

Отрицательный коэффициент Пуассона фрактальных структур

© В.В. Новиков, К.В. Wojciechowski*

Одесский государственный политехнический университет,
270044 Одесса, Украина

* Institute of Molecular Physics of the Polish Academy of Sciences,
60-179 Poznan, Poland

E-mail: novikov@te.net.ua

(Поступила в окончательном виде 22 апреля 1999 г.)

На основе фрактальной модели неоднородной среды с хаотической структурой определены макроскопические упругие свойства. Показано, что если отношение объемных модулей упругости фаз $K_2/K_1 \rightarrow 0$, то в пороге перколяции p_c коэффициент Пуассона среды равен 0.2. Проведено исследование поведения двухфазной среды с отрицательным коэффициентом Пуассона.

Типичные окружающие нас материалы имеют положительные коэффициенты Пуассона, $\nu > 0$ [1]. Однако в последнее время было показано, что при определенных условиях коэффициент Пуассона может быть меньше нуля ($\nu < 0$) [2–15].

Такие среды еще недостаточно теоретически исследованы. В данной работе коэффициент Пуассона неоднородной среды с хаотической структурой исследуется на основе итерационного метода усреднений, который показал достаточно высокую эффективность при исследовании проводимости, диэлектрических и упругих свойств композитов [16–20].

Исследования упругих свойств неоднородных сред с хаотической структурой и большим различием свойств компонентов проводились в большинстве своем численными методами на перколяционных решетках [21–28]. В частности, были исследованы переходы несвязного множества связей или узлов в связное множество, и наоборот [29–33]. Было установлено, что в критической точке (в пороге протекания) p_c соединяющее множество образует перколяционный кластер, который является самоподобным множеством, т.е. фракталом [32–35], а модуль объемной упругости имеет скейлинговую зависимость

$$K \approx (p - p_c)^\tau \text{ в упругой области } (p \geq p_c), \quad (1)$$

$$K \approx (p - p_c)^s \text{ в высокоэластичной области } (p \leq p_c), \quad (2)$$

где p — концентрация целых связей, а критические индексы τ, s зависят только от размерности пространства d .

Типичными представителями таких материалов являются полимеры, коллоидные и композиционные материалы [35–37].

Необходимо отметить, что задача определения упругих свойств на перколяционной решетке будет сформулирована полностью, если определить гамильтониан на рассматриваемом множестве узлов и связей, геометрические характеристики которого (число узлов или связей, расстояние до наиболее удаленных элементов, извилистость и т.д.) заданы статистически. При этом

гамильтониан, описывающий упругие свойства перколяционной системы, должен удовлетворять определенным требованиям. А именно, должны реализоваться упругая связность: решетка при $p \geq p_c$ должна иметь конечные макромодули упругости, обращаясь в нуль при $p \rightarrow p_c + 0$; правильно воспроизводиться тензорные свойства упругости длинных цепочек, образующих перколяционный кластер; выполняться инвариантность относительно вращений в свободных состояниях гамильтониана.

Первому условию удовлетворяет, например, модель Борна [29], однако она не удовлетворяет второму условию и в итоге приводит к системе уравнений, аналогичных уравнениям Кирхгофа для электрических токов в сетке сопротивлений, и как следствие — к тому, что критический индекс τ равен критическому индексу проводимости t .

Кантор и Уэбман предложили [23] гамильтониан, который учитывал изменение энергии системы за счет изменения углов между связями решетки. Этот гамильтониан удовлетворял всем трем условиям, что привело к корректному описанию упругих свойств перколяционных систем [24–28].

Нужно также отметить, что некоторые конфигурации из связей (локальные области) могут обладать необычными свойствами, в частности отрицательным коэффициентом Пуассона $\nu < 0$. Так, например, цепочка связей, изображенная на рис. 1, при растяжении не только удлиняется, но и "утолщается". Если такие конфигурации будут вносить определяющий вклад в макроскопические свойства системы, то это может привести к тому, что коэффициент Пуассона системы будет отрицательным.

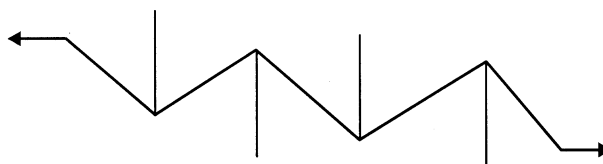


Рис. 1. Конфигурация цепочки из связей перколяционной системы.

