

01;07

## Полное внутреннее отражение гауссова светового пучка

© П.Д. Кухарчик, В.М. Сердюк, И.А. Титовицкий

Белорусский государственный университет

Научно-исследовательский институт прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко

220064 Минск, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 20 декабря 1996 г.)

На основе применения интеграла Фурье построена приближенная теоретическая модель расчета полей отражения и преломления гауссова светового пучка на плоской границе раздела двух изотропных сред. Вблизи критического угла падения данная модель предсказывает наличие двух преломленных пучков, один из которых смещен вдоль границы на величину сдвига Гооса–Хенхен, причем для каждого из них имеют место кривизна фазовых фронтов и несовпадение эффективных направлений распространения энергии и фазы, как в анизотропной среде.

С явлениями отражения и преломления волн приходится часто встречаться в самых различных областях физики. Казалось бы, существует простая и надежная теоретическая модель этих явлений, основанная на плосковолновом приближении и использовании формул Френкеля [1–4]. Однако такое приближение оказывается не вполне корректным в условиях полного внутреннего отражения. Действительно, вблизи плоской границы раздела двух прозрачных сред при углах падения волны, сколь угодно меньших угла полного внутреннего отражения (критического угла), поле в преломляющей среде описывается бегущей однородной волной, а при углах падения, сколь угодно больших критического, — неоднородной волной, затухающей в направлении от границы [1–4]. Налицо разный скачок качественного состояния модельной системы, которого на самом деле не происходит [2,3]. Дело в том, что реальные волновые поля всегда ограничены и неоднородны в пространстве, а закономерности отражения и преломления пространственно ограниченных волновых пучков отличаются от таковых для безграничной плоской волны [2–4]. Особенно существенным это отличие оказывается в условиях полного внутреннего отражения.

До сих пор теоретические исследования полного внутреннего отражения пространственно ограниченных пучков сводились к изучению отраженного поля, поскольку для преломленного поля получаются слишком громоздкие интегральные выражения [2–6]. Насколько нам известно, только в работе [7] теоретически изучалось преломленное поле неоднородного светового пучка в условиях полного внутреннего отражения. В этой работе было построено точное решение дифференциального уравнения для волновой функции преломленного поля в виде двойного интеграла и найдено его простое асимптотическое приближение, которое, однако, не дает возможности описать некоторые эффекты, например сдвиг Гооса–Хенхен [3,5,6]. Целью данной работы является разработка более адекватной приближенной теории расчета полей при отражении и

преломлении гауссова пучка, который является самой простой моделью пространственно ограниченного светового поля.

Пусть на плоскую границу раздела двух изотропных сред  $x = 0$  с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_i$  (при  $x < 0$ ) и  $\varepsilon$  (при  $x > 0$ ) со стороны отрицательных  $x$  под некоторым углом, не равным  $\pi/2$ , падает гауссов световой пучок, волновое поле которого на границе записывается в виде

$$U_i(0, z) = \exp(-z^2/w^2 + i\beta_b z), \quad (1)$$

где  $\beta_b$  и  $w$  — постоянная распространения и эффективная полуширина пучка вдоль границы (временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  здесь опущен, а зависимостью поля от тангенциальной координаты  $y$ , перпендикулярной плоскости падения, будем пренебрегать).

Диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon$  могут быть комплексными величинами, т.е. допускается наличие поглощения в обеих средах. Разложим функцию (1) в интеграл Фурье по плоским волнам с постоянными распространения  $\beta$  вдоль границы, тогда поле падающего пучка вблизи последней представится следующим образом [3,4]:

$$U_i(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) \exp(i\alpha_i x + i\beta z) d\beta;$$

$$A(\beta) = (w/2\pi^{1/2}) \exp(-w^2[\beta - \beta_b]^2/4), \quad (2)$$

где  $\alpha_i = (k_0^2 \varepsilon_i - \beta^2)^{1/2}$  — нормальная к границе компонента волнового вектора каждой фурье-составляющей поля;  $k_0 = \omega/c$  — волновое число.

