

# Особенности энергетики адиабатически нагружаемого ангармонического осциллятора

© А.И. Слуцкер, В.Л. Гиляров, А.С. Лукьяненко

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Alexander.Slytsker@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 3 февраля 2006 г.)

Проведено рассмотрение возбужденного ангармонического осциллятора, адиабатически (т.е. медленно по сравнению с его периодом колебания) нагружаемого внешней силой, стремящейся при больших временах к постоянному значению. Аналитически рассчитаны зависимости от установившейся силы энергетических характеристик: мгновенной энергии осциллятора, максимальной кинетической энергии (колебательной энергии) осциллятора, средних по периоду значений кинетической и потенциальной энергии. Аналитические результаты подтверждены численным расчетом. Установлено, что внешняя сила вызывает перераспределение средних значений кинетической и потенциальной составляющих начальной энергии осциллятора, причем передаваемые порции энергии при малой внешней силе намного превышают величину средней работы внешней силы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-03-33290).

PACS: 45.20.dh, 65.40.De

Ангармоничность потенциала межатомного взаимодействия, как известно, приводит ко многим эффектам, связанным с внутренней колебательной динамикой в твердых телах. К ним относятся термическое расширение, температурная зависимость коэффициента термического расширения и теплоемкости в классической области температур, конечные длины пробега и времени жизни фононов и др. Сюда же следует отнести и эффекты влияния механического нагружения. Так, адиабатическое, т.е. достаточно медленное, и в отсутствие теплового контакта со средой упругое нагружение вызывает изменение температуры тела (термоупругий эффект) и приводит к изменению фоновых частот. В обоих случаях возникают вопросы по энергетике этих явлений: необходимо провести сопоставление работы нагружающей силы как меры вводимой в тело энергии и выявить изменение энергетических характеристик внутренней колебательной динамики тела.

Суммарная работа внешней нагружающей силы всегда положительна, поскольку в нагружаемое тело вводится энергия. Возрастание же тепловой энергии системы, измеряемое по возрастанию температуры, и возрастание колебательной энергии, измеряемое по изменению фоновых частот, при адиабатическом сжатии намного превышают эту работу. А при растягивающем нагружении (когда работа остается положительной) и тепловая, и колебательная энергии уменьшаются. Таким образом, имеются интересные вопросы, требующие выяснения.

Колебательную динамику твердого тела можно рассматривать на основе ансамбля нелинейных осцилляторов, которые выступают элементами этой динамической системы. Тогда представляется естественным провести анализ поведения отдельного возбужденного ангармонического осциллятора под действием внешней силы.

Такой анализ был начат ранее в [1–4]. В настоящей работе проводится более детальное рассмотрение вопросов энергетики нагружаемого осциллятора.

Поскольку нелинейность осциллятора препятствует точному аналитическому интегрированию уравнений движения, далее используются приближенные методы. Для проверки использованных приближений проводилась компьютерная реализация динамики ангармонического осциллятора при заданных начальной энергии и функции зависящей от времени внешней силы. Рассчитывались мгновенные и средние по периоду колебаний осциллятора значения кинетической и потенциальной энергии.

Согласование результатов приближенно-аналитического и численно-компьютерного решений приводит к заключению о правильности проведенных расчетов.

## 1. Влияние нагружения на возбуждаемый ангармонический осциллятор

Потенциальную яму для одномерного ангармонического осциллятора представим в виде кубического дву-члена

$$U(x) = \frac{f}{2}x^2 - \frac{g}{3}x^3, \quad (1)$$

где  $f$  — упругая силовая постоянная,  $g$  — коэффициент ангармонизма,  $x$  — смещение осциллятора из положения равновесия.

Из (1) следуют выражения для энергии и диссоциации связи (глубины ямы)  $D = f^3/6g^2$ , максимальной упругой силы (прочности связи)  $F_m = f^2/4g$ , эффективного радиуса взаимодействия  $x_i = f/g$ .

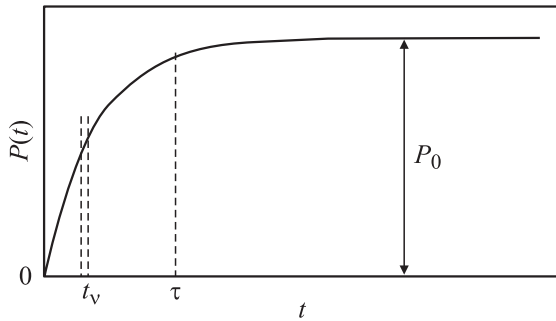


Рис. 1. Адиабатическое нагружение осциллятора.