Численные исследования [24] плоских ($d = 2$) упругих хаотических перколяционных сеток показали, что если их линейный размер $L < 0.2\zeta$, то коэффициент Пуассона системы отрицательный, а если $L \cdot 0.2 > \zeta$, то коэффициент Пуассона положительный (ζ — длина корреляции). При этом если $L/\zeta \rightarrow \infty$, то предельное значение коэффициента Пуассона равно $\nu = 0.08 \pm 0.04$ и является универсальной величиной, т.е. не зависит от соотношения локальных упругих характеристик; если $L/\zeta \rightarrow 0$, то $\nu = -\frac{1}{3}$; если $L/\zeta = 5$, то $\nu = 0$.

Усреднение локальных упругих свойств перколяционных (фрактальных) систем можно проводить различными методами. Далее предлагается метод усреднения, основанный не на дискретной (перколяционной) решетке, а на континуальной "капельной" модели, в которой учитывается тензорный характер упругих свойств. Подход базируется на методе трансфер-матриц [22].

При описании перколяционных систем наряду с фрактальной геометрией используются различные аналоги метода ренормгрупповых (РГ) преобразований, основанного на идее масштабной инвариантности [32,33], который в теории температурных фазовых переходов привел к плодотворным результатам [38].

В данной работе проведены численные расчеты упругих свойств хаотической среды на основе разработанного нами итерационного метода усреднений, который базируется на результатах фрактальной геометрии и ренормгрупповых преобразований [16–20].

1. Структурная модель

Основное множество связей Ω было получено с помощью итерационного процесса, в котором на начальном шаге ($k = 0$) рассматривается конечная решетка в пространстве $d = 2$ или $d = 3$ с вероятностью p_0 того, что связь между соседними узлами решетки целая — "окрашена" в определенный цвет. Связи, окрашенные в один цвет, будут считаться обладающими одинаковыми свойствами. На следующем шаге ($k = 1, 2, \dots, n$) каждая связь в решетке заменяется решеткой, полученной на предыдущем шаге (рис. 2) Итерационный процесс заканчивается, когда свойства решетки перестают зависеть от номера итерации. Таким образом были получены решетки с линейными размерами L_n (L_n — много больше длины корреляции), на которых определялись эффективные физические свойства. Полученное с помощью итерационной процедуры множество связей $\Omega_n(l_0, p_0)$ зависит от размера начальной решетки l_0 и вероятности p_0 [16–18].

Вероятность того, что множество связей образует связанное множество на k -м этапе, $R(l_k, p_k)$, определялась как отношение числа соединяющих множеств ко всему числу разбросов (к числу способов раскраски) связей при фиксированных значениях l_0, p_0 . Функция $R(l_k, p_k)$, будучи полиномом степени N — числа всех связей на решетке (если размерность решетки равна $d = 2$, то

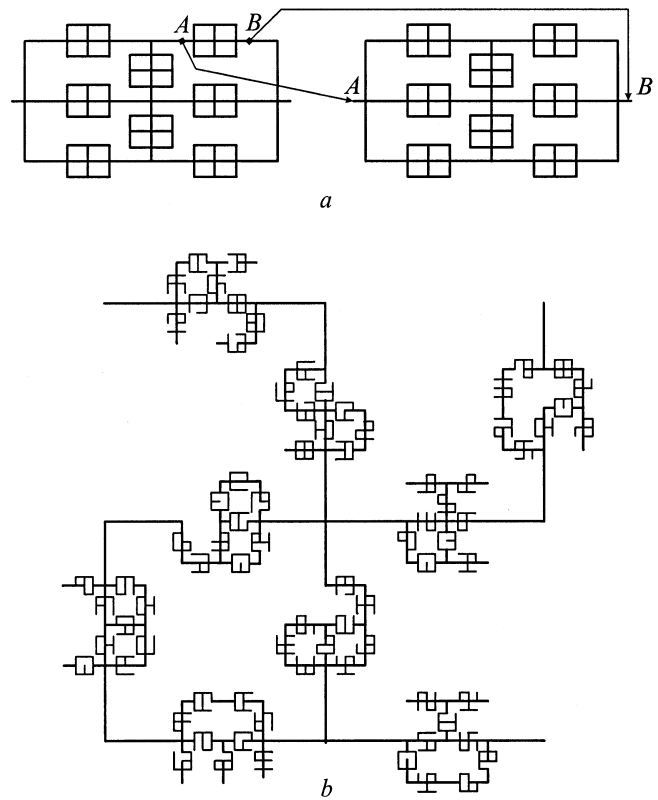


Рис. 2. Иллюстрация ренормгруппового преобразования на прямоугольной решетке для случая $l_0 = 2$: $a - p_0 = 1$; $b - p_0 = 0.75$.

