

01;10

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае многосвязной области с точечной симметрией

© И.Ф. Спивак-Лавров

Актюбинское негосударственное высшее учебное заведение "Дуние",
463000 Актюбинск, Казахстан

(Поступило в Редакцию 3 июня 1997 г. В окончательной редакции 9 февраля 1998 г.)

Предложен метод, использующий разложение потенциала по неприводимым представлениям группы симметрии полезадающих элементов системы. Решена граничная задача для мультипольных систем с плоскими пластинчатыми электродами для случая группы симметрии C_m . Получено квадратурное выражение для потенциала поля таких систем. Найдены условия, накладываемые на потенциалы электродов, при которых такое решение возможно. Приведены результаты расчета распределения потенциала в некоторых конкретных системах.

Введение

В работе [1] был предложен метод, позволяющий найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае плоских многосвязных областей, обладающих двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Решение задачи Дирихле для такой многосвязной области сводится к решению нескольких граничных задач Дирихле–Неймана для каждой из четырех составляющих потенциала, но уже в односвязной области, ограниченной осями симметрии и лежащими непосредственно в рассматриваемой четверти частями электродов исходной системы. В частности, в случае двумерных или конических полей этот метод позволяет получить замкнутые аналитические формулы для электростатического потенциала некоторых систем с пластинчатыми электродами с учетом размеров зазоров между ними.

Как показано в работе [2], метод, предложенный в [1], может быть обобщен и на многосвязные области, обладающие произвольной геометрической симметрией. В настоящей работе подробно рассмотрен случай, когда симметрия полезадающих элементов ионно-оптической системы описывается группой C_m (см., например, [3]). Это группа симметрии тела с n плоскостями симметрии, проходящими через ось симметрии n -го порядка. Такой симметрией может обладать, например, система электродов мультипольного дефлектора, причем $n = 2, 3, 4, \dots$ соответствуют квадрупольной, секстипольной, октупольной, \dots системам. Отметим, что симметрия систем, рассмотренных в [1], соответствует группе C_{2v} .

Разложение потенциала

Если электроды ионно-оптической системы имеют определенную геометрическую симметрию, то потенциал φ поля такой системы можно представить в виде [2,3]

$$\varphi = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}, \quad (1)$$

где φ_{α} — составляющие потенциала, относящиеся к различным неприводимым представлениям группы симметрии полезадающих поверхностей системы,

$$\varphi_{\alpha} = g^{-1} f_{\alpha} \sum_G \chi_{\alpha}(G) * \hat{G} \varphi. \quad (2)$$

Здесь g — порядок группы; f_{α} — размерность неприводимого представления; $\chi_{\alpha}(G)$ — характер неприводимого представления, относящийся к G элементу группы. Свойства симметрии позволяют найти такие значения потенциалов на электродах, при которых граничные условия для отдельных составляющих φ_{α} могут быть определены в односвязной области, образованной полезадающими поверхностями и поверхностями симметрии, что и составляет идею метода.

В дальнейшем остановимся на рассмотрении двумерной задачи, считая, что электродная система имеет группу симметрии C_m . Пусть потенциал $\varphi \equiv \varphi(x, y)$ зависит только от двух декартовых координат x и y . Используя таблицы характеров $\chi_{\alpha}(G)$ неприводимых представлений группы C_m [3], с помощью формулы (2) можно записать выражения для составляющих $\varphi_{\alpha}(x, y)$. В случае группы симметрии C_{2v} получим выражения, приведенные в [1,2],

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{4} \left[\varphi(x, y) + \varphi(-x, -y) + \varphi(x, -y) + \varphi(-x, y) \right], \quad (3)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{4} \left[\varphi(x, y) + \varphi(-x, -y) - \varphi(x, -y) - \varphi(-x, y) \right], \quad (4)$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{1}{4} \left[\varphi(x, y) - \varphi(-x, -y) + \varphi(x, -y) - \varphi(-x, y) \right], \quad (5)$$

$$\varphi_4(x, y) = \frac{1}{4} \left[\varphi(x, y) - \varphi(-x, -y) - \varphi(x, -y) + \varphi(-x, y) \right]. \quad (6)$$

В случае четных $n = 2p$ число неприводимых представлений группы C_{nv} , равно $p + 3$, а в случае нечетных $n = 2p + 1 - p + 2$. Используя известную формулу для размерностей неприводимых представлений

$$\sum_{k=1}^r f_k^2 = g, \quad (7)$$

где r — число различных неприводимых представлений группы, можно показать, что в случае группы C_{nv} ($g = 2n$) число одномерных неприводимых представлений при четных n равно 4, а при нечетных — 2. Остальные неприводимые представления являются двумерными, причем их число при четных $n = 2p$ равно $p - 1$, а при нечетных $n = 2p + 1$ равно p .

Составляющие φ_α удобно определить в полярных координатах ρ, ψ , согласованных с выбранными декартовыми, так как при этом четыре составляющие, соответствующие одномерным представлениям группы C_{nv} , при любом четном n могут быть записаны в виде:

$$\varphi_1(\rho, \psi) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j + \psi\right) + \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j - \psi\right) \right], \quad (8)$$

$$\varphi_2(\rho, \psi) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j + \psi\right) - \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j - \psi\right) \right], \quad (9)$$

$$\varphi_3(\rho, \psi) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left[\varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j + \psi\right) + \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j - \psi\right) \right], \quad (10)$$

$$\varphi_4(\rho, \psi) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left[\varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j + \psi\right) - \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{n}j - \psi\right) \right]. \quad (11)$$

В случае, когда $n = 2$, приведенные выражения, эквивалентные (3)–(6), исчерпывают все неприводимые представления группы. При любом нечетном n две составляющие φ_1 и φ_2 , соответствующие одномерным представлениям, также определяются формулами (8) и (9).