В дальнейшем будем использовать безразмерные величины:

энергию

$$W = \frac{E}{D},$$

силу

$$P = \frac{F}{F_m},$$

смещение

$$z = \frac{g}{f} x.$$

Тогда потенциальная энергия (1) принимает вид

$$W_{\text{pot}}(z) = 3z^2 - 2z^3. \quad (2)$$

Введем начальную энергию осциллятора до приложения к нему нагрузки  $W_0 = E_0/D$  и будем считать ее малой по сравнению с энергией диссоциации, т.е.  $W_0 \ll 1$ .

Нагружение осциллятора представляется как приложение внешней силы  $P(t)$ , действующей вдоль связи и достигающей со временем стационарного значения  $P_0$  (рис. 1), причем  $P_0 \ll 1$ .

Условие механической адиабатичности нагружения заключается в том, что сила нарастает достаточно медленно: характерное время этого нарастания  $\tau$  намного больше периода колебаний осциллятора  $t_v$ . Условие  $\tau \gg t_v$  предотвращает ударное воздействие силы на колебания осциллятора. Удобным видом зависимости  $P(t)$  является функция  $P(t) = P_0[1 - \exp(-t/\tau)]$ . Такой вид функциональной зависимости использовался для компьютерного расчета, хотя конкретный вид функциональной зависимости  $P(t)$  принципиальной роли не играет, если  $\tau \gg t_v$ .

До приложения нагрузки в осцилляторе, как следует из (2), действовала только внутренняя сила упругости связи

$$P_e = -\frac{1}{F_m} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2}{3} \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial z} = -4z + 4z^2.$$

Отсюда следует, что координата дна ямы, соответствующая минимуму потенциальной энергии, равна  $z_0 = 0$ .

Из естественного условия, что среднее значение силы за период колебаний равно  $\langle P_e \rangle = 0$ , для среднего значения координаты за тот же период получаем  $\langle z \rangle = \langle z^2 \rangle$

(ангармоническое расширение) [5]. В квазигармоническом приближении энергия осциллятора определяется выражением  $E_0 \approx f \langle x^2 \rangle$ . Отсюда в безразмерном виде приближенно имеем  $\langle z \rangle = \langle z^2 \rangle \approx W_0/6$ .

Когда к осциллятору приложена нагрузка  $P$ , на частицу действует суммарная сила

$$P_s = P_e + P = -4z + 4z^2 + P.$$

Это приводит к изменению потенциальной ямы  $W_{\text{pot}}(z)$ . Из условия минимума потенциальной энергии ( $P_s = 0$ ) находим смещение координаты дна ямы при нагружении при малом  $P$

$$z_P = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - P}) \approx \frac{P}{4}.$$

Если осциллятор имеет начальное возбуждение  $W_0$ , происходит также изменение среднего значения смещения  $\langle z \rangle$ , что следует из условия равенства нулю средней силы

$$\langle P_s \rangle = -4\langle z \rangle + 4\langle z^2 \rangle + P = 0.$$

Из этого условия получаем  $\langle z \rangle = \langle z^2 \rangle + P/4$ . Вследствие малости внешней силы ( $P \ll 1$ ) с точностью до второго порядка по  $P$  имеем  $\langle z^2 \rangle \approx \langle z^2 \rangle(P=0) \approx W_0/6$ . Тогда для средней координаты осциллятора получаем

$$\langle z \rangle \approx \frac{W_0}{6} + \frac{P}{4}. \quad (3)$$

Таким образом, средняя координата осциллятора складывается приближенно из двух составляющих: „ангармонического расширения“ ( $\sim W_0/6$ ) и сдвига дна ямы вследствие нагружения ( $\sim P/4$ ). Выражением (3) определяется влияние нагружения на среднюю координату осциллятора.