Отраженное  $U_r$  и преломленное  $U$  поля также будем искать в виде интегралов Фурье. Учитывая, что каждая плосковолновая фурье-компонента отражается и преломляется независимо от других, можно сразу записать

интегральные выражения для этих полей [3,4]

$$U_r(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\beta)A(\beta) \exp(-i\alpha_i x + i\beta z) d\beta;$$

$$U(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(\beta)A(\beta) \exp(i\alpha x + i\beta z) d\beta, \quad (3)$$

где

$$\alpha = (k_0^2 \varepsilon - \beta^2)^{1/2}; \quad R(\beta) = (\alpha_i \Theta - \alpha \Theta_i) / (\alpha_i \Theta + \alpha \Theta_i),$$

$$T(\beta) = 1 + R(\beta) = 2\alpha_i \Theta / (\alpha_i \Theta + \alpha \Theta_i) \quad (4)$$

— френелевские коэффициенты отражения и преломления [1-4];  $\Theta = \Theta_i = 1$  для *TE*-поляризации падающего светового поля и  $\Theta = \varepsilon$ ,  $\Theta_i = \varepsilon_i$  для *TM*-поляризации.

В дальнейшем удобно использовать представление коэффициентов *R* и *T* (4) через параметр  $\nu$ , который будем называть параметром отражения

$$R(\beta) = \exp(-2\nu); \quad T(\beta) = 1 + \exp(-2\nu);$$

$$\nu = \text{arth}(\alpha_i \Theta / \alpha \Theta_i) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \alpha \Theta_i / \alpha_i \Theta}{1 - \alpha \Theta_i / \alpha_i \Theta} \right). \quad (5)$$

Физический смысл этого параметра вполне очевиден: его вещественная и мнимая части определяют изменение интенсивности и фазы плоской волны при отражении.

Чтобы найти пространственное распределение отраженного и преломленного полей, достаточно подставить (4), (5) в (3) и вычислить получившиеся интегралы. Интегральные выражения такого типа часто встречаются в различных задачах распространения волновых пучков в слоистых системах [3,8], в частности при расчетах полей возбуждения в плоских диэлектрических волноводах [9]. Поэтому наряду с изложением конкретных результатов вычислений в данной работе имеет смысл отметить и некоторые нестандартные приемы их выполнения.

При вычислении подобных интегралов обычно применяется приближение, использующее малость длины световой волны  $\lambda = 2\pi/k_0$  по сравнению с полушириной пучка  $w$ , т.е. условие  $k_0 w \gg 1$  [3-6,8]. Тогда функция  $A(\beta)$  в интегралах (2), (3) оказывается заметно отличной от нуля в очень узком интервале изменения переменной интегрирования  $\beta_b(1 - 2/\beta_b w) < \beta < \beta_b(1 + 2/\beta_b w)$ , что дает возможность использовать для параметра  $\alpha_i$  линейное приближение по аргументу  $\beta$

$$\alpha_i(\beta) \approx \alpha_{ib} - \sigma_i(\beta - \beta_i); \quad \alpha_{ib} = (k_0^2 \varepsilon_i - \beta_b^2)^{1/2};$$

$$\sigma_i = \beta_b \text{Re}(1/\alpha_{ib}). \quad (6)$$

Нормальная компонента усредненного волнового вектора пучка  $\alpha_{ib}$  может быть комплексной из-за поглощения, но вследствие малости показателя поглощения

можно пренебречь мнимой частью параметра  $\sigma_i$ . В противном случае, т.е. при сильном поглощении в полубесконечной среде, на границе раздела  $x = 0$  возбуждающее поле (2) становится пренебрежимо малым.

Подставляя разложение (6) в (2), для падающего поля получаем

$$U_i(x, z) = \exp\left(-[z - \sigma_i x]^2/w^2 + i[\beta_b z + \alpha_{ib} x]\right).$$

Это — известное выражение поля гауссова пучка в пренебрежении поперечным дифракционным расплыванием амплитуды (в геометрическом приближении), которое справедливо на небольших расстояниях от рассматриваемой границы ( $|x| \ll k_0 w^2$ ) [4,8]. Здесь фаза поля определяется продольной координатой распространения пучка ( $\beta_b z + \alpha_{ib} x$ ), а интенсивность — поперечной координатой ( $z - \sigma_i x$ ).