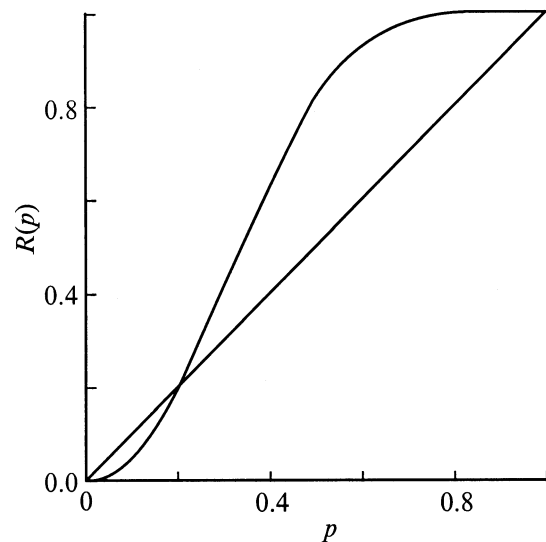


Рис. 3. Зависимость вероятности образования СМ от концентрации целых связей ($l_0 = 3, d = 3$).

$N = 2l_0^k$ — может быть определена с какой угодно точностью в знаке при любом p_0 и l_0 .

На основе фрактальных моделей структур хаотической неоднородной среды, построенных на различных исходных прямоугольных решетках: $3 \times 3; 4 \times 4; 5 \times 4;$

5×5 ; 6×6 ; 9×8 ; 9×9 для $d = 2$ и $3 \times 3 \times 3$ для $d = 3$ [16] были определены порог перколяции p_c , критические индексы для длины корреляции ν_p , плотности перколяционного кластера β и фрактальная размерность d_f . Было показано, что геометрические свойства полученных фрактальных множеств в пороге перколяции совпадают со свойствами перколяционного кластера, если размеры исходной решетки $l_0 \geq 8$ для $d = 2$ и $l_0 \geq 3$ для $d = 3$.

Далее рассмотрены эффективные упругие свойства неоднородной среды, вложенной в пространство размерности $d = 3$, для расчета которых использовалась функция $R(p)$, полученная на основе модели $3 \times 3 \times 3$ ($l_0 = 3, d = 3$) (рис. 3).

2. Упругие свойства

Рассмотрим двухфазную систему с функцией распределения

$$P_0(C) = (1 - p_0)\delta(C - C_2^{(0)}) + p_0\delta(C - C_1^{(0)}), \quad (3)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака, p_0 — вероятность того, что данная локальная область обладает свойством $C_1^{(0)}$ (с вероятностью $(1 - p_0)$ обладает свойством $C_2^{(0)}$).

После k шагов РГ-преобразований функция плотности принимает вид

$$P_k(C) = (1 - p_k)\delta(C - C_2^{(k)}) + p_k\delta(C - C_1^{(k)}). \quad (4)$$

При $k \rightarrow \infty$

$$P_k(C) = \delta(C - C_{ef}), \quad (5)$$

где C_{ef} — эффективные свойства среды, $p_k = R(l_{k-1}, p_{k-1})$ — концентрация целых связей на k -м этапе.

Определение эффективных свойств структурной модели в общем случае можно вести по следующей схеме: вначале находятся свойства различных конфигураций на первом этапе, проводится их усреднение, затем эти свойства передаются на следующий этап и т.д. [16]. Определение свойств возможных конфигураций множества связей приводит к достаточно трудоемким вычислениям. Поэтому воспользуемся приближенным методом, который заключается в том, чтобы не рассчитывать свойства конфигураций, получаемых при разбросах целых связей на решетке, а выделить два вида конфигураций множества связей: соединяющие множества (СМ) и несоединяющие множества (НСМ); и перейти от дискретных моделей (на решетках) к континуальным моделям, в которых СМ и НСМ представляются непрерывной средой. Для моделирования структуры СМ и НСМ использовалась капельная модель (шар в однородной среде, см. рис. 4).

Таким образом, на каждом этапе (масштабе) итерационного расчета упругих свойств структуры СМ и НСМ

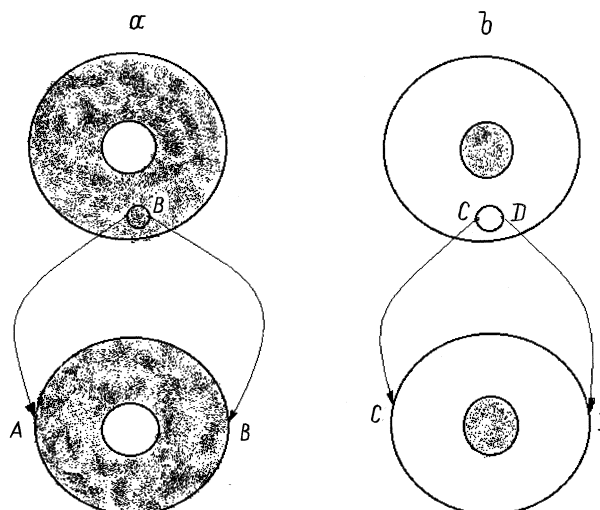


Рис. 4. К моделированию структуры связанного (а) и несвязанного (б) множеств целых связей ("капельная модель") на разных итерационных этапах (масштабах).