Обратимся теперь к энергетическим характеристикам. Приложенная к осциллятору сила совершает работу, изменяя энергию осциллятора. Рассчитаем (в безразмерном виде) работу этой силы  $A(t)$ , совершенную от начала нагружения ( $t = 0$ ) до момента времени  $t \gg \tau$ , к которому сила  $P(t)$  практически достигает стационарного значения  $P_0$ :

$$A(t) = \frac{3}{2} \int_0^t P(t) dz.$$

Интегрируя это выражение по частям, находим

$$A(t) = \frac{3}{2} P(t)z(t) - \frac{3}{2} \int_0^t \dot{P}(t)z(t) dz. \quad (4)$$

Для вычисления интеграла в (4) всю область интегрирования разобьем на сумму периодов колебаний. В условиях адиабатического нагружения ( $\tau \gg t_v$ ) можно считать, что на каждом из этих периодов скорость

нагружения  $\dot{P}(t)$  постоянна

$$\dot{P}(t) = \frac{\Delta P_k}{t_v}.$$

Здесь  $\Delta P_k$  — изменение силы на  $k$ -м периоде. Поскольку при  $t \gg \tau$   $P(t) \approx P_0 = \text{const}$  и при этом  $\Delta P_k = 0$ , число периодов можно считать целым. Тогда интеграл в выражении (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \sum_k \frac{\Delta P_k}{t_v} \int_{t_k}^{t_k+t_v} z(t) dt &\approx \frac{3}{2} \sum_k \Delta P_k \langle z \rangle \\ &\approx \frac{3}{2} \int_0^{P_0} \left( \frac{1}{6} W_0 + \frac{1}{4} P \right) dP = \frac{1}{4} W_0 P_0 + \frac{3}{16} P_0^2. \end{aligned} \quad (5)$$

При выводе (5) учтено выражение (3) для средней координаты осциллятора. В результате из (4) и (5) для работы внешней силы получаем

$$A(t) \approx \frac{3}{2} P_0 z(t) - \frac{1}{4} W_0 P_0 - \frac{3}{16} P_0^2. \quad (6)$$

Тогда находим энергию нагруженного осциллятора

$$\begin{aligned} W(t) &= W_0 + A(t) \\ &\approx W_0 + \frac{3}{2} P_0 z(t) - \frac{1}{4} W_0 P_0 - \frac{3}{16} P_0^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Эта энергия зависит от времени за счет осциллирующей координаты  $z(t)$ . Усредняя (7) по периоду колебаний, для средней энергии получаем

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= W_0 + \frac{3}{2} P_0 \langle z(t) \rangle - \frac{1}{4} W_0 P_0 - \frac{3}{16} P_0^2 \\ &\approx W_0 + \frac{3}{16} P_0^2. \end{aligned} \quad (8)$$

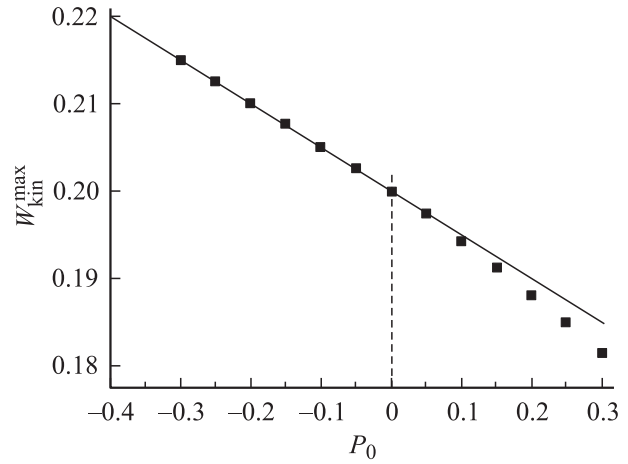
Накопление этой энергии происходит на участке увеличения внешней силы. После достижения силой стационарного значения средняя работа этой силы за период равна нулю и дальнейшего увеличения энергии не происходит. Прирост средней энергии приблизительно равен потенциальной энергии связи, упругодеформированной на величину смещения дна ямы  $z_p \approx P_0/4$ . Эта энергия с квадратичной точностью составляет  $W_{\text{pot}}(z_p) \approx 3z_p^2 = 3P_0^2/16$ .