Для отраженного и преломленного полей такая простая процедура линеаризации спектральной зависимости  $\alpha$  от  $\beta$  срабатывает только при углах падения пучка, заметно меньших или больших критического, т.е. когда  $\beta_b(1 + 4/\beta_b w) < \beta_c$  или  $\beta_b(1 - 4/\beta_b w) > \beta_c$ , где  $\beta_c = k_0(\text{Re } \varepsilon)^{1/2}$ . Тогда справедливо приближение

$$\alpha(\beta) \approx \alpha_b - \beta_b(\beta - \beta_b)/\alpha_b; \quad \alpha_b = (k_0^2 \varepsilon - \beta_b^2)^{1/2}. \quad (7)$$

Однако если величина  $\beta_c$  попадает в интервал интегрирования  $\beta_b(1 - 2/\beta_b w) \leq \beta \leq \beta_b(1 + 2/\beta_b w)$ , то параметр  $\alpha_b$  оказывается очень малым или вообще может обратиться в нуль, так что приближение (7) будет некорректным. Чтобы обойти эту трудность, используем разложение параметра  $\alpha$  по  $\beta$  не в точке  $\beta_b$ , а в точке  $\beta = \beta_b + s \equiv \beta_w$ , где  $s$  — некоторая комплексная величина. Расчеты, проведенные при различных значениях данной величины, и их сравнение с точными решениями [7] показывают, что оптимальным является значение  $s = -(1 + i)/2w$ . Это соответствует разложению

$$\alpha(\beta) \approx \alpha_w - \beta_w(\beta - \beta_w)/\alpha_w \approx \alpha_B - \sigma(\beta - \beta_b), \quad (8)$$

где

$$\beta_w = \beta_b - (1 + i)/2w;$$

$$\alpha_w = (k_0^2 \varepsilon - \beta_w^2)^{1/2} \approx \left[ k_0^2 \varepsilon - \beta_b^2 + \beta_b(1 + i)/w \right]^{1/2};$$

$$\alpha_B = \alpha_w - \beta_b(1 + i)/2w\alpha_w; \quad \sigma = \beta_b/\alpha_w. \quad (9)$$

Первый член разложения (8)  $\alpha_B$  отличается от такого  $\alpha_b$  в разложении (7) комплексной добавкой под знаком квадратного корня. Очевидно, что при больших значениях разности  $|k_0^2 \varepsilon - \beta_b^2|$ , т.е. вдали от области полного внутреннего отражения, этой добавкой можно пренебречь, но вблизи критического угла падения она обеспечивает конечное значение коэффициента  $\sigma$  (9) (по крайней мере в среде без усиления, с неотрицательным  $\text{Im } \varepsilon$ ) и тем самым корректность линейного представления (8).

В помощь (6), (8) можно найти аналогичное приближение для параметра отражения (5)

$$v \approx v_B + q(\beta - \beta_b); \quad v_B = \text{arth} \left( \frac{\Theta_i \alpha_B}{\Theta \alpha_{ib}} \right);$$

$$q \approx \frac{\Theta_i \Theta k_0^2 (\varepsilon - \varepsilon_i) \sigma}{\alpha_{ib} (\Theta^2 \alpha_{ib}^2 - \Theta_i^2 \alpha_b^2)} \quad (10)$$

или, поскольку  $\sigma$  достигает достаточно большой величины только при углах падения, близких к критическому,

$$q \approx -\Theta_i \sigma / \Theta \alpha_{ib}.$$

Подставляя (5), (6), (8), (10) в (3), можно вычислить функцию пространственного распределения поля отраженного и преломленного пучков. Для отраженного поля получим

$$U_r(x, z) = \exp \left( -2v_B + 4q_R^2 w^{-2} - [z + \sigma_i x - 2q_I]^2 w^{-2} + i \{ \beta_b z - \alpha_{ib} x - 4q_R [z + \sigma_i x - 2q_I] \} \right). \quad (11)$$

Здесь и ниже индексы  $R$  и  $I$  у какой-либо величины представляют собой сограженное обозначение ее вещественной и мнимой части.

Из (11) следует, что эффективный параметр отражения  $v_{\text{eff}}$  будет определяться как

$$v_{\text{eff}} = v_B - 2q_R^2 / w^2. \quad (12)$$

Даже с учетом того, что величина  $v_B$  (10) не совпадает со значением параметра отражения  $v_F = \text{arth}(\Theta_i \alpha_b / \Theta \alpha_{ib})$ , соответствующим формулам Френеля [1–4], величина вещественной части  $v_{\text{eff}}$  оказывается меньше  $v_F$ , поэтому средний коэффициент отражения  $R = \exp(-2v_{\text{eff}})$  по величине будет несколько больше френелевского. Кроме того, пучок как целое смещается вдоль границы (оси  $z$ ) на расстояние

$$\Delta z = 2q_I \approx 2\Theta_i \beta_b \alpha_{wi} / \Theta k_0 (\alpha_{wR}^2 + \alpha_{wI}^2) (\varepsilon_i - \varepsilon_R)^{1/2}, \quad (13)$$

т. е. имеет место эффект Гооса–Хенхен [3–6], неодинаковый для  $TE$ - и  $TM$ -поляризаций поля.