моделируются составными "каплями": СМ — в непрерывном массиве из "упругой" фазы находится включение в виде шара (капли) из "мягкой" фазы (рис. 4, а); НСМ — в непрерывном массиве из "мягкой" фазы находится включение в виде шара (капли) из "упругой" фазы (рис. 4, б). Доли СМ и НСМ на каждом этапе расчетов определялись равными $p_k = R(l_{k-1}, p_{k-1})$ и $1 - p_k = R(l_{k-1}, p_{k-1})$ соответственно.

Эффективные упругие свойства (модуль объемной упругости K и модуль сдвига μ) СМ и НСМ на основе капельной модели определялись с помощью формул, полученных в физике неоднородных сред [39,40] с учетом тензорного характера упругих свойств.

Схема расчета эффективных свойств имеет следующий вид: 1) на основании фрактальной модели (на решетках) определяется функция $R(p, l)$; 2) на k -м итерационном этапе расчетов концентрация СМ рассчитывается по формуле

$$p_k = R(p_{k-1}, l_{k-1}), \quad (6)$$

а упругие свойства — на основе "капельной" модели по формулам вида

$$C_c^{(k)} = f_1(C_c^{(k-1)}, C_n^{(k-1)}, p_{(k-1)}) \quad (\text{для СМ}), \quad (7)$$

$$C_n^{(k)} = f_2(C_c^{(k-1)}, C_n^{(k-1)}, p_{(k-1)}) \quad (\text{для НСМ}), \quad (8)$$

где f_1, f_2 — известные функции, которые зависят от структурной модели и упругих свойств связанных и несвязанных множеств на $(k - 1)$ -м этапе соответственно $C_c^{(k-1)}, C_n^{(k-1)}$.

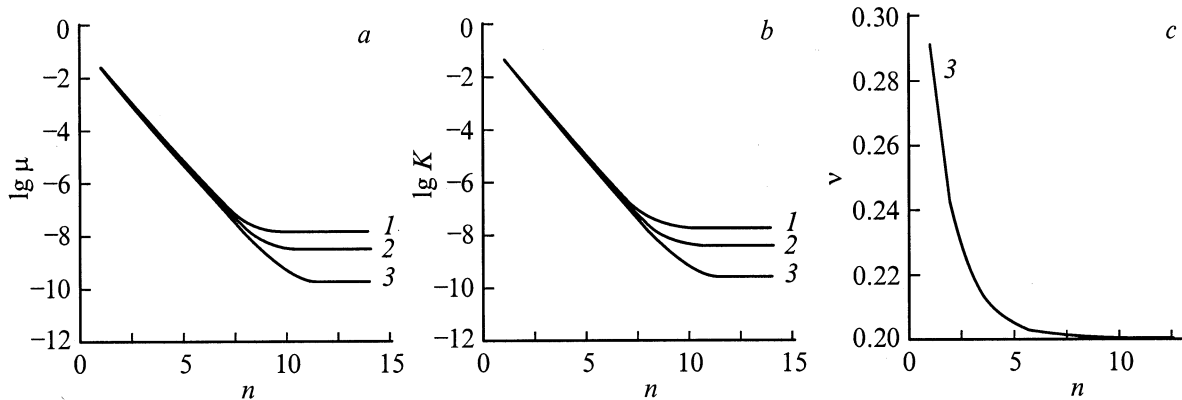


Рис. 5. Зависимость упругих свойств от номера итерации n при 1 — $p = 0.2088$; 2 — $p = 0.2092$; 3 — $p = 0.2098$. (a) — логарифм модуля сдвига $\lg \mu$; (b) — логарифм объемного модуля упругости $\lg K$; (c) — коэффициент Пуассона ν .

При этом для эффективных свойств неоднородной среды C_{ef} выполняются неравенства

$$C_c^{(k)} \geq C_{ef} \geq C_n^{(k)}.$$

В пределе $k \rightarrow \infty$ последовательности $C^{(k)}$ сходятся к C_{ef}

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_c^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_n^{(k)} = C_{ef}. \quad (9)$$

Для реализации расчета упругих свойств фрактальных структур по данной схеме желательно иметь аналитическую зависимость для функции $R(p)$.