Выражение (7) позволяет найти максимальное значение кинетической энергии  $W_{\text{kin}}^{\text{max}}$  нагруженного осциллятора. Максимум кинетической энергии достигается в момент прохождения осциллятором дна потенциальной ямы  $z_p \approx P_0/4$ . В этот момент

$$W(z_p) = W_{\text{kin}}^{\text{max}} + W_{\text{pot}}(z_p) \approx W_{\text{kin}}^{\text{max}} + \frac{3}{16} P_0^2.$$

С другой стороны, из (7) получаем

$$W(z_p) = W_0 + A(z_p) \approx W_0 - \frac{1}{4} W_0 P_0 + \frac{3}{16} P_0^2.$$



**Рис. 2.** Сопоставление аналитической силовой зависимости максимальной кинетической энергии осциллятора (сплошная линия) и численных результатов (точки) при  $W_0 = 0.2$ .

Приравнявая эти два выражения, находим, что

$$W_{\text{kin}}^{\text{max}} \approx W_0 - \frac{1}{4} W_0 P_0. \quad (9)$$

Поскольку выражения (7)–(9) являются приближенными, представляется естественным сравнить их с результатами, полученными прямым численным интегрированием уравнения движения осциллятора. При этом временная зависимость силы принималась в виде  $P(t) = P_0[1 - \exp(-t/\tau)]$ . Расчет производился до достижения силой стационарного значения ( $t > 10\tau$ ) при различных  $P_0$  ( $-0.3 \leq P_0 \leq 0.3$ ). По полученным с точностью до шага интегрирования (один шаг составляет  $10^{-2}t_v$ ) мгновенным значениям энергии  $W_{\text{kin}}(t)$  определялась ее максимальная величина. Результаты сопоставления аналитической зависимости (9) и ее численного аналога приведены на рис. 2. Видно, что имеется достаточно хорошее согласие этих зависимостей  $W_{\text{kin}}^{\text{max}}(P_0)$ .

Таким образом,  $W_{\text{kin}}^{\text{max}}$  линейно уменьшается при растяжении и увеличивается при сжатии.

Обратимся к определению средних значений кинетической и потенциальной составляющих энергии осциллятора. Под средними значениями здесь и далее понимаем средние за период колебаний осциллятора после его прихода в стационарное состояние, когда значение силы  $P(t \gg \tau) = P_0$ .

Уравнение движения осциллятора в безразмерных переменных имеет вид (в стационарном состоянии)

$$\ddot{z} = -z + z^2 + \frac{1}{4} P_0, \quad (10)$$

где безразмерное время измеряется в единицах обратной частоты  $\sqrt{m/f}$ ,  $m$  — масса частицы. Умножаем обе части уравнения (10) на  $\dot{z}$  и находим средние за период значения величин

$$\langle \dot{z} \dot{z} \rangle = -\frac{1}{3} \langle W_{\text{kin}} \rangle,$$

поскольку в безразмерной форме  $W_{\text{kin}} = 3z^2$ , и

$$\langle -z^2 + z^3 \rangle = -\frac{1}{3} \langle W_{\text{pot}} \rangle + \frac{1}{3} \langle z^3 \rangle,$$

поскольку  $W_{\text{pot}} = 3z^2 - 2z^3$ . В результате, исходя из (10), получаем

$$\langle W_{\text{kin}} \rangle = \langle W_{\text{pot}} \rangle - \langle z^3 \rangle - \frac{3}{4} P_0 \langle z \rangle. \quad (11)$$

Используя очевидное равенство  $\langle W \rangle = \langle W_{\text{kin}} \rangle + \langle W_{\text{pot}} \rangle$  и найденные выше соотношения  $\langle W \rangle = W_0 + 3P_0^2/16$ ,  $\langle z \rangle \approx W_0/6 + P_0/4$ , из (11) получаем

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{kin}} \rangle &\approx \frac{1}{2} W_0 - \frac{1}{16} W_0 P_0 - \frac{1}{2} \langle z^3 \rangle, \\ \langle W_{\text{pot}} \rangle &\approx \frac{1}{2} W_0 + \frac{1}{16} W_0 P_0 + \frac{1}{2} \langle z^3 \rangle + \frac{3}{16} P_0^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Проведем оценку члена  $\langle z^3 \rangle$ . Имеется приближенное решение уравнения движения ангармонического осциллятора [6]. В первом порядке теории возмущений по ангармонической постоянной это решение имеет вид

$$x(t) \approx x_{\text{mg}} \cos \omega t + \langle x \rangle - \frac{1}{3} \langle x \rangle \cos 2\omega t,$$