Выражения для составляющих потенциала, соответствующих двумерным представлениям группы C_{nv} , в

общем виде для любых n записать не удастся. Однако сумма всех этих составляющих при четном $n = 2p$ равна

$$\varphi - \sum_{\alpha=1}^4 \varphi_\alpha = \frac{1}{p} \left[(p-1)\varphi(\rho, \psi) - \sum_{j=1}^{p-1} \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{p}j + \psi\right) \right], \quad (12)$$

а при нечетном $n = 2p + 1$ равна

$$\varphi - \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_\alpha = \frac{1}{2p+1} \left[2p\varphi(\rho, \psi) - \sum_{j=1}^{2p} \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{2p+1}j + \psi\right) \right]. \quad (13)$$

Используя выражения (12), (13) и условия ортогональности для характеров неприводимых представлений, можно для каждого конкретного значения n определить характеры $\chi_\alpha(G)$, а затем по формуле (2) и сами составляющие, соответствующие двумерным представлениям. Так, в случае группы C_{4v} ($n = 4$) получим

$$\varphi_5(\rho, \psi) = \frac{1}{2} \left[\varphi(\rho, \psi) - \varphi(\rho, \pi + \psi) \right], \quad (14)$$

в случае группы C_{6v} ($n = 6$)

$$\varphi_5(\rho, \psi) = \frac{1}{6} \left[2\varphi(\rho, \psi) + 2\varphi(\rho, \pi + \psi) - \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{3} + \psi\right) - \varphi\left(\rho, \frac{4\pi}{3} + \psi\right) - \varphi\left(\rho, \frac{\pi}{3} + \psi\right) - \varphi\left(\rho, \frac{5\pi}{3} + \psi\right) \right], \quad (15)$$

$$\varphi_6(\rho, \psi) = \frac{1}{6} \left[2\varphi(\rho, \psi) - 2\varphi(\rho, \pi + \psi) - \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{3} + \psi\right) - \varphi\left(\rho, \frac{4\pi}{3} + \psi\right) + \varphi\left(\rho, \frac{\pi}{3} + \psi\right) + \varphi\left(\rho, \frac{5\pi}{3} + \psi\right) \right], \quad (16)$$

а для группы C_{3v} ($n = 3$)

$$\varphi_3(\rho, \psi) = \frac{1}{3} \left[2\varphi(\rho, \psi) - \varphi\left(\rho, \frac{2\pi}{3} + \psi\right) - \varphi\left(\rho, \frac{4\pi}{3} + \psi\right) \right]. \quad (17)$$

Особую роль при решении граничной задачи играют составляющие $\varphi_\alpha(\rho, \psi)$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), соответствующие одномерным представлениям группы. Легко показать, что на плоскостях симметрии при $\psi = \pi(j-1)/n$

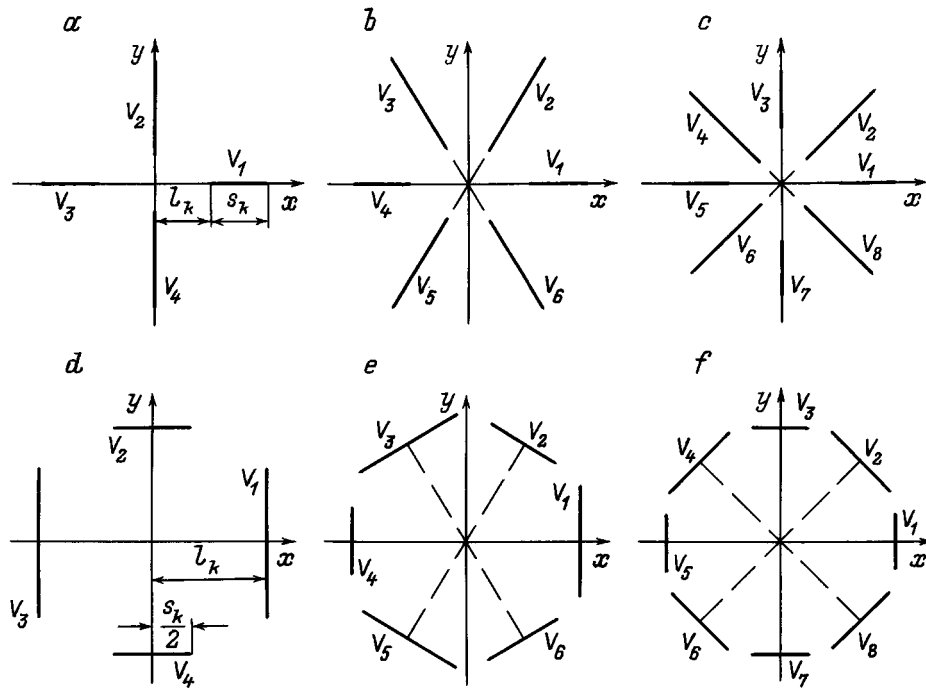


Рис. 1. Мультипольные системы с пластинчатыми электродами, имеющие симметрию C_m : a, d — квадрупольная ($n = 2$); b, e — секступольная ($n = 3$); c, f — октупольная ($n = 4$).