Выражение (11) описывает еще один эффект: направление распространения фазы отраженного пучка, определяемое мнимым показателем экспоненты (11), не совпадает с продольной координатой ( $\beta_b z - \alpha_{ib} x$ ), параллельной линиям постоянной интенсивности поля. Эта продольная координата, очевидно, будет определять направление распространения энергии пучка (11). Следовательно, эффективная волновая нормаль отклонена от лучевой нормали в сторону границы на угол

$$\delta_r = 4\Theta_i \varepsilon_R^{1/2} \alpha_{wR} / \Theta (\varepsilon_i - \varepsilon_R) k_0 w^2 (\alpha_{wR}^2 + \alpha_{wI}^2),$$

который неодинаков у  $TE$ - и  $TM$ -поляризаций поля. Таким образом, для отраженного пучка в изотропной

среде может иметь место эффект наведения анизотропии, вызывающей слабое двулучепреломление.

Все эти эффекты, обусловленные пространственной неоднородностью падающего поля, проявляются в наибольшей степени при углах падения, близких к критическому. Оценим их порядок в этом оптимальном случае

$$v_{\text{eff}} = v_B - \Theta_i^2 \varepsilon_R^{1/2} / \Theta^2 (\varepsilon_i - \varepsilon_R) k_0 w;$$

$$\Delta z / w = (\Theta_i / \Theta) \varepsilon_R^{1/4} \{ 2 / (\varepsilon_i - \varepsilon_R) k_0 w \}^{1/2};$$

$$\delta_r = \left\{ 2^{3/2} \Theta_i \varepsilon_R^{1/4} / \Theta (\varepsilon_i - \varepsilon_R) \right\} (k_0 w)^{-3/2}. \quad (14)$$

Сравним последнюю величину с углом раскрытия, в котором должен распространяться гауссов пучок, т. е. с углом его дифракционного расплывания, которое выше не учитывалось. Данный угол равен  $(2/k_0 w)$  [4,8] и оказывается много большим угла  $\delta_r$  (14). Отсюда следует, что эффект дифракционного расплывания будет сильнее эффекта углового смещения волновой нормали и, видимо, не позволит его наблюдать экспериментально.

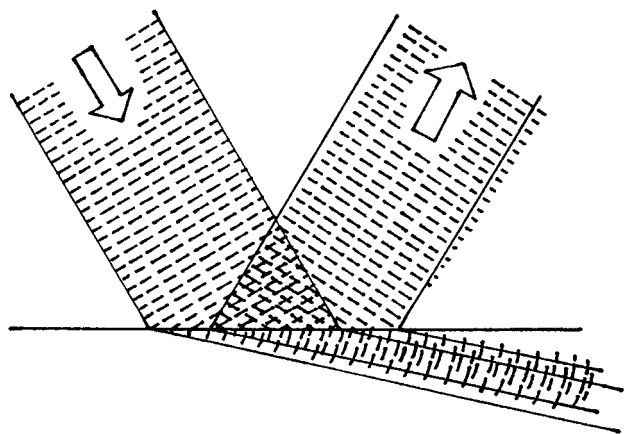
Для преломленного поля (3) нельзя пренебречь мнимой частью коэффициента  $\sigma$  (9) линейного разложения  $\alpha$  по  $\beta$  (8), как это делалось для падающего и отраженного пучков у  $\alpha_i$  (6). При этом интегралы (3) в выражении для  $U$  оказываются интегралами вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -[\beta - \beta_b - iC]^2 - 2i\sigma x [\beta - \beta_b] / w \right) d\beta, \quad (15)$$

в которых при больших  $x$  нарушается корректность линейной аппроксимации — для  $x(\beta - \beta_b)\sigma_I > 0$  получается сильно завышенное значение подынтегральной функции. Чтобы преодолеть эту трудность, заменим аргумент  $(\beta - \beta_b)$  у слагаемого с  $x\sigma_I$  в (15) его средним значением  $iC/2$  по эффективному интервалу интегрирования. Тогда будем иметь следующее приближенное представление преломленного поля (3):

$$U(x, z) = \exp(i\alpha_B x + i\beta_b z) \left\{ \exp \left( -[z - \sigma_R x]^2 / w^2 + i\sigma_I [z - \sigma_R x] x / w^2 \right) + \exp \left( -2v_B + 4q_R^2 w^{-2} - [z - \sigma_R x - 2q_I]^2 / w^2 + i[\sigma_I x - 4q_R] \times [z - \sigma_R x - 2q_I] / w^2 - 2q_R \sigma_I x / w^2 \right) \right\}, \quad (16)$$