где  $x_{\text{mg}}$  — амплитуда основной гармоники,  $\langle x \rangle$  — средняя за период координата. Сконструируем аналогичное решение (в безразмерной форме) для случая, когда ангармонический осциллятор находится под действием нагружающей силы

$$z(t) \approx \left(\frac{W_0}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cos \omega t + \langle z \rangle - \frac{1}{3} \langle z \rangle \cos 2\omega t.$$

Тогда при пренебрежении членами кубической малости и с учетом  $\langle z \rangle \approx W_0/6 + P_0/4$  получим среднее за период колебаний  $\langle z^3 \rangle$

$$\langle z^3 \rangle \approx \frac{1}{8} P_0 W_0 + \frac{1}{12} W_0^2.$$

В результате из выражений (12) получаем

$$\langle W_{\text{kin}} \rangle \approx \frac{1}{2} W_0 - \frac{1}{8} W_0 P_0 - \frac{1}{24} W_0^2, \quad (13)$$

$$\langle W_{\text{pot}} \rangle \approx \frac{1}{2} W_0 + \frac{1}{8} W_0 P_0 + \frac{1}{24} W_0^2 + \frac{3}{16} P_0^2. \quad (14)$$

Полученные зависимости (13) и (14) сопоставляются с результатами численного расчета этих же величин на рис. 3 (аналогично тому, как это было сделано для  $W_{\text{kin}}^{\text{max}}(P_0)$ ), из которого видно, что существует достаточно хорошее согласие аналитических и численных результатов.

Среднюю потенциальную энергию осциллятора  $\langle W_{\text{pot}} \rangle$  — среднюю энергию упругой деформации связи — можно представить в виде суммы двух составляющих: статической  $\frac{3}{16} P_0^2$  (результат смещения

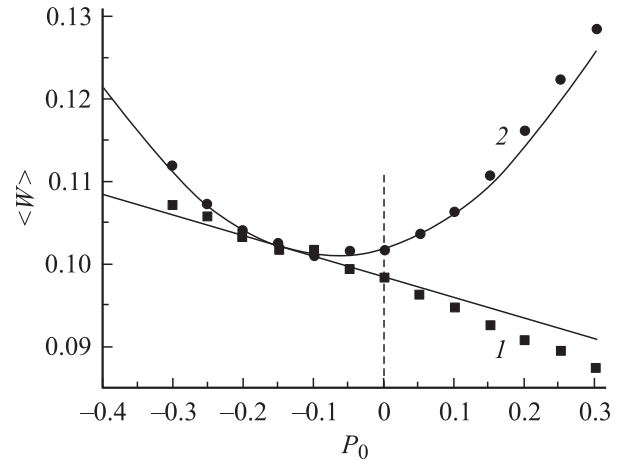


Рис. 3. Сопоставление аналитических силовых зависимостей энергии осциллятора (сплошные линии) и численных результатов (точки) при  $W_0 = 0.2$ . 1 — средняя кинетическая энергия, 2 — средняя потенциальная энергия.

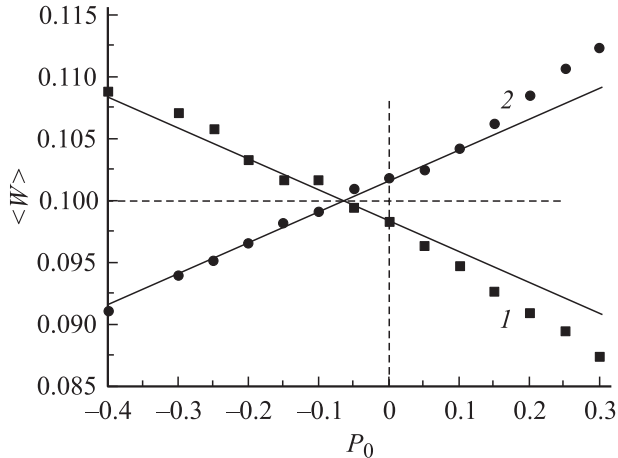


Рис. 4. Сопоставление аналитических силовых зависимостей энергии осциллятора (сплошные линии) и численных результатов (точки) при  $W_0 = 0.2$ . 1 — средняя кинетическая энергия, 2 — средняя динамическая потенциальная энергия.