Если для построения фрактального множества берутся исходные (затравочные) решетки небольших размеров $l_0 < 5$ для $d = 2$, то определение функции $R(p)$ можно провести аналитически. Для решеток $l_0 > 5$ ($d = 2$) и $l_0 \geq 3$ для размерности пространства $d = 3$ получение аналитического выражения для функции $R(p)$ приводит к громоздким выражениям, исследование по которым можно вести только численными методами [33].

Аппроксимация численных результатов расчетов функции $R(p)$ для решетки $3 \times 3 \times 3$ [16] показала, что имеет место хорошее совпадение численных результатов с функцией

$$R(p) = p^2(4 + 8p - 14p^2 - 40p^3 + 16p^4 + 288p^5 + 655p^6 + 672p^7 - 376p^8 + 112p^9 - 14p^{10}), \quad (10)$$

которая была ранее получена в [39].

Порог протекания p_c , согласно (10), (p_c есть решение уравнения $p = R(p)$) равен ~ 0.2085 , т.е. НСМ переходит в СМ при $p_c = 0.2085$ (рис. 3).

Для расчета упругих свойств перколяционной системы с помощью поэтапного (итерационного) метода усреднения были использованы формулы Хашина–Штрикмана [40,41] которые базируются на структурной модели — ”шар в однородной среде” (рис. 4).

Для соединяющего множества модуль объемной упругости K_c и модуль сдвига μ_c на $(i + 1)$ -м этапе имеют вид [40,41]

$$K_c^{(i+1)} = K_c^{(i)} + \frac{(1 - p_i)(K_n^{(i)} - K_c^{(i)})}{1 + p_i a_c^{(i)}(K_n^{(i)} - K_c^{(i)})}, \quad (11)$$

$$\mu_c^{(i+1)} = \mu_c^{(i)} + \frac{(1 - p_i)(\mu_n^{(i)} - \mu_c^{(i)})}{1 + p_i b_c^{(i)}(\mu_n^{(i)} - \mu_c^{(i)})}, \quad (12)$$

где

$$a_c^{(i)} = \frac{3}{3K_c^{(i)} + 4\mu_c^{(i)}}, \quad b_c^{(i)} = \frac{6(K_c^{(i)} + 2\mu_c^{(i)})}{5\mu_c^{(i)}(3K_c^{(i)} + 4\mu_c^{(i)})}, \quad (13)$$

$K_c^0 = K_1$, $\mu_c^0 = \mu_1$ — модуль объемной упругости и модуль сдвига ”упругой” фазы соответственно, а $K_n^0 = K_2$, $\mu_n^0 = \mu_2$ — модуль объемной упругости и модуль сдвига ”мягкой” фазы соответственно (K_1, K_2, μ_1, μ_2 — упругие свойства фаз неоднородной среды).

Для несоединяющего множества упругие свойства $K_n^{(i+1)}$ и $\mu_n^{(i+1)}$ определяются по формулам, полученным из (11)–(13) заменой индексов $c \leftrightarrow n$ и $p_i \leftrightarrow (1 - p_i)$.

3. Результаты расчетов

На рис. 5 представлены зависимости логарифма модуля сдвига μ (рис. 5, a), логарифма модуля объемной упругости K (рис. 5, b) и коэффициента Пуассона (рис. 5, c) фрактального множества от номера итерации n . До выхода на горизонтальный участок зависимости упругих свойств имеют фрактальный характер. Выход на горизонтальный участок указывает на верхнюю границу фрактальной асимптотики, т.е. на тот факт, что упругие свойства системы не зависят от масштаба (от номера итерации).