($j = 1, 2, 3, \dots, 2n$) составляющие, определяемые выражениями (8)–(11), удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\varphi_{1\psi} \left(\rho, \frac{\pi}{n}(j-1) \right) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, 2n), \quad (18)$$

$$\varphi_2 \left(\rho, \frac{\pi}{n}(j-1) \right) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, 2n), \quad (19)$$

$$\varphi_{3\psi} \left(\rho, \frac{\pi}{n}(j-1) \right) = 0 \quad (j = 1, 3, \dots, 2n-1),$$

$$\varphi_3 \left(\rho, \frac{\pi}{n}(j-1) \right) = 0 \quad (j = 2, 4, \dots, 2n), \quad (20)$$

$$\varphi_{4\psi} \left(\rho, \frac{\pi}{n}(j-1) \right) = 0 \quad (j = 2, 4, \dots, 2n),$$

$$\varphi_4 \left(\rho, \frac{\pi}{n}(j-1) \right) = 0 \quad (j = 1, 3, \dots, 2n-1). \quad (21)$$

В последних формулах индекс ψ обозначает частную производную по координате ψ . Таким образом, на всех плоскостях симметрии обращаются в нуль либо сами составляющие потенциала, соответствующие одномерным представлениям группы симметрии, либо их нормальная производная что и обуславливает возможность выделения $2n$ односвязных областей с заданными на них граничными условиями Дирихле–Неймана для φ_1 , φ_3 и φ_4 и просто Дирихле для φ_2 .

Для решения задачи расчета распределения потенциала $\varphi(x, y)$ граничные условия (18)–(21) должны быть дополнены граничными условиями на электродах системы. Если известны потенциалы V_k ($k = 1, 2, \dots, N$) на

N электродах, то с помощью формул (8)–(11) могут быть найдены значения потенциалов на электродах $V_{\alpha k}$ для составляющих φ_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Элементы $V_{\alpha k}$ матрицы потенциалов V таковы что

$$\sum_{\alpha=1}^4 V_{\alpha k} = V_k. \quad (22)$$

Граничные условия для составляющих потенциала, соответствующих двумерным представлениям (см., например, (14)–(17)), не могут быть определены на всех плоскостях симметрии, однако решение задачи возможно, но при таких значениях потенциалов V_k , которые обеспечивают тождественное обращение в нуль этих составляющих.

Конформное преобразование и граничные условия

Для иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим мультипольные ионно-оптические системы с пластинчатыми электродами, обладающие симметрией C_m ($n = 2, 3, 4$). Такие системы показаны на рис. 1. Через V_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) обозначены потенциалы электродов. Параметр l_k задает расстояние от оси симметрии до электрода, а s_k — размер электрода с потенциалом V_k . Штриховые линии определяют положение плоскостей симметрии в тех случаях, когда последние не совпадают с координатными плоскостями.

Для каждой из систем, представленных на рис. 1, можно выделить односвязные области, ограниченные лучами $\psi = \pi(j-1)/n$ и $\psi = \pi j/n$ ($j = 1, 2, 3, \dots, 2n$) и частями электродов, расположенными в соответствующем секторе.

Каждая из выделенных односвязных областей в комплексной плоскости $z = x + iy = \rho \exp(i\psi)$ может быть отображена на верхнюю полуплоскость $w = u + iv$ аналитическими функциями $w(z^{(j)})$ ($j = 1, 2, 3, \dots, 2n$), где индекс j введен для однолиственности отображения и указывает на то, что значения z принадлежат соответствующей односвязной области с номером j . Распределение потенциала в верхней полуплоскости также можно задать $2n$ функциями $\varphi^{(j)}(u, v)$, которые описывают распределение потенциала в соответствующих односвязных областях.

В случае систем, представленных на рис. 1, *a-c*, каждый сектор с номером j , ограниченный лучами $\psi = \pi(j-1)/n$ и $\psi = \pi j/n$ ($j = 1, 2, 3, \dots, 2n$), отображается на верхнюю полуплоскость w плоскости аналитической функцией

$$w(z^{(j)}) = \rho^n e^{i(n\psi - \pi(j-1))}. \quad (23)$$

Для систем, показанных на рис. 1, *d-f*, выделяемые односвязные области представляют собой восьмиугольники, один из которых соответствует значению $j = 1$ и представлен на рис. 2, *a*. Отображение верхней полуплоскости плоскости w на эти восьмиугольники в плоскости z задается конформным преобразованием [2]

$$z^{(j)}(w) = C \exp\left(i\pi \frac{j-1}{n}\right) \int_0^w f(w) dw \quad (j = 1, 2, \dots, 2n), \quad (24)$$

где C — действительная постоянная, а подынтегральная функция

$$f(w) = \frac{w^{\frac{1-n}{n}}(w - a_e)(w + a_4)}{\sqrt{(w - a_1)(w - a_2)(w + a_3)(w + a_5)}}.$$

Вершины 1, 2, ..., 8 восьмиугольника при отображении (24) переходят в точки $0, a_1, a_e, a_2, \infty, -a_3, -a_4, -a_5$ действительной оси u соответственно, причем участки электродов переходят в отрезки $[a_1, a_2]$ и $[-a_3, -a_5]$. Отображаемая область в w -плоскости представлена на рис. 2, *b*.

