01

Электростатическая задача для тонкой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и диска

© Г.Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
230023 Гродно, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 28 ноября 1997 г.)

Решена осесимметричная электростатическая задача для тонкой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и диска. Проведены вычисления емкостных коэффициентов для некоторых геометрических параметров проводников.

Необходимость расчета емкости системы проводников различной конфигурации возникает при решении ряда задач, с которыми приходится встречаться инженерам и научным работникам самых различных специальностей. Цель данной работы — решение осесимметричной электростатической задачи для тонкой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и диска и вычисление емкостных коэффициентов для некоторых геометрических параметров проводников.

Рассмотрим осесимметричную задачу о нахождении потенциала электростатического поля системы проводников, состоящей из тонкой незамкнутой вытянутой эллипсоидальной оболочки S и круглого диска Γ радиуса a (осевое сечение проводников показано на рисунке). Оболочка S расположена на поверхности вытянутого эллипсоида вращения S_1, где b, d — большая и малая полуоси эллипса соответственно, $c = \sqrt{b^2 - d^2}$ — половина межфокусного расстояния. Для решения задачи свяжем цилиндрические координаты $\{\rho, z, \varphi\}$ с точкой O [1]:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z$$

$$(0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < \infty),$$

а с точкой O_1 — вырожденные эллипсоидальные координаты $\{\alpha, \beta, \varphi\}$ [1]

$$x = c \operatorname{sh}\alpha \sin\beta \cos\varphi; \quad y = c \operatorname{sh}\alpha \sin\beta \sin\varphi;$$

$$z = c \operatorname{ch}\alpha \cos\beta \ \ (0 \leqslant \alpha < \infty, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Тогда рассматриваемые проводники будут описываться следующим образом:

$$S = \left\{\alpha = \alpha_0 = \operatorname{arch}\frac{b}{c}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\},$$

$$\Gamma = \left\{0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad z = 0\right\}.$$

Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h и условно разобьем все пространство E_3 эллипсоидом S_1 и плоскостью $z = 0$ на три области: $D_1(z < 0)$, $D_2(\alpha < \alpha_0)$ и $D_3 = E_3 \setminus (D_1 \cup D_2)$. Потенциал электростатического поля в области D_j обозначим через U_j, $j = 1, 2, 3$. Электростатический потенциал U_j должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta U_j(M) = 0$ в области D_j, $j = 1, 2, 3$, граничным условиям

$$U_3(M) = |_{M\in S} = V_s - \text{const}, \tag{1}$$

$$U_3(M)|_{M\in\Gamma} = V_d - \text{const} \tag{2}$$

и условию на бесконечности

$$U_j(M) \to 0 \ \text{ при } \ M \to \infty, \quad j = 1, 3, \tag{3}$$

где M — произвольная точка пространства.

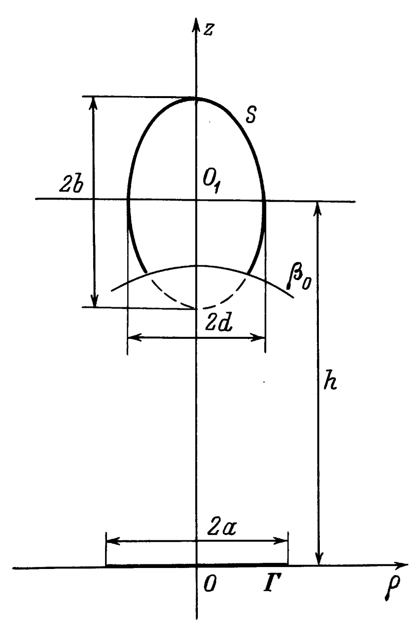
Кроме того, должны выполняться следующие условия непрерывности потенциала и поля:

$$U_2|_{\alpha=\alpha_0} = U_3|_{\alpha=\alpha_0}, \quad U_1|_{z=0} = U_3|_{z=0}, \qquad (4), (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}U_2\bigg|_{\alpha=\alpha_0,\beta>\beta_0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}U_3\bigg|_{\alpha=\alpha_0,\beta>\beta_0}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}U_1\bigg|_{z=0,\rho>a} = \frac{\partial}{\partial z}U_3\bigg|_{z=0,\rho>a}. \tag{7}$$