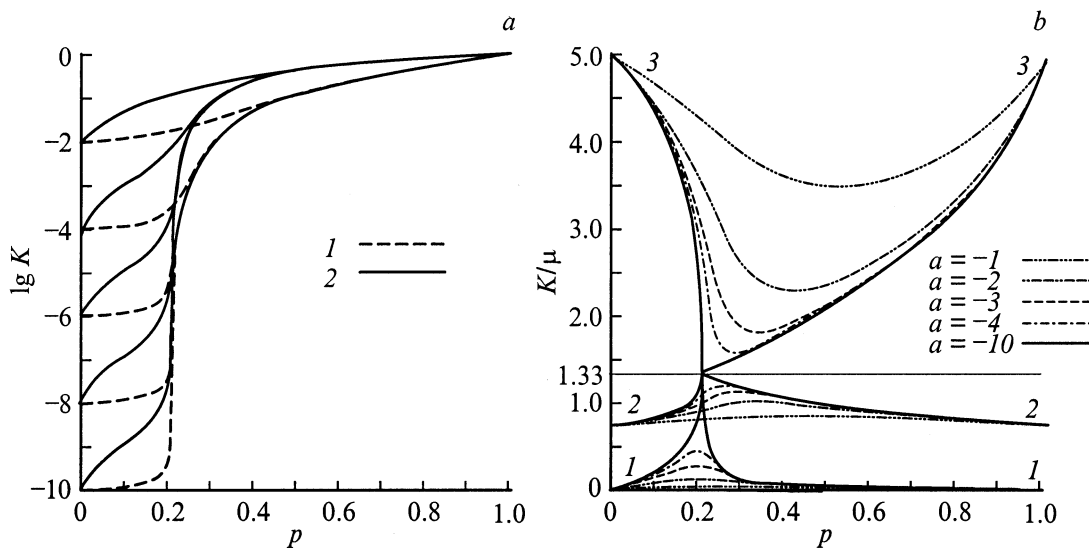


Рис. 6. Упругие свойства. (а) — зависимость логарифма модуля объемной упругости от p ($a = \lg(K_2/K_1)$): 1 — $K_1/\mu_1 = K_2/\mu_2 = 5$; 2 — $K_1/\mu_1 = K_2/\mu_2 = 0.025$. б — отношение модуля объемной упругости к модулю сдвига K/μ : 1 — $K_1/\mu_1 = K_2/\mu_2 = 0.025$; 2 — $K_1/\mu_1 = K_2/\mu_2 = 0.75$. 3 — $K_1/\mu_1 = K_2/\mu_2 = 5$.

На рис. 6, а представлены зависимости логарифма модуля объемной упругости K от объемной концентрации "жесткого" компонента p . На основе этих расчетов был определен индекс τ для упругой области

$$K \sim (p - p_c)^\tau, \quad p > p_c \quad (14)$$

и индекс s для высокоэластичной области

$$k \sim (p_c - p)^s, \quad p < p_c. \quad (15)$$

Зависимость логарифмической производной

$$\tau = \lim_{p \rightarrow p_c + 0} \frac{\Delta(\lg K)}{\Delta(\lg(p - p_c))} \quad (16)$$

от соотношения модулей объемной упругости фаз $a = \lg(K_2/K_1)$ показана на рис. 7.

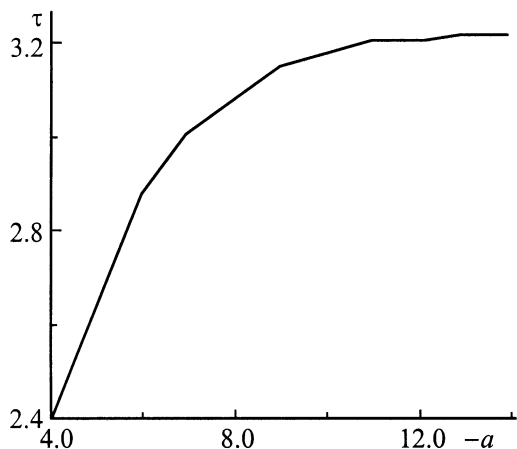


Рис. 7. Критический индекс модуля объемной упругости при $p > p_c$ ($a = \lg(K_2/K_1)$).

Критический индекс τ , который определяется сингулярным поведением модуля объемной упругости K вблизи критической точки $p_c + 0$, по данным наших численных расчетов равен 3.25 ± 0.05 (рис. 7), что несколько меньше значений, приведенных в [23] ($\tau = 3.55$) и [28] ($3.64 < \tau < 3.85$), и совпадает с данными работы [22] ($\tau = 3.26$).

Расчеты для высокоэластичной области ($p < p_c$) показали, что критический индекс s зависит от упругих свойств фаз и изменяется от $s = 0.52 \pm 0.02$ при $K_1/\mu_1 = K_2/\mu_2 = 5$ до $s = 0.75 \pm 0.05$ при $K_1/\mu_1 = K_2/\mu_2 = 0.025$.

В окрестности порога протекания отношение объемного модуля упругости к модулю сдвига K/μ стремится к постоянному числу (рис. 6, б). Было получено, что $\frac{K}{\mu} \cong 1.33$. Этот результат согласуется с [23,27], где было обосновано равенство $\frac{K}{\mu} = \frac{4}{d}$, при $p \rightarrow p_c$.