В силу граничных условий (18)–(21) для составляющих $\varphi_\alpha^{(j)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) на участках $u < -a_3, -a_5 < u < a_1$ и $u > a_2$ действительной оси u равны нулю либо сами составляющие $\varphi_\alpha^{(j)}(u, 0)$, либо их нормальная производная $\varphi_{\alpha v}^{(j)}(u, 0)$. Здесь индекс v обозначает частную производную по координате v . На остальных участках действительной оси значения составляющих $\varphi_\alpha^{(j)}(u, 0)$ определяются матрицей потенциалов V с элементами $V_{\alpha k}$, причем

$$\varphi_\alpha^{(j)}(u, 0) = \begin{cases} V_{\alpha j}, & \text{если } a_1 \leq u \leq a_2, \\ V_{\alpha j+1}, & \text{если } -a_3 \leq u \leq -a_5. \end{cases} \quad (25)$$

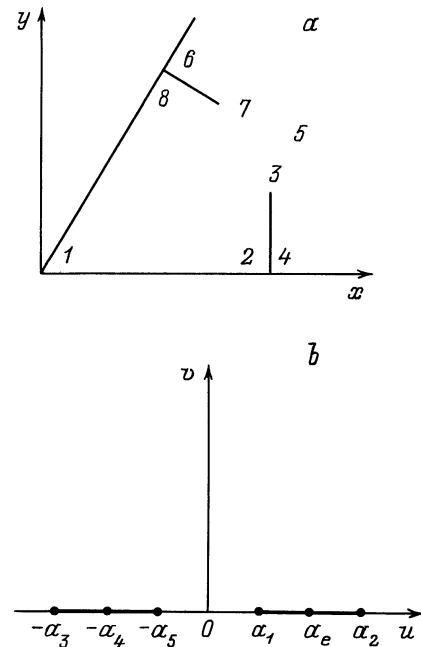


Рис. 2. Выделение и отображение односвязной области: *a* — граничная задача в $z = x + iy$ плоскости; 1, 2, ..., 8 — вершины восьмиугольника; *b* — граничная задача в $w = u + iv$ плоскости.

Последняя формула справедлива для всех рассматриваемых мультипольных систем с учетом условия цикличности $V_{\alpha j+2n} \equiv V_{\alpha j}$.

В случае квадрупольной системы с симметрией C_{2v} при произвольных значениях потенциалов электродов V_k ($k = 1, 2, 3, 4$) матрица потенциалов имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} \frac{V_1+V_3}{2} & \frac{V_2+V_4}{2} & \frac{V_1+V_3}{2} & \frac{V_2+V_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{V_1-V_3}{2} & 0 & \frac{V_3-V_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{V_2-V_4}{2} & 0 & \frac{V_4-V_2}{2} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

откуда с учетом (19) следует, что составляющая $\varphi_2 \equiv 0$.

В случае симметрии C_{3v} , так же как в предыдущем случае, составляющая $\varphi_2 \equiv 0$, а составляющая потенциала φ_3 и ее нормальная производная не могут быть определены на всех границах односвязных областей при произвольных значениях потенциалов электродов. Задача может быть решена в том случае, когда потенциалы электродов таковы, что определенная формулой (17) $\varphi_3 \equiv 0$. Это условие оказывается выполненным, если

$$\begin{aligned} 2V_1 - V_3 - V_5 &= 0, & 2V_2 - V_4 - V_6 &= 0, \\ 2V_3 - V_5 - V_1 &= 0, & 2V_4 - V_6 - V_2 &= 0, \\ 2V_5 - V_1 - V_3 &= 0, & 2V_6 - V_2 - V_4 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $V_1 = V_3 = V_5$, $V_2 = V_4 = V_6$ и отлична от нуля лишь первая строка матрицы потенциалов, причем $V_{11} = V_{13} = V_{15} = V_1$, а $V_{12} = V_{14} = V_{16} = V_2$. В этом

случае можно воспользоваться также эквивалентной матрицей потенциалов, у которой

$$V_{11} = V_{13} = V_{15} = U, \quad V_{12} = V_{14} = V_{16} = -U. \quad (27)$$

Здесь $U = (V_1 - V_2)/2$, а полученный с помощью условий (27) потенциал на бесконечности равен нулю и распределение исходного потенциала может быть получено из него путем добавления постоянной $(V_1 + V_2)/2$. Таким образом, для секступольных систем решение может быть получено только в том случае, когда распределение потенциала также имеет симметрию C_{3v} .

Так же как для предыдущих систем, в случае симметрии C_{4v} , составляющая потенциала $\varphi_2 \equiv 0$. А составляющая $\varphi_5 \equiv 0$, если потенциалы электродов таковы, что $V_5 = V_1$, $V_6 = V_2$, $V_7 = V_3$, $V_8 = V_4$. При этих условиях матрица потенциалов для октупольной системы фактически аналогична матрице потенциалов (26) для квадрупольной системы, а именно пятый столбец этой матрицы совпадает с первым столбцом матрицы (26), шестой — со вторым, седьмой — с третьим, а восьмой — с четвертым столбцом.

