01;08

Обобщение закона Френеля на случай вызванного волной давления перемещения границы раздела акустических сред

© В.А. Поздеев

(Поступило в Редакцию 18 марта 1998 г.)

Впервые рассмотрена и решена задача взаимодействия нестационарной волны давления с подвижной границей раздела акустических сред при учете конечности величины ее перемещения, вызванного волной. Аналитическое решение задачи получено методом нелинейного преобразования времени. Найдены представления для закона движения границы раздела, для отраженной и прошедшей волн как функции временнóго профиля падающей волны и акустических характеристик сред.

Взаимодействие акустической волны с фиксированной границей раздела акустических сред описывается известными формулами Френеля [1]. В [2] показано проявление эффекта Допплера при падении на движущуюся с постоянной скоростью границу гармонических волн. В [3] получено решение задачи взаимодействия нестационарной волны давления с движущейся границей раздела по заданному временнóму закону произвольного вида. Рассмотрим задачу отражения и прохождения волн давления на границе раздела, перемещение которой вызвано падающей волной.

Следуя [3], полагаем, что со стороны среды 1 с акустическим сопротивлением $z_1 = \rho_1 c_1$, где ρ_1 — плотность среды, c_1 — скорость звука в среде, нормально границе раздела падает плоская волна давления. Временнóй профиль падающей волны имеет вид $p_{10}(t)$. При взаимодействии волны с первоначально покоящимися средами происходит ее перемещение, отражение волны от движущейся границы и генерирование волны во второй среде, акустическое сопротивление которой $z_2 = \rho_2 c_2$, $z_2 \neq z_1$. Для определенности ось координат $0x$ направим против движения падающей волны, а начало координат поместим на начальное положение границы раздела. Отсчет времени начинаем с момента достижения фронта падающей волны контактной границы. Полагаем акустические среды невязкими, а их движение будем описывать линейными уравнениями.

На подвижной границе раздела двух сред выполняются следующие граничные условия:

$$(p_1 - p_2)\Big|_{x=h(t)} = 0, \quad p_1 = p_{10} + p_{11}, \tag{1}$$

$$(v_1 - v_2)\Big|_{x=h(t)} = 0, \quad v_1 = v_{10} + v_{11}, \tag{2}$$

$$v_2\Big|_{x=h(t)} = \frac{dh}{dt}, \tag{3}$$

где p_1, p_2 — давления, v_1, v_2 — скорости частиц сред; $h(t)$ — пока неизвестный закон движения границы раздела.

Введем в рассмотрение потенциалы скоростей возмущенного движения сред

$$\Phi_1(x,t) = \Phi_{10}(t - x/c_1) + \phi_{11}(t + x/c_1), \tag{4}$$

$$\phi_2(x,t) = \phi_2(t - x/c_2), \tag{5}$$

где ϕ_i — потенциалы скоростей движения i-й среды ($i = 1, 2$); ϕ_{10} — потенциал падающей волны; ϕ_{11} — потенциал отраженной волны; ϕ_2 —потенциал прошедшей волны.

Составляющие давления и скорости связаны с потенциалами скоростей известными соотношениями

$$p_i = -\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \quad v_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}. \tag{6}$$

Следуя [3], для решения поставленной задачи (1)–(6) воспользуемся методом нелинейного преобразования времени [4,5]. Представления для отраженной и прошедшей волн здесь запишем в виде

$$p_{11}(x,t) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} p_{10}(f_+(t_1^0)), \tag{7}$$

$$p_2(x,t) = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} p_{10}(f_-(t_2^2)), \tag{8}$$

где

$$f_+(t_1^0) = t_1^0 - 2h(w_+(t_1^0))/c_1, \; t_1^0 = t + x/c_1,$$

$$f_-(t_2^0) = t_2^0 + (1 - c_2/c_1)h(w_-(t_2^0))/c_2, \; t_2^0 = t - x/c_2,$$

$$t = w_+(\xi_1) \to t + h(t)/c_1 = \xi_1,$$

$$t = w_-(\xi_2) \to t - h(t)/c_2 = \xi_2. \tag{9}$$

Можно показать, что выражения (7)–(9) эквивалентны соответствующим результатам [3]. Для определения закона движения границы раздела сред вследствие упругих деформаций воспользуемся граничным условием (3), соотношением связи $v_2 = p_2/z_2$ и выражением (8). Получим