На рис. 8 показаны результаты расчетов зависимости эффективного коэффициента Пуассона от объемной концентрации "жесткой" фазы при различных значениях $a = \lg(K_2/K_1)$. Расчеты проводились при значениях коэффициентов Пуассона фаз, которые охватывают широкий спектр возможных их значений от -0.9 до 0.4 (рис. 8, 9). Из расчетов следует, что в пороге протекания коэффициент Пуассона равен $\nu = 0.2$, когда $K_2/K_1 \rightarrow 0$. При этом функция коэффициента Пуассона от объемного содержания фаз неоднородной среды (рис. 8, 9) немонотонна и при любых упругих свойствах фаз проходит через точку $(p_c, 0.2)$, т.е. в окрестности порога протекания эффективный коэффициент Пуассона положителен даже при отрицательных значениях коэффициента Пуассона локальных областей (фаз) неоднородной среды. Изменение знака коэффициента Пуассона происходит вдали от порога p_c : если $\nu_1 < 0$, а $K_1 \gg K_2$, то ν меняет знак при концентрации "жесткой" фазы $p > p_c$; если

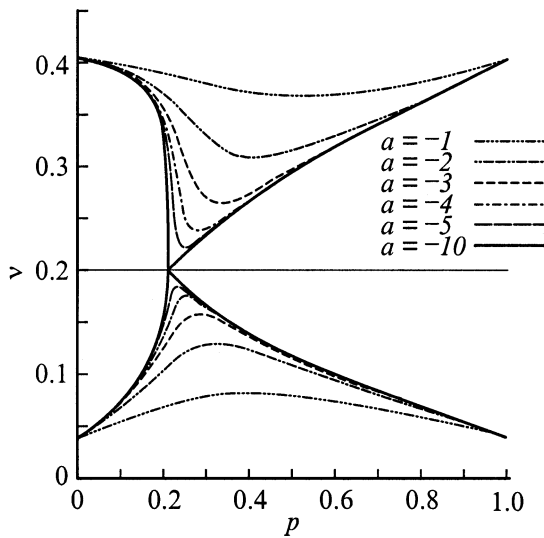


Рис. 8. Зависимость эффективного коэффициента Пуассона от объемной концентрации "жесткого" компонента p при различных соотношениях упругих модулей фаз $a = \lg(K_2/K_1)$.

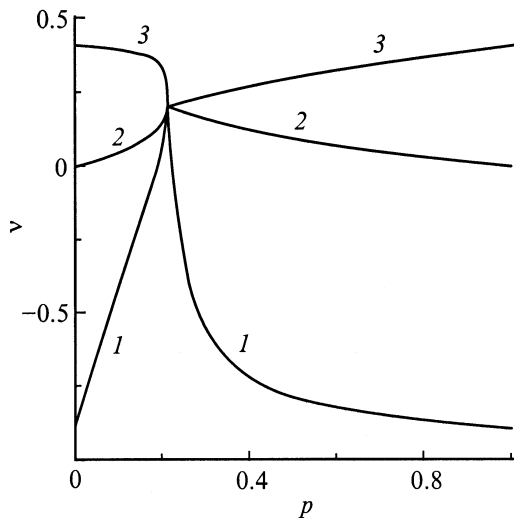


Рис. 9. Зависимость коэффициента Пуассона от объемной концентрации "жесткого" компонента p . 1 — $\nu_1 = \nu_2 = -0.9$; 2 — $\nu_1 = \nu_2 = 0$; 3 — $\nu_1 = \nu_2 = 0.4$.

$\nu_1 < 0$, а $K_1 \ll K_2$, то ν меняет знак при $p < p_c$, т.е. в этом случае среда вначале оказывает сопротивление изменению формы и только при $p > p_c$ оказывает сопротивление изменению объема среды.

В дополнение к вышеизложенному попытаемся оценить зависимость коэффициента Пуассона от структуры материала, основываясь на работах [10,23].

Для объяснения зависимости коэффициента Пуассона от структуры в [23] была предложена зависимость

$$\mu/K = \frac{Z}{8}, \tag{17}$$

где Z — координационное число перколяционной решетки.

Если предположить, что коэффициент Пуассона для d -мерной изотропной неоднородной среды определяется в виде [10]

$$\nu = \frac{Kd - 2\mu}{d(d-1)K + 2\mu} = \frac{d - b}{d(d-1) + b}, \quad b = 2\mu/K, \tag{18}$$

то получим, что если $b > d$, то $\nu < 0$ ($\nu = -1$, если $b/d \rightarrow \infty$); если $b = d$, то $\nu = 0$; если $b < d$, то максимальное значение ν равно $\frac{1}{d-1}$ (при $b/d \rightarrow 0$).