Таким образом, расчет поля мультипольных систем при произвольных значениях потенциалов электродов возможен лишь в случае квадрупольных систем, когда $n = 2$, что соответствует системам, рассмотренным в [1]. В тех случаях, когда n — четное число, решение может быть получено, лишь при таких соотношениях потенциалов на электродах, которые фактически сводят задачу к расчету поля квадрупольной системы. Так, в случае систем, приведенных на рис. 1, a, c , распределение потенциала в мультипольной системе может быть получено из распределения потенциала в соответствующей квадрупольной системе с помощью простого отображения z^p , где $p = n/2$, и принципа симметрии. Отметим, также, что при таком преобразовании, как и следовало ожидать, выражения (8)–(11) переходят в соответствующие формулы для составляющих квадрупольной системы с $n = 2$, а выражение (12) обращается в нуль. При нечетных n решение возможно лишь в случае граничных условий типа (27), при которых распределение потенциала $\varphi(x, y)$ также имеет симметрию C_{nv} .

Выражения для потенциалов

Применяя метод Келдыша–Седова (см., например, [4]), так же как в [1,2], введем комплексные составляющие потенциала

$$\Omega_\alpha^{(j)}(w) = \phi_\alpha^{(j)}(u, v) + i\varphi_\alpha^{(j)}(u, v) \quad (\alpha = 1, 3, 4), \quad (28)$$

при этом производная

$$\frac{d\Omega_\alpha^{(j)}}{dw} = \frac{\partial\varphi_\alpha^{(j)}}{\partial v} + i\frac{\partial\phi_\alpha^{(j)}}{\partial u}. \quad (29)$$

В случае квадрупольной системы, учитывая граничные условия (25), для производных комплексных составляю-

щих потенциала запишем выражения

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1^{(j)}}{dw} &= \frac{\gamma_{j1}}{\sqrt{(w-a_1)(a_2-w)(w+a_3)(w+a_5)}} \\ &= \gamma_{j1}f_1(w), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{d\Omega_3^{(j)}}{dw} = \frac{\gamma_{j3}}{\sqrt{w(w-a_1)(a_2-w)}} = \gamma_{j3}f_3(w), \quad (31)$$

$$\frac{d\Omega_4^{(j)}}{dw} = \frac{\gamma_{j4}}{\sqrt{w(w+a_3)(w+a_5)}} = \gamma_{j4}f_4(w), \quad (32)$$

где γ_{j1} , γ_{j3} и γ_{j4} — действительные постоянные.

Эти постоянные находятся из соответствия граничным условиям (25). Для них можно записать следующие выражения:

$$\gamma_{j\alpha} = \frac{V_{\alpha j+1} - V_{\alpha j}}{J_\alpha} \quad (\alpha = 1, 3, 4). \quad (33)$$

Здесь через J_α обозначены следующие интегралы:

$$J_\alpha = \text{Im} \int_{a_e}^{-a_4} f_\alpha(w)dw, \quad (34)$$

величина которых определяется геометрией системы. Формулы (30)–(34) справедливы и в случае октуполя при условии, что $V_5 = V_1$, $V_6 = V_2$, $V_7 = V_3$, $V_8 = V_4$, а для секступольной системы — при условии, что $V_1 = V_3 = V_5$, $V_2 = V_4 = V_6$, отлична от нуля только составляющая потенциала $\varphi_1^{(j)}$, для определения которой можно использовать граничные условия (27).

Подставляя проинтегрированные выражения (30)–(32) в формулу (1), запишем окончательно для распределения потенциала $\varphi^{(j)}(u, v)$ в j -м секторе следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}(u, v) = \text{Im} \int_{a_e}^w & \left[\gamma_{j1}f_1(w) \right. \\ & \left. + \gamma_{j3}f_3(w) + \gamma_{j4}f_4(w) \right] dw + V_j, \end{aligned} \quad (35)$$

которое совместно с конформным преобразованием (24) или (23) определяет искомым потенциал $\varphi(x, y)$ в выделенном секторе. Отметим, что в тех случаях, когда обратное преобразование $w^{(j)}(z)$ в явном виде не находится, как, например, для (24), при расчете траекторий заряженных частиц целесообразно использовать не распределение потенциала $\varphi(x, y)$, а распределение $\varphi^{(j)}(u, v)$ [5]. При этом одно и то же распределение потенциала в w -плоскости позволяет описать свойства различных мультипольных систем, отличающихся видом конформного преобразования $z(w)$.

Значения параметров конформного преобразования a_1, a_2 C и интегралов J_1, J_3 в зависимости от геометрии системы

$a = \frac{s}{2l}$		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 2$	a_1	0.80982	0.63907	0.48800	0.35713	0.24681	0.15715	0.08795	0.03892	0.00970
	a_2	1.21036	1.44382	1.70722	2.01403	2.38961	2.88314	3.60191	4.83540	7.81772
	C/l	0.49874	0.49482	0.48781	0.47700	0.46135	0.43931	0.40842	0.36402	0.29371
	J_1	2.99432	2.29609	1.87960	1.57233	1.31822	1.09045	0.87233	0.64972	0.40186
	J_3	3.69425	3.00984	2.61089	2.323301	2.08806	1.87621	1.66557	1.43156	1.12394
$n = 3$	a_1	0.72691	0.49877	0.30886	0.15610	0.04492				
	a_2	1.33467	1.76940	2.40018	3.52374	6.73568				
	C/l	0.33096	0.32295	0.30796	0.28228	0.23401				
	J_1	2.56531	1.81245	1.31437	0.89199	0.46642				
	J_3	3.27862	2.56121	2.09824	1.69260	1.21251				
$n = 4$	a_1	0.65108	0.37690	0.16092	0.01280					
	a_2	1.47477	2.22170	3.89622	18.2539					
	C/l	0.24763	0.23713	0.21468	0.14969					
	J_1	2.24722	1.42075	0.80666	0.17211					
	J_3	2.97667	2.20372	1.60841	0.73544					