дна потенциальной ямы), которая не зависит от степени возбуждения осциллятора, и динамической  $\langle W_{\text{pot}}^d \rangle$ , присущей только возбужденному осциллятору, т.е.  $\langle W_{\text{pot}} \rangle = \langle W_{\text{pot}}^d \rangle + 3P_0^2/16$ . Тогда из (14) получаем

$$\langle W_{\text{pot}}^d \rangle \approx \frac{1}{2} W_0 + \frac{1}{8} W_0 P_0 + \frac{1}{24} W_0^2. \quad (15)$$

График зависимости  $\langle W_{\text{pot}}^d \rangle(P_0)$  вместе с графиком  $\langle W_{\text{pot}} \rangle(P_0)$  представлен на рис. 4. Аналитические зависимости отвечают формулам (13) и (15). Значения  $\langle W_{\text{pot}}^d \rangle$  получались путем вычитания из численных результатов для  $\langle W_{\text{pot}} \rangle$  на рис. 3 точных значений потенциальной энергии сдвига дна потенциальной ямы:  $3z_p^2 - 2z_p^3$  при точном значении этого сдвига  $z_p = 0.5(1 - \sqrt{1 - P_0})$ . Можно видеть достаточно хорошее согласие аналитических и численных результатов.

Полученные формулы (13) и (15) и соответствующие им графики на рис. 4 — важный результат анализа энергетики адиабатически нагруженного ангармонического осциллятора. Из них видна „зеркальная“ зависимость  $\langle W_{\text{kin}} \rangle(P_0)$  и  $\langle W_{\text{pot}}^d \rangle(P_0)$  относительно половины начальной энергии возбуждения осциллятора  $W_0/2$ . Это означает, что нагружение ангармонического осциллятора вызывает перераспределение кинетической и динамической потенциальной составляющих начальной энергии осциллятора  $W_0$ .

## 2. Обсуждение результатов

Проведенный анализ показал, что адиабатическое нагружение возбужденного ангармонического осциллятора вызывает: 1) изменение максимальной кинетической энергии  $W_{\text{kin}}^{\text{max}} \approx W_0 - W_0 P_0/4$ ; 2) взаимокompенсующее изменение средних на периоде значений кинетической и динамической потенциальной составляющих исходной энергии

$$\Delta \langle W_{\text{kin}} \rangle = -\Delta \langle W_{\text{pot}}^d \rangle \approx -\frac{1}{8} W_0 P_0.$$

Ключевая роль в установленных изменениях принадлежит слагаемому  $-\frac{1}{4} W_0 P_0$  (или  $-\frac{1}{8} W_0 P_0$ ).

Для выяснения физического смысла этого слагаемого обратимся к величине работы внешней силы (6). Из данного выражения следуют разные знаки этой работы на различных фазах колебания.

Работа положительна ( $A > 0$ ) при  $z(t) > W_0/6 + P_0/8$ , т. е. осциллятор „захватывает“ энергию из поля внешней силы.

Работа отрицательна ( $A < 0$ ) при  $z(t) < W_0/6 + P_0/8$ , т. е. осциллятор „отдает“ часть энергии в поле внешней силы. В соответствии с [7] отрицательный знак работы указывает на то, что наряду с внешней силой  $P_0$  в энергетике нагружаемого осциллятора участвуют внутренние силы, работа которых ведет к дополнительному обмену энергией с полем внешней силы.

Среди разных фаз колебания осциллятора выделим фазу, отвечающую прохождению координаты дна потенциальной ямы  $z_p \approx P_0/4$ , когда кинетическая энергия максимальна. В этой фазе совершенная работа составляет

$$A(z_p) \approx -\frac{1}{4} W_0 P_0 + \frac{3}{16} P_0^2. \quad (16)$$

Положительное слагаемое в (16) отвечает работе внешней силы, соответствующей деформации связи на величину  $z_p \approx P_0/4$ . Отрицательное слагаемое указывает на участие внутренней силы в балансе энергии.