Электростатический потенциал U_j будем искать в виде суперпозиции цилиндрических и эллипсоидальных



гармонических функций [1,2] так, чтобы выполнялось условие на бесконечности (3)

$$U_1(\rho, z) = \int_0^\infty B(\lambda)\exp(\lambda z)J_0(\lambda\rho)d\lambda \quad \text{в} \quad D_1, \tag{8}$$

$$U_2(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} P_n(\cos\beta) \quad \text{в} \quad D_2, \tag{9}$$

$$U_3 = U_3^{(1)}(\rho, z) + U_3^{(2)}(\alpha, \beta) \quad \text{в} \quad D_3, \tag{10}$$

где

$$U_3^{(1)}(\rho, z) = \int_0^\infty A(\lambda)\exp(-\lambda z)J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad z > 0,$$

$$U_3^{(2)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{Q_n(\operatorname{ch}\alpha)}{Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} P_n(\cos\beta), \quad \alpha > \alpha_0,$$

$P_n(\operatorname{ch}\alpha)$, $Q_n(\operatorname{ch}\alpha)$ — функции Лежандра первого и второго рода соответственно, $P_n(\cos\beta)$ — полиномы Лежандра, $J_0(\lambda\rho)$ — функция Бесселя первого рода [1,3–6].

Неизвестные коэффициенты a_n, b_n и функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ подлежат определению из условий (1)–(7). Для выполнения условий (1), (4), (6) разложим потенциал $U_3^{(1)}(\rho, z)$ по эллипсоидальным гармоническим функциям в системе координат с началом в точке O_1, используя формулу [2],

$$J_0(\lambda\rho)\exp(\mp\lambda z) = \sum_{n=0}^\infty (\pm i)^n(2n+1)j_n(ic\lambda) \times P_n(\operatorname{ch}\alpha)P_n(\cos\beta),$$

где i — мнимая единица, $j_n(ic\lambda)$ — сферическая функция Бесселя [3–6].

Тогда

$$U_3^{(1)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^\infty d_n P_n(\operatorname{ch}\alpha)P_n(\cos\beta), \tag{11}$$

где

$$d_n = i^n(2n+1)\int_0^\infty A(\lambda)\exp(-\lambda h)j_n(ic\lambda)d\lambda. \tag{12}$$

Учитывая представления (9), (10), (11), выполняя граничное условие (1) на поверхности незамкнутой эллипсоидальной оболочки S и условия непрерывности (4), (6), получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра вида

$$\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(\cos\beta) = V_s - \sum_{n=0}^\infty d_n P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)P_n(\cos\beta), \quad \beta < \beta_0,$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n P_n(\cos\beta)}{\operatorname{sh}\alpha_0 P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} = 0, \quad \beta > \beta_0. \tag{13}$$

Для выполнения граничного условия (2) на диске Γ разложим потенциал $U_3^{(2)}(\alpha, \beta)$ по цилиндрическим гармоническим функциям в координатной системе с началом в точке O, применив интегральное представление [2,6],

$$Q_n(\operatorname{ch}\alpha)P_n(\cos\beta) = ci^n\int_0^\infty j_n(ic\lambda)J_0(\lambda\rho_1) \times \exp(\lambda z_1)d\lambda, \quad z_1 < c.$$

Тогда

$$U_3^{(2)}(\rho, z) = \int_0^\infty d(\lambda)\exp(\lambda z)J_0(\lambda\rho)d\lambda, \tag{14}$$