Результаты численных расчетов

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением практически наиболее интересного случая, когда размеры s_k и l_k для всех электродов одинаковы и равны соответственно s и l . При этом в силу симметрии $a_3 = a_2$, $a_4 = a_e$, а $a_5 = a_1$ и подынтегральные функции в (24) и (35) принимают вид

$$f(w) = \frac{w^{\frac{1-n}{n}}(w^2 - a_e^2)}{\sqrt{(w^2 - a_1^2)(w^2 - a_2^2)}}, \quad (36)$$

$$f_1(w) = \frac{1}{\sqrt{(w^2 - a_1^2)(a_2^2 - w^2)}}, \quad (37)$$

$$f_3(w) = \frac{1}{\sqrt{w(w - a_1)(a_2 - w)}}, \quad (38)$$

$$f_4(w) = f_3(-w). \quad (39)$$

Легко показать, что для таких систем $J_4 = J_3$.

Для систем, показанных на рис. 1, $a-c$, в том случае, когда размеры и расположение всех электродов одинаковы,

$$a_1 = l^n, \quad a_2 = (l + s)^n. \quad (40)$$

Для систем, представленных на рис. 1, $d-f$, с пластинчатыми электродами одинакового размера было проведено вычисление параметров конформного преобразования (24) a_1, a_2 и интегралов J_1, J_3 в зависимости от геометрии системы. Полагалось $a_4 = a_e = 1$. Для каждого значения a_1 подбиралось значение a_2 , обеспечивающее выполнение равенства

$$\int_{a_1}^{a_e} |f(u)| du = \int_{a_e}^{a_2} |f(u)| du = \frac{s}{2C}, \quad (41)$$

где функция $f(u)$ определяется выражением (36). При этих значениях a_1, a_2 вычислялся интеграл

$$\int_0^{a_1} |f(u)| du = \frac{l}{C} \quad (42)$$

и находился параметр $a = s/2l$, определяющий геометрию соответствующей системы. Результаты расчета приведены в таблице для трех значений $n = 2, 3, 4$ и значений a , равных 0.1, 0.2, ..., 0.9 в случае $n = 2$ и 0.1, 0.2, ..., 0.5 в случае $n = 3$, а также 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 в случае $n = 4$.

Было рассчитано распределение потенциала $\varphi(x, y)$ для квадрупольной системы, приведенной на рис. 1, a , при $V_1 = 0, V_2 = 1.0, V_3 = 2.0, V_4 = 3.0; l = 0.6, s = 0.6$. Интегралы J_α вычислялись по формуле (34) при $a_e = a_4 = 1$ с учетом выражений (37), (38), (40). Для них были получены следующие значения: $J_1 = 2.21700, J_3 = J_4 = 2.80958$. Коэффициенты $\gamma_{j\alpha}$ находились по формуле (33) с использованием матрицы потенциалов (26). Найденные значения коэффициентов образуют следующую матрицу:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0.451059 & 0 & 0.355925 & -0.355925 \\ -0.451059 & 0 & 0.355925 & 0.355925 \\ 0.451059 & 0 & -0.355925 & 0.355925 \\ -0.451059 & 0 & -0.355925 & -0.355925 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Эти значения коэффициентов $\gamma_{j\alpha}$ были использованы в формуле (35) для расчета распределений потенциала $\varphi^{(j)}(u, v)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) в верхней полуплоскости w -плоскости. Каждая из четырех ветвей потенциала $\varphi^{(j)}(u, v)$ позволяет найти с помощью отображения (23) соответствующее распределение потенциала $\varphi(x, y)$ в одной из четвертей z -плоскости, номер которой определяется соответственно значением j .

Найденные при $a_1 = a_5 = 0.36$ и $a_2 = a_3 = 1.44$ распределения потенциала $\varphi^{(j)}(u, v)$ позволяют, исполь-