которое представилось в виде суперпозиции полей двух пучков. На границе раздела  $x = 0$  их амплитуды равны амплитудам падающего (1) и отраженного (11) пучков соответственно, причем второй пучок смещен вдоль границы относительно первого на величину сдвига Гооса–Хенхен (13) (рис. 1). Поверхности постоянной фазы обоих пучков (16), вообще говоря, не являются плоскими и обладают постоянной кривизной  $K = 2\sigma_R \sigma_I / \beta_b w^2$ . Экстремальное значение  $K_e = -1/2w$  достигается при углах



**Рис. 1.** Схема отражения и преломления пучка вблизи критического угла падения.

падения, близких к критическому. В этой же области максимальными будут и другие эффекты: уменьшение параметра отражения у второго преломленного пучка на такую же величину (12), что и у отраженного поля, а также несовпадение коэффициентов амплитудного затухания для преломленных пучков на величину  $2q_R\sigma_I/w^2$ . Легко заметить еще один эффект, аналогичный эффекту наведенной анизотропии для отраженного поля, — несовпадение направлений распространения интенсивности, перпендикулярных плоскостям  $z - \sigma_R x = \text{const}$ ,  $z - \sigma_R x - 2q_R = \text{const}$ , с направлениями распространения фазы, которые определяются главным образом координатной зависимостью  $(\alpha_B x + \beta_b z)$  в (16). Оно характеризуется углом

$$\delta \approx (1 - \alpha_{BR}\sigma_R/\beta_b) (1 + \sigma_R^2)^{-1/2}$$

между векторами эффективной фазовой и лучевой нормали, максимальное значение которого  $\delta \approx (\beta_b w)^{-1/2}$  достигается опять же в области углов падения, близких к критическому.

Если учесть, что волновые пучки, используемые в оптике и акустике, обычно подчиняются условию  $(k_0 w)^{1/2} \gg 1$ , то выражения (11) и (16) для отраженного и преломленного полей упростятся следующим образом:

$$U_r(x, z) \approx R_B \exp\left(i[\beta_b z - \alpha_{ib} x] - [z + \sigma_i x]^2/w^2\right);$$

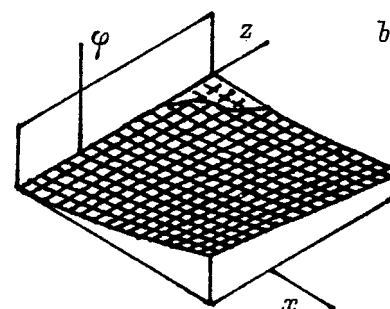
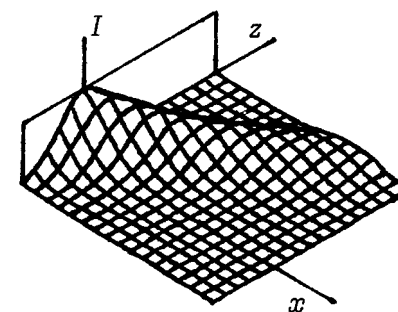
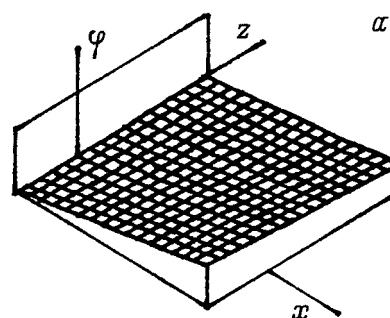
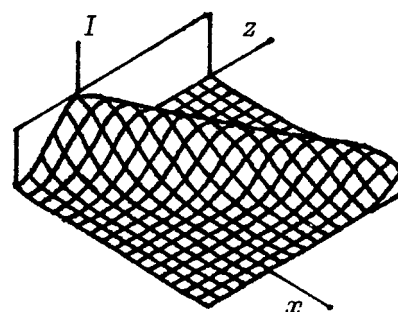
$$U(x, z) \approx T_B \exp\left(i[\beta_b z + \alpha_B x] - [z - \sigma_R x]^2/w^2 + i\sigma_I [z - \sigma_R x]x/w^2\right), \quad (17)$$

где  $R_B = \exp(-2\nu_B) = (\alpha_{ib}\Theta - \alpha_B\Theta_i)/(\alpha_{ib}\Theta + \alpha_B\Theta_i)$ ,  $T_B = 1 + R_B = 2\alpha_{ib}\Theta/(\alpha_{ib}\Theta + \alpha_B\Theta_i)$  — коэффициенты отражения и прохождения для усредненных направлений распространения.