где

$$d(\lambda) = c\exp(-\lambda h)\sum_{n=0}^\infty \frac{i^n j_n(ic\lambda)}{Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}a_n. \tag{15}$$

Принимая во внимание представления для потенциалов (8), (10), (14) и выполняя граничное условие (2), условия непрерывности (5), (7), получим парные интегральные уравнения вида

$$\int_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda = V_d - \int_0^\infty d(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad \rho > a,$$

$$\int_0^\infty \lambda A(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda = 0, \quad \rho > a. \tag{16}$$

Для решения парных сумматорных уравнений (13) введем в рассмотрение новую функцию $\varphi(t), \varphi(t) \in C^{(1)}_{[0,\beta_0]}$, которая связана с коэффициентами a_n соотношением

$$a_n = (2n+1)\operatorname{sh}\alpha_0 P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0) \times \int_0^{\beta_0}\varphi(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt. \tag{17}$$

Тогда парные сумматорные уравнения (13) преобразуются к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [7]

$$\varphi(x) - \int_0^{\beta_0}K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{2}{\pi}\left[V_s\cos\frac{x}{2} - \sum_{n=0}^\infty d_n P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant \beta_0, \tag{18}$$

где

$$K(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^\infty g_n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \tag{19}$$

$g_n = 1 - (2n+1)\operatorname{sh}\alpha_0 P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)$, $g_n \to O(n^{-2})$ при $n \to \infty$.

Значения нормированных емкостных коэффициентов $\frac{C_{ik}}{4\pi\varepsilon}$ при $b/d = 2$, $d/a = 1$, $h/b = 2$

β_0, deg	$\frac{C_{11}}{4\pi\varepsilon}$	$\frac{C_{22}}{4\pi\varepsilon}$	$\frac{C_{12}}{4\pi\varepsilon}$
30	0.3086	0.6033	0.0374
60	0.6287	0.5633	0.0832
90	0.9016	0.5189	0.1361
120	1.0782	0.4785	0.1889
150	1.1508	0.4542	0.2258

Для решения парных интегральных уравнений (16) введем в рассмотрение новую функцию $\omega(t)$, связанную с функцией $A(\lambda)$ соотношением

$$A(\lambda) = \int\limits_0^a \omega(t)\cos\lambda t dt. \tag{20}$$

После некоторых преобразований [8] получим, что

$$\omega(t) = \frac{2}{\pi}\left[V_d - \int\limits_0^\infty d(\lambda)\cos\lambda t d\lambda\right]$$

или, согласно представлению (15),

$$\omega(t) = \frac{2}{\pi}\left[V_d - \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} B_n(t)\right], \tag{21}$$

где

$$B_n(t) = ci^n \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda h) j_n(ic\lambda)\cos\lambda t d\lambda. \tag{22}$$

Подставляя коэффициенты a_n из (17) в правую часть (21), устанавливаем взаимосвязь между функциями $\omega(t)$ и $\varphi(x)$

$$\omega(t) = \frac{2}{\pi}\left[V_d - \operatorname{sh}\alpha_0 \int\limits_0^{\beta_0} S(t,x)\varphi(x)dx\right], \tag{23}$$

где

$$S(t,x) = \sum_{n=0}^\infty (2n+1)P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)B_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x. \tag{24}$$

Принимая во внимание последовательно представления (12), (20), интегральное уравнение Фредгольма второго рода (18) можно преобразовать к виду

$$\varphi(x) - \int\limits_0^{\beta_0} K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{2}{\pi}\left[V_s\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{c}\int\limits_0^a S(u,x)\omega(u)du\right]. \tag{25}$$

Теперь из правой части (25) исключим функцию $\omega(u)$ с помощью представления (23) и окончательно получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) - \int\limits_0^{\beta_0}\left[K(x,t) + K_1(x,t)\right]\varphi(t)dt = \frac{2}{\pi}\left[V_s\cos\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi c}V_d F(x)\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant \beta_0, \tag{26}$$