При этом, если подставить (17) в (18), то можно записать

$$\nu = \frac{d - Z/4}{d(d-1) + Z/4}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что коэффициент Пуассона в пороге перколяции будет положителен ($\nu > 0$), если $Z < 4d$; равен нулю ($\nu = 0$), если $Z = 4d$; отрицателен ($\nu < 0$), если $Z > 4d$.

Таким образом, можно предположить, что подбирая структуру неоднородной среды (координационное число Z), можно получить материал с отрицательным коэффициентом Пуассона вдали от порога протекания.

Предлагаемый метод построения фрактальной модели структуры хаотической среды и поэтапный (итерационный) метод определения упругих свойств достаточно хорошо согласуются с численным моделированием упругих свойств перколяционных систем и могут быть использованы при прогнозировании упругих свойств как перколяционных систем, так и материалов с конечным различием свойств фаз их составляющих.

Определен критический индекс модуля объемной упругости K в упругой области: $\tau = 3.25 \pm 0.05$. Выявлена зависимость показателя s от упругих свойств фаз среды в высокоэластичной области.

Показано, что если $p \rightarrow p_c$, то $K/\mu \rightarrow 1.33$, а коэффициент Пуассона перколяционной системы вблизи порога p_c не зависит от свойств исходных фаз неоднородной среды и в пороге перколяции равен 0.2. Зависимость эффективного коэффициента Пуассона ν от объемной концентрации "жесткого" компонента p неоднородной среды с хаотической структурой является немонотонной.

Показано, что перколяционная система может иметь отрицательный коэффициент Пуассона, если решетка имеет координационное число $Z > 4d$.

Работа выполнена при поддержке гранта KBN 8T11F 010 08p04 Польского комитета научных исследований и грантов Министерства науки Украины Ф4/1644-97 по направлению 4/4.526 и № 2/1502-97 по направлению 05.06/03218.

Список литературы

- [1] Л.Д. Ландау, Е.Н. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1987). 246 с.
- [2] R.F. Almgren. J. of Elasticity **15**, 427 (1985).
- [3] А.Г. Колпаков. ПМТФ **49**, 969 (1985).

- [4] D.J. Bergman. Phys. Rev. **B33**, 3, 2013 (1986); D.J. Bergman, E. Duering. Phys. Rev. **B34**, 11, 8199 (1986); E. Duering, D.J. Bergman. Phys. Rev. **37**, 16, 9460 (1988).
- [5] R. Lakes. Science **235**, 1038 (1987).
- [6] K.W. Wojciechowski. Mol. Phys. **61**, 1247 (1987); K.W. Wojciechowski. Phys. Lett. **A137**, 61 (1989); K.W. Wojciechowski, A.C. Brańka. Phys. Rev. **A40**, 7222 (1989).
- [7] B.D. Caddock, K.E. Evans. J. Phys. **D22**, 1877 (1989); K.E. Evans, B.D. Caddock. J. Phys. **D22**, 1883 (1989).
- [8] R. Lakes. Advanced Materials **5**, 293 (1993); see also references therein.
- [9] D.H. Boal, U. Seifert, J.C. Schillcock. Phys. Rev. **E48**, 4274 (1993).
- [10] K.W. Wojciechowski. Mol. Phys. Reports **10**, 129 (1995).
- [11] E.O. Martz, R.S. Lakes, J.B. Park. Cellular Polymers **15**, 349 (1996).
- [12] D. Prall, R. Lakes. Int. J. of Mechanical Science **39**, 305 (1997).
- [13] U.D. Larsen, O. Sigmund, S. Bouwstra. J. Macromech. Systems **6**, 99 (1997).
- [14] P.S. Theocaris, G.E. Stavroulakis, P.D. Panagiotopoulos. Archive of Applied Mechanics **67**, 274 (1997).
- [15] G.Y. Wei, S.F. Edwards. Physica **A258**, 5 (1998).
- [16] В.В. Новиков, В.П. Белов. ЖЭТФ **106**, 3(9), 780 (1994).
- [17] V.V. Novikov, O.P. Poznansky, V.P. Privalko. Sci. and Engineering of Composite Materials **4**, 49 (1995).
- [18] В.В. Новиков, О.П. Познанский. ФТТ **37**, 830 (1995).
- [19] В.В. Новиков. ТВТ **34**, 698 (1996).
- [20] В.В. Новиков. ФММ **4**, 27 (1997).
- [21] S. Feng, P.N. Sen. Phys. Rev. Lett. **52**, 216 (1984).
- [22] S. Feng, M. Sahimi. Phys. Rev. **B31**, 1671 (1