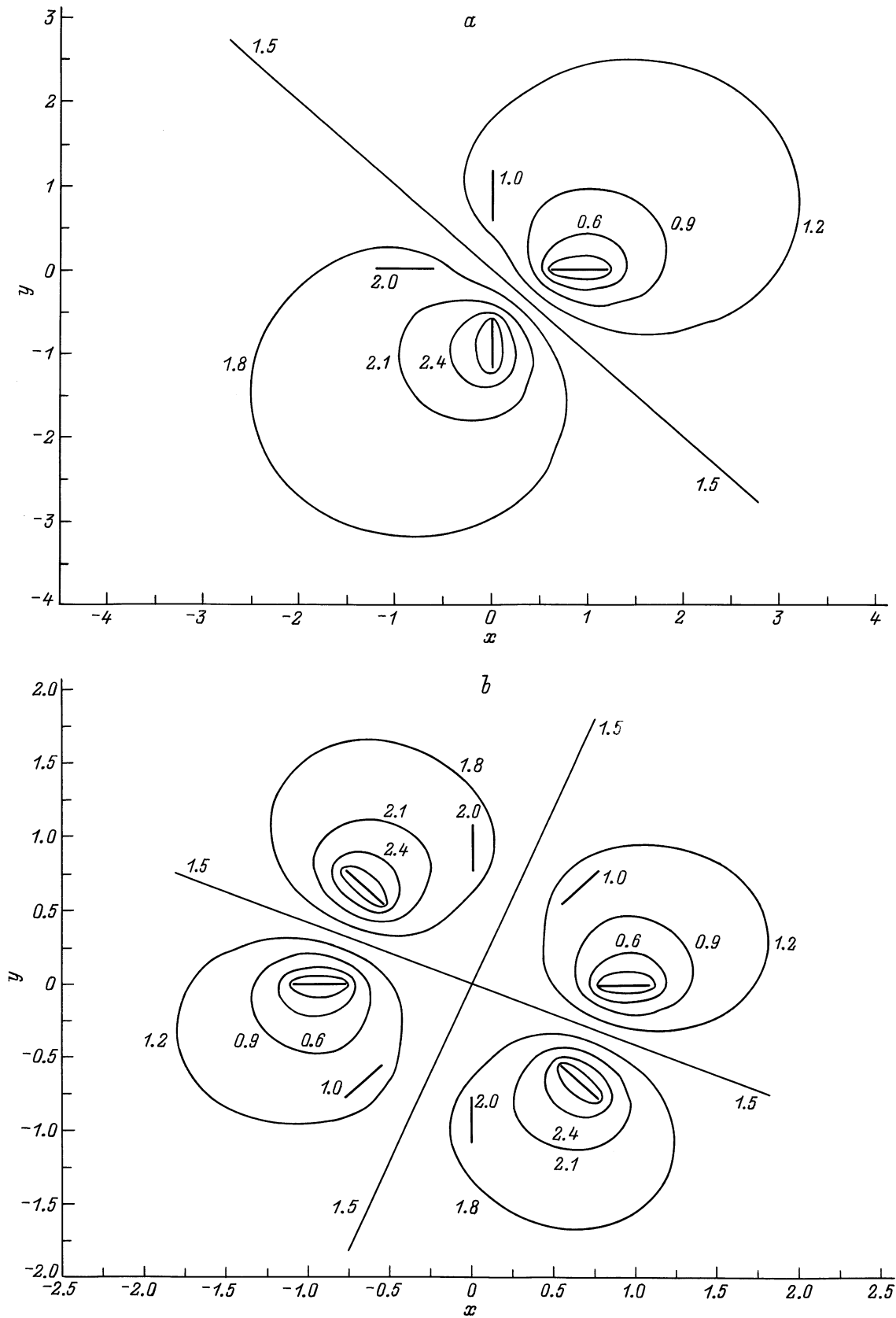


Рис. 3. Распределение потенциала в мультипольных системах при $V_1 = 0$, $V_2 = 1.0$, $V_3 = 2.0$, $V_4 = 3.0$: a, b — системы "звездочного" типа; c, d — системы "многоугольного" типа.