Такой внутренней силой для осциллятора служит средняя сила „ангармонического давления“  $4\langle z^2 \rangle \approx 2W_0/3$ , вызывающая „ангармоническое расширение“ и уравновешенная средней за период упругой силой, соответствующей этому расширению  $-4\langle z \rangle$  в ненагруженном осцилляторе [5]. Нагружение осциллятора приводит к силовой деформации связи (смещение

дна ямы)  $z_p \approx P_0/4$ , что открывает возможность силе „ангармонического давления“ совершить работу на перемещении, вызванном действием внешней силы,

$$A_i = \frac{3}{2} 4\langle z^2 \rangle z_p \approx \frac{1}{4} W_0 P_0.$$

Таким образом, физический смысл слагаемого  $-W_0 P_0/4$  заключается в том, что оно представляет собой результат работы внутренней силы „ангармонического давления“. Как следует из (5), эта работа производится на каждом периоде колебаний осциллятора, но только на стадии нарастания силы при адиабатическом нагружении, когда за период происходит увеличение силы  $|\Delta P|$ , приводящее к увеличению смещения дна потенциальной ямы  $|\Delta P_0/4|$ :  $\Delta A_i = W_0 \Delta P/4$ . При достижении силой стационарного значения  $P_0$  произведенная на каждом периоде работа внутренней силы суммируется по периодам ( $A_i = \sum \Delta A_i \approx W_0 P_0/4$ ) и при дальнейших колебаниях осциллятора не меняется.

Знак работы внутренней силы определяется знаком внешней силы  $P_0$  (знаком силовой деформации). Работа внутренней силы при  $P_0 > 0$  ведет к передаче части энергии осциллятора полю внешней силы, т. е. к переходу кинетической энергии осциллятора в потенциальную энергию поля и тем самым к уменьшению максимальной кинетической энергии осциллятора  $W_{\text{kin}}^{\text{max}} = W_0 - A_i \approx W_0 - \frac{1}{4} W_0 P_0$ . При  $P_0 < 0$  происходит увеличение  $W_{\text{kin}}^{\text{max}}$  за счет „захвата“ потенциальной энергии поля. Таким образом, в момент прохождения осциллятором дна потенциальной ямы имеет место перераспределение кинетической и потенциальной составляющих энергии в системе осциллятор–поле внешней силы.

На других фазах колебаний соотношение прироста и убывания энергии осциллятора, как следует из (6), (7), изменяется. Тогда становится существенной такая важная характеристика действия нагружения на осциллятор, как средняя за период работа внешней силы  $\langle S(t) \rangle$ . Из (6) следует, что

$$\langle A(t) \rangle \approx \frac{3}{16} P_0^2.$$

Таким образом, средняя работа всегда положительна (независимо от знака силы  $P_0$ ) и соответствует, как уже отмечалось, энергии статической деформации упругой связи (смещению дна потенциальной ямы). Следовательно, динамическая энергия нагруженного осциллятора за вычетом энергии деформации связи (т. е.  $W_0$ ) остается неизменной.

В то же время средняя кинетическая энергия осциллятора  $\langle W_{\text{kin}} \rangle$  при нагружении изменяется на величину  $-W_0 P_0/8$  (см. (13)). Это изменение, очевидно, так же как и для  $W_{\text{kin}}^{\text{max}}$ , вызвано работой силы „ангармонического давления“  $A_i$ . Поскольку среднее за период колебаний значение кинетической энергии составляет приблизительно половину максимального значения (9), (13), изменение этой величины  $-W_0 P_0/8$  также составляет

приблизительно половину изменения  $\Delta W_{\text{kin}}^{\text{max}}$ . А ввиду того, что  $\Delta(\langle W \rangle - 3P_0^2/16) = \Delta(\langle W_{\text{kin}} \rangle + \langle W_{\text{pot}}^d \rangle) = 0$ , имеем  $\Delta(\langle W_{\text{pot}}^d \rangle) = -\Delta(\langle W_{\text{kin}} \rangle) \approx W_0 P_0/8$ , что и отражено в выражении (15). Это означает, что часть средней кинетической энергии при  $P_0 > 0$  переходит в потенциальную, но не в энергию поля внешней силы, как это имело место для  $W_{\text{kin}}^{\text{max}}$ , а в среднюю динамическую потенциальную энергию самого осциллятора. При  $P_0 < 0$  средняя кинетическая энергия возрастает за счет уменьшения средней динамической потенциальной энергии.

