, достаточно широк. В свою очередь задачи рассеяния электростатического поля  $TEM$ -камеры на поверхностях из указанного класса решаются на базе приведенных алгоритмов. Требуется только программное описание данного класса поверхностей, что не вызывает принципиальных сложностей и связано с относительно небольшими затратами.

В заключение данной работы отметим, что рассмотренные здесь алгоритмы могут быть взяты за основу при разработке схем численного решения задач рассеяния электростатических полей  $TEM$ -камер известных типов на различных системах замкнутых и незамкнутых экранов.

## Список литературы

- [1] *Crawford M.L.* // IEEE Trans. Electromfagn. Compatib. 1974. Vol. 16. N 4. P. 189–195.
- [2] *Демин С.К., Тарасов Р.П.* // ЖВМиМФ. 1989. Т. 29. № 9. С. 1308–1317.
- [3] *Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П.* // ДАН СССР. 1990. Т. 314. № 3. С. 589–593.
- [4] *Тарасов Р.П.* // ЖВМиМФ. 1992. Т. 31. № 9. С. 1515–1517.
- [5] *Тарасов Р.П.* // ЖВМиМФ. 1993. Т. 33. № 12. С. 1815–1825.
- [6] *Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П.* // ЖВМиМФ. 1993. Т. 33. № 7. С. 1030–18042.
- [7] *Wan C.H.* // IEEE Trans. Electromfagn. Compatib. 1993. Vol. 35. N 1. P. 109–113.
- [8] *Jaswon M.A., Symm G.T.* // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1963. Vol. 275. P. 23–46.
- [9] *Jaswon M.A., Ponter A.R.* // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1963. Vol. 273. P. 237–246.
- [10] *Harrington R.F.* Field Computation by Moment Methods. New York: Macmillan, 1968.
- [11] *Демин С.К., Тарасов Р.П.* // Мат. моделирование. 1993. Т. 5. № 7. С. 113–123.
- [12] *Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П.* // ЖВМиМФ. 1992. Т. 31. № 1. С. 40–58.
- [13] *Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П.* // ЖВМиМФ. 1990. Т. 30. № 11. С. 1631–1661.