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{z_1 + z_2} P_{10}(t - h(t)/c_1). \tag{10}$$

В случае выполнения условия $(h(t)/(c_1 t))^2 \ll 1$ уравнение (10) можно записать в приближении

$$\frac{dh}{dt} - \frac{2}{z_1 + z_2} \frac{dp_{10}(t)}{dt} h = \frac{2}{z_1 + z_2} p_{10}(t). \tag{11}$$

Уравнение (11) может быть проинтегрировано

$$h = \frac{2}{z_1 + z_2} \exp\left(-\frac{p_{10}(t)}{c_1(z_1 + z_2)}\right) \times \int_0^t \exp\left(\frac{p_{10}(\tau)}{c_1(z_1 + z_2)}\right) p_{10}(\tau) d\tau. \qquad (12)$$

Рассмотрим падающую волну вида $p_{10}(t) = p_0 \times \exp(-\alpha t)$, где p_0 — амплитуда волны, α — постоянная времени. В этом случае может быть точно проинтегрировано исходное уравнение (10)

$$h = -\frac{c_1}{\alpha} \ln(1 + \beta_0(e^{-\alpha t} - 1)/c_1), \qquad (13)$$

где $\beta_0 = 2p_0/(z_1 + z_2) < 1$.

Если ограничиться промежутком времени $(\alpha t)^2 \ll 1$, то из (13) получим

$$h \approx \beta_0 t[1 - (\alpha t)(1 - \beta_0/c_1)/2 + \ldots], \qquad (14)$$

$$p_{11} \approx \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} p_0 \exp(-\alpha_1 t_1^0), \qquad (15)$$

$$p_2 \approx \frac{2z_2}{z_2 + z_1} p_0 \exp(-\alpha_2 t_2^0), \qquad (16)$$

где

$$\alpha_1 \approx \alpha \left(1 - \frac{\beta_0}{c_1}\right) \Big/ \left(1 + \frac{\beta_0}{c_1}\right),$$

$$\alpha_2 \approx \alpha \left(1 - \frac{\beta_0}{c_1}\right) \Big/ \left(1 - \frac{\beta_0}{c_2}\right).$$

Как видно из полученных выражений (14)–(16), $\alpha_1 < \alpha$ всегда и, следовательно, отраженная волна растягивается по сравнению с падающей. Что касается прошедшей волны, то при $c_2 < c_1$, $\alpha_2 > \alpha$ прошедшая волна растягивается, а при $c_2 > c_1$, $\alpha_2 < \alpha$ прошедшая волна сжимается по отношению к падающей.

Представляет интерес рассмотрение обратной задачи определения вида падающей волны при известном законе движения границы раздела сред. Пусть

$$h(t) = v_0(t) - a_0 t^2/2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2v_0/a_0. \qquad (17)$$

Тогда в соответствии с уравнением (10) получим

$$p_{10}(t) = \frac{c_1(z_1 + z_2)}{2} \left[1 - (1 - m_1)\sqrt{1 + \frac{2a_0 t}{c_1(1 - m_1)^2}}\right] \approx \frac{v_0(z_1 + z_2)}{2} \left[1 - \frac{a_0 t}{v_0(1 - m_1)} + \ldots\right],$$

$$m_1 = \frac{v_0}{c_1}. \qquad (18)$$

Далее нетрудно получить по выражениям (7), (8) представления для отраженной и прошедшей волн.

Список литературы

[1] *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 250 с.
[2] *Исакович И.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
[3] *Поздеев В.А.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 6. С. 30–32.
[4] *Поздеев В.А.* // ПММ. 1991. № 6. С. 1055–1058.
[5] *Поздеев В.А.* Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами. Киев: Наукова думка, 1992. 242 с.