Таким образом, нагружение ангармонического осциллятора характеризуется перераспределением кинетической и потенциальной составляющих энергии, выступающим в различных формах.

Важно подчеркнуть, что передаваемые при перераспределении порции средних значений энергии намного превышают величину средней работы внешней силы (при небольших нагрузках). В результате термоупругий эффект в твердых телах, имевший ранее только термодинамическое описание [3,8,9], получает детальное объяснение. Изменение тепловой энергии нагруженного твердого тела происходит вследствие работы внутренней „ангармонической“ силы, изменяющей среднюю кинетическую энергию колебаний атомов при соответствующем (с обратным знаком) изменении средней динамической потенциальной энергии межатомных связей.

Отметим еще один аспект энергетики нагружаемого ангармонического осциллятора — вопрос о так называемой колебательной энергии. По смыслу колебательной энергией называется энергия, которая при колебаниях осциллятора целиком переходит из кинетической энергии в потенциальную и обратно. Ясно, что по величине колебательная энергия  $W_{\text{vibr}}$  равна максимальной кинетической энергии, т. е.  $W_{\text{vibr}} = W_{\text{kin}}^{\text{max}}$ .

Ненагруженный осциллятор имеет энергию возбуждения  $W_0$ , которая постоянна в течение периода колебаний, по величине совпадает с максимальной кинетической энергией и тем самым является колебательной энергией, т. е. до нагружения  $\langle W \rangle = W_0 = W_{\text{kin}}^{\text{max}} = W_{\text{vibr}}$ . В этом случае колебательная энергия в исходной потенциальной яме отстоит на величину  $W_0$  от дна этой ямы.

Нагружение ангармонического осциллятора изменяет энергетические характеристики и соотношения между ними. Энергия осциллятора  $W(t)$  на периоде колебаний не остается постоянной. Средняя энергия осциллятора  $\langle W \rangle$  возрастает на величину  $3P_0^2/16$ . Колебательная энергия  $W_{\text{vibr}}$  в результате адиабатического нагружения изменяется на величину  $-W_0 P_0/4$ . Таким образом, колебательная энергия нагруженного осциллятора отличается от его средней энергии:  $W_{\text{vibr}}$  меньше  $\langle W \rangle$  при  $P_0 > 0$  и  $W_{\text{vibr}}$  больше  $\langle W \rangle$  при  $P_0 < 0$ . В отличие от энергии осциллятора  $W(t)$  колебательная энергия  $W_{\text{vibr}}$  остается постоянной на периоде колебаний, и уровень (значение) этой энергии отсчитывается от дна потенциальной ямы в поле внешней силы [2,6]. Изменение величины колебательной энергии при нагружении не отвечает средней за период колебаний работе внешней

силы, а обусловлено обменом энергии осциллятора с энергией поля внешней силы за счет работы внутренней силы — „ангармонического давления“.

Проведенная детализация энергетики нагруженного ангармонического осциллятора будет полезной при рассмотрении нагружения квантового осциллятора.

## Список литературы

- [1] A.I. Slutsker, V.P. Volodin. *Thermochim. Acta* **247**, 111 (1994).
- [2] В.Л. Гиляров, А.И. Слуцкер, В.П. Володин, Л.А. Лайус. *ФТТ* **39**, 153 (1997).
- [3] В.Л. Гиляров, А.И. Слуцкер, В.П. Володин, А.И. Лайус. *ФТТ* **40**, 1548 (1998).
- [4] А.И. Слуцкер, Л.А. Лайус, В.Л. Гиляров, И.В. Гофман, Ю.И. Поликарпов, Б.А. Аверкин. В сб.: *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела*. Изд-во СПбГУ, СПб (2002). В. 5. С. 155.
- [5] Я.И. Френкель. *Кинетическая теория жидкостей*. Наука, М. (1975). 460 с.
- [6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Механика*. Наука, М. (1988). 215 с.
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Статистическая физика*. Наука, М. (1976). Ч. 1. 584 с.
- [8] W. Thomson (Lord Kelvin). *Mathematical and physical papers*. Cambridge Univer. Press, London (1890). Vol. 3. P. 63.
- [9] А. Надаи. *Пластичность и разрушение твердых тел*. Мир, М. (1969). Т. 2. 864 с.