где

$$K_1(x,t) = \frac{4\operatorname{sh}\alpha_0}{\pi^2 c}\int\limits_0^a S(u,x)S(u,t)du,$$

$$F(x) = \int\limits_0^a S(t,x)dt.$$

Заряды тонкой незамкнутой эллипсоидальной оболочки S и диска Γ вычисляются через решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (26) соответственно по формулам

$$Q_s = 4\pi\varepsilon d\int\limits_0^{\beta_0}\varphi(x)\cos\frac{x}{2}dx, \tag{27}$$

$$Q_d = 4\pi\varepsilon\left[\frac{2}{\pi}aV_d - \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\alpha_0\int\limits_0^{\beta_0}F(x)\varphi(x)dx\right], \tag{28}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Емкостные коэффициенты C_{ik} можно вычислить через заряды проводников по формулам [9]

$$C_{11} = Q_s(V_s = V_d = 1), \quad C_{22} = Q_d(V_s = V_d = 1),$$

$$C_{12} = Q_s(V_s = 0,\ V_d = -1),$$

$$C_{21} = Q_d(V_s = -1,\ V_d = 0), \quad C_{12} = C_{21}.$$

В таблице приведены нормированные емкостные коэффициенты $C_{ik}/4\pi\varepsilon$, вычисленные для следующих геометрических параметров проводников $b/d = 2$, $d/a = 1$, $h/b = 2$, $\beta_0 = 30, 60, 90, 120, 150°$. Функции Лежандра $P_n(x)$ вычислялись по рекуррентной формуле [3]

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right]$$

при начальных значениях $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$.

Функции Лежандра $Q_n(x)$ вычислялись через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1(a,b;c;x)$ по формуле [3]

$$Q_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}n!}{\Gamma(n+1,5)(2x)^{n+1}} \times {}_2F_1\left(\frac{2+n}{2},\ \frac{1+n}{2};\ \frac{3+2n}{2};\ x^{-2}\right),$$

где

$$ {}_2F_1(a,b,c,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} x^k, \quad (29) $$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ — символ Похгаммера [3–5].

Используя разложение сферической функции Бесселя в ряд [3–5]

$$ j_n(ic\lambda) = 2^n i^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!}{s!(2s+2n+1)!} (c\lambda)^{2s+n} $$

и интеграл [10]

$$ \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-px) \cos bx dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(b^2+p^2)^{\alpha/2}} \cos\left(\alpha \operatorname{arctg} \frac{b}{p}\right), $$

несобственный интеграл (22) $B_n(x)$ был преобразован в сумму

$$ B_n(x) = (-2)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!(2s+n)!}{s!(2n+2s+1)!} \left(\frac{c}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)^{2s+n+1} $$
$$ \times \cos\left[(2s+n+1) \operatorname{arctg} \frac{x}{h}\right]. \quad (30) $$

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (26) было преобразовано в конечную систему линейных алгебраических уравнений путем использования квадратурной формулы Симпсона с шагом, равным 0.1. Бесконечные суммы (19), (29), (30) вычислялись с точностью 10^{-5}. Вычисления выполнялись с помощью интегрированного пакета MathCAD 6.0 [11].

Если $\beta_0 = \pi$ (незамкнутая оболочка S переходит в эллипсоид S_1), то вместо интегрального уравнения (26) имеем интегральное уравнение Фредгольма относительно функции $\omega(x)$ вида

$$ \omega(x) - \frac{2}{\pi c} \int_0^a L(x,t)\omega(t) dt $$
$$ = \frac{2}{\pi} \left[V_d - V_s \frac{B_0(x)}{Q_0(\operatorname{ch}\alpha_0)}\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad (31) $$

где

$$ L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}{Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} B_n(x) B_n(t). $$