Применительно к таким пучкам почти все рассмотренные выше эффекты окажутся пренебрежимо малыми, за

исключением, вероятно, эффектов кривизны волнового фронта и несовпадения направлений фазовой и лучевой нормали преломленного пучка.

На рис. 2 представлены графики, иллюстрирующие пространственную структуру поля (17), преломленного



**Рис. 2.** Пространственное распределение интенсивности  $I$  и фазы  $\varphi$  поля, преломленного на границе двух прозрачных сред с показателем преломления  $\varepsilon_i^{1/2} = 1.6$  и  $\varepsilon^{1/2} = 1.5$  в случаях, когда угол падения меньше критического на  $5''$  (a), равен критическому (b) и больше критического на  $5''$  (c). По оси  $x$  масштаб увеличен в 200 раз по сравнению с масштабом вдоль оси  $z$ .

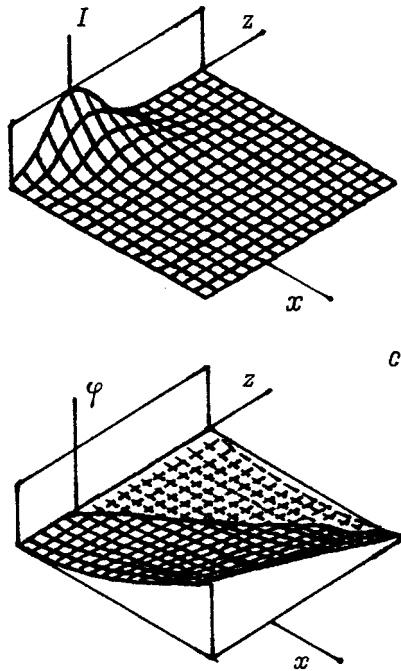


Рис. 2 (продолжение).

на границе двух прозрачных сред, когда  $k_0 w = 4.1 \cdot 10^4$ . Быстрое изменение фазы по оси  $z$ , даваемое множителем  $\exp(i\beta_b z)$ , при построении графиков не учитывалось. Сравнение рис. 2 с соответствующими графиками работы [7] показывает, что приближение (17) гораздо лучше аппроксимирует точное решение, чем приближенное решение, полученное в [7]. В частности, оно позволяет описать нелинейную зависимость фазы от нормальной координаты  $x$ . Как показывает рис. 2 и выражения (9), (17), для гауссова пучка механизм затухания в преломляющей среде "включается" постепенно, еще до того как возрастающий угол преломления достигает критического значения (примерно при  $\beta_c - \beta_b \leq 1/8w$ ,  $\beta_c = k_0 \varepsilon_R^{1/2}$ ), а осциллирующая зависимость от нормальной координаты исчезает несколько позже (при  $\beta_b - \beta_c \geq 1/8w$ ). Происходит это таким образом, как будто пространственная неоднородность пучка несколько увеличивает показатель преломления и вызывает малый показатель поглощения в прозрачной среде (см. выражение (9) для  $\alpha_w$ ). Наличие естественного поглощения в преломляющей среде делает эти эффекты пространственной ограниченности пучка менее заметными [7], а в усиливающей среде ( $\text{Im} \varepsilon < 0$ ) развитая выше теория будет справедливой только при  $|\text{Im} \varepsilon| < 1/k_0 w$ , т.е. при очень малых значениях коэффициента усиления.

## Список литературы

- [1] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с. (Born M., Wolf E. Principles of Optics. New York: Pergamon, 1970).
- [2] Кизель В.А. Отражение света. М.: Наука, 1973. 352 с.
- [3] Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 414 с.
- [4] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 224 с.
- [5] Goos F., Hänchen H. // Annalen der Physik. 1947. Bd 1. F. 6. S. 333–346.
- [6] Shah V., Tamir T. // J. Opt. Soc. Amer. 1983. Vol. 73. N 1. P. 37–44.
- [7] Сердюк В.М. // Деп. в ВИНТИ. 1992. № 3092-В92.
- [8] Ярич А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. 616 с. (Yariv A., Yeh P. Optical Waves in Crystals. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984).
- [9] Бельский А.М., Могильный В.В., Мовчан В.Б. // Опт. и спектр. 1988. Т. 65. № 6. С. 1308–1312.