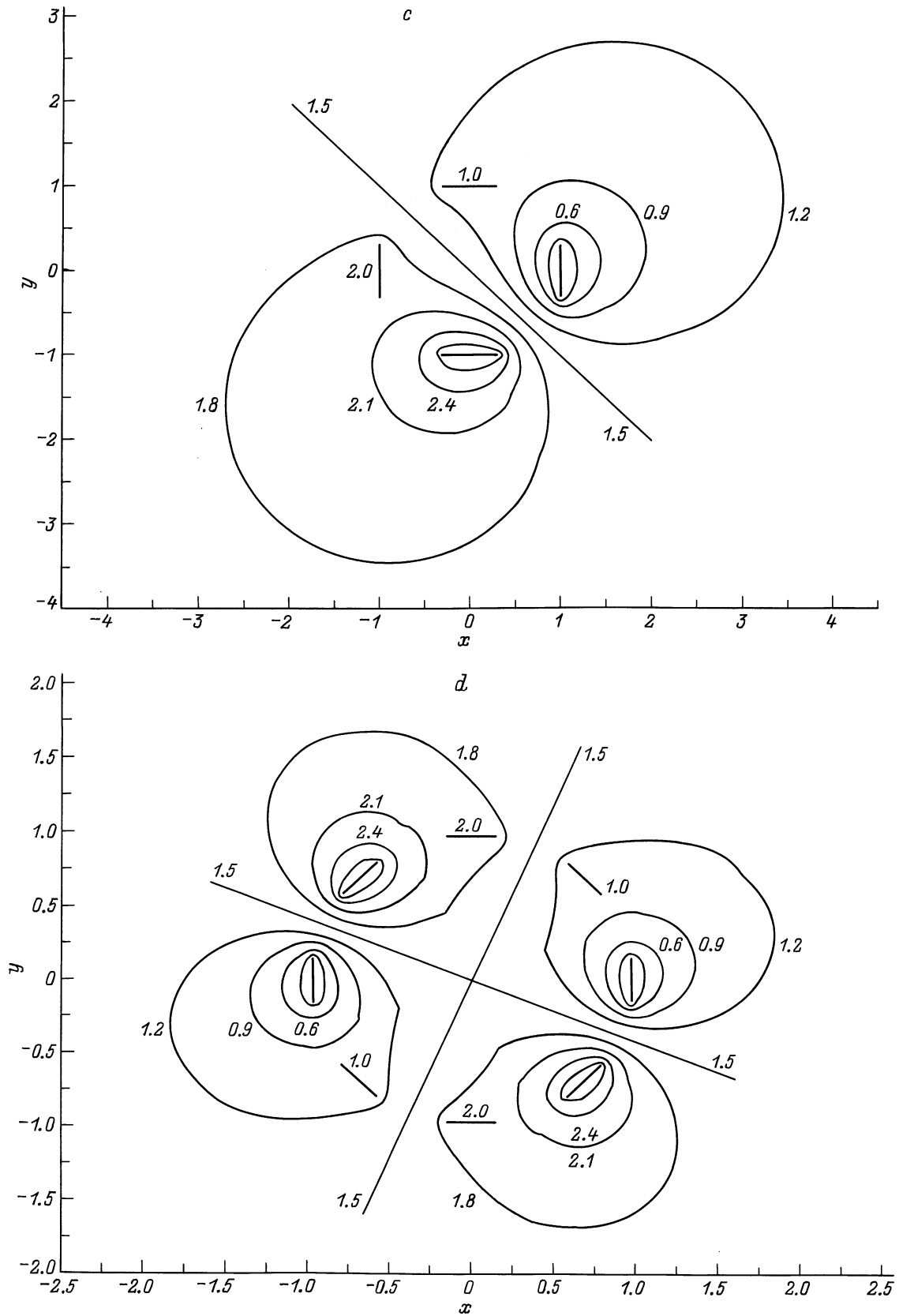


Рис. 3 (продолжение).

зую формулы (23), (24), найти распределение поля в соответствующих мультипольных системах как "звездчатого" типа (рис. 1, *a, c*), так и "многоугольного" типа (рис. 1, *d, f*). Используя отображение, обратное (23) с $n = 2$, получим распределение потенциала в исходной квадрупольной системе (рис. 1, *a*) с $V_1 = 0$, $V_2 = 1.0$, $V_3 = 2.0$, $V_4 = 3.0$; $l = 0.6$, $s = 0.6$, а в случае $n = 4$ — в октупольной системе (рис. 1, *c*) с $V_1 = 0$, $V_2 = V_6 = 1.0$, $V_3 = V_7 = 2.0$, $V_4 = V_8 = 3.0$; $l = 0.774597$, $s = 0.320848$. Применяя отображение (24) с подынтегральной функцией (36) при $n = 2$, $a_1 = 0.36$, $a_2 = 1.44$, $a_e = a_4 = 0.646295$, $C = 0.541029$, найдем распределение потенциала в квадрупольной системе "многоугольного" типа (рис. 1, *d*) с $V_1 = 0$, $V_2 = 1.0$, $V_3 = 2.0$, $V_4 = 3.0$; $l = 1.0$, $s = 0.625980$, а при $n = 4$, $a_1 = 0.36$, $a_2 = 1.44$, $a_e = a_4 = 0.579398$, $C = 0.259266$ — в октупольной системе (рис. 1, *f*) с $V_1 = V_5 = 0$, $V_2 = V_6 = 1.0$, $V_3 = V_7 = 2.0$, $V_4 = V_8 = 3.0$; $l = 1.0$, $s = 0.299851$.

Все расчеты проводились с точностью, обеспечивающей получение не менее пяти верных значащих цифр в значении потенциала. Эквипотенциали найденных распределений, соответствующие значениям потенциала 0.3, 0.6, ..., 2.7, представлены на рис. 3, *a, b* для систем "звездчатого" типа и на рис. 3, *c, d* для систем — "многоугольного" типа.

Заключение

Описанный метод вычисления потенциала поля мультипольных систем дает возможность получить точные квадратурные выражения для решения уравнения Лапласа в случае симметричных многосвязных граничных областей. Теоретико-групповые методы позволяют найти соотношения между потенциалами электродов, при которых такое решение возможно. Особую ценность предложенный метод имеет в тех случаях, когда электроды имеют заострения, резкие незакругленные границы и другие особенности, затрудняющие получение решений известными численными методами. Кроме того, он может оказаться полезным для определения точности расчетов, выполняемых другими численными методами, например методом конечного элемента [6,7]. Он может быть применен не только для расчета двумерных полей, но и для расчета полей, сводимых к двумерным [8], а также к решению существенно недвумерных задач.

Во многих случаях геометрическая симметрия электродов мультипольной системы не проявляется явно в распределении поля, так как она может быть нарушена асимметрией граничных значений потенциала. Но такая скрытая симметрия может быть выявлена с помощью методов теории групп. Групповые методы успешно могут быть использованы и при расчетах электрических и магнитных полей, выполняемых альтернативными численными методами.

Список литературы

- [1] Гликман Л.Г., Радченко В.В., Спивак-Лавров И.Ф., Шектыбаев А.К. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 8. С. 23–28.
- [2] Spivak-Lavrov I.F. // Proc. SPIE. Electron-Beam Sources and Charged-Particle Optics. San Diego (California), 1995. Vol. 2522. P. 149–154.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 702 с.
- [4] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1972. 716 с.
- [5] Spivak-Lavrov I.F. // Nucl. Instr. & Meth. Phys. Res. 1995. Vol. 363A. N 1, 2. P. 491–493.
- [6] Lencova B. // Ibid. P. 190–197.
- [7] Zhu X., Liu H., Munro E. // Proc. SPIE. Electron-Beam Sources and Charged-Particle Optics. San Diego (California), 1995. Vol. 2522. P. 66–77.
- [8] Доскеев Г.А., Спивак-Лавров И.Ф. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 144–153.