Сделаем в интегральном уравнении (31) следующие замены: $x = \tau a$, $t = \sigma a$, $v(\tau) = (\pi/2)\omega(x)$, $v(\sigma) = (\pi/2)\omega(t)$, $\delta = a/d$, $\eta = d/b$, $\mu = b/h < 1$. Тогда интегральное уравнение (31) примет вид

$$ v(\tau) - \frac{2\eta\delta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_0^1 L(\tau,\sigma) v(\sigma) d\sigma $$
$$ = V_d - V_s \frac{B_0(\tau)}{Q_0(\operatorname{ch}\alpha_0)}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad (32) $$

где

$$ L(\tau,\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}{Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} B_n(\tau) B_n(\sigma), $$

$$ B_n(\tau) = (-2)^n \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+s)!}{s!(2n+2s+1)!} $$
$$ \times \frac{(2s+2k+n)!}{(2k)!} (\tau\eta\delta)^{2k} (1-\eta^2)^{\frac{2s+n+1}{2}} \mu^{2k+2s+n+1}. $$

Заряд вытянутого эллипсоида S_1 вычисляется по формуле

$$ Q_1 = 4\pi c\varepsilon \frac{a_0}{Q_0(\operatorname{ch}\alpha_0)} = 4\pi b\varepsilon a_0 M, \quad (33) $$

где

$$ M = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\operatorname{arch}\frac{1}{\eta}}, \quad a_0 = V_s - \frac{2}{\pi} \frac{\eta\delta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_0^1 B_0(\sigma) v(\sigma) d\sigma. $$

Заряд диска вычисляется через решение интегрального уравнения (32) по формуле

$$ Q_d = 8a\varepsilon \int_0^1 v(\tau) d\tau. \quad (34) $$

Если геометрический параметр μ достаточно мал ($\mu^n \approx 0$ при $n \geqslant 4$), то можно получить решение интегрального уравнения (32) в виде ряда по малому параметру μ [8]:

$$ v(\tau) = V_d - V_s M\mu + \frac{2}{\pi} V_d \eta\delta M \mu^2 $$
$$ + \left[(\tau\eta\delta)^2 - \frac{1}{3}(1-\eta^2) - \frac{2}{\pi}\eta\delta M\right] V_s M \mu^3 + \ldots . $$

Подставляя данное разложение в формулы для вычисления зарядов диска (34) и эллипсоида (33), получим следующие выражения для зарядов проводников в виде ряда по малому параметру:

$$ v(\tau) = V_d - V_s M\mu + \frac{2}{\pi} V_d \eta\delta M \mu^2 $$
$$ + \left[(\tau\eta\delta)^2 - \frac{1}{3}(1-\eta^2) + \frac{2}{\pi}\eta\delta M\right] V_s M \mu^3 + \ldots , $$

$$ Q_1 = 4\pi\varepsilon b \left\{ V_s M - \frac{2\eta\delta}{\pi} V_d M\mu + \frac{2\eta\delta}{\pi} V_s M^2 \mu^2 - \frac{2\eta\delta}{\pi} \right. $$
$$ \left. \times \left[\frac{1}{3}(1-\eta^2) + \frac{2\eta\delta}{\pi} M - \frac{1}{3}(\eta\delta)^2\right] V_d M \mu^3 + \ldots \right\}. $$

Сходным образом решается электростатическая задача для сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и диска.

Список литературы

[1] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: ГИИТЛ, 1953. 380с.
[2] *Шушкевич С.В., Шушкевич Г.Ч.* // Весці АНБ Сер. фіз.-мат. навук. 1993. № 1. С. 118–119.
[3] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
[4] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
[5] *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
[6] *Аполлонский С.М., Ерофеенко В.И.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Минск: Университетское изд-во, 1988. 248 с.
[7] *Шушкевич Г.Ч.* // Электричество. 1988. № 6. С. 51–55.
[8] *Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 9. С. 1801–1803.
[9] *Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Л.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288с.
[10] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
[11] MathCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. М.: Филинъ, 1996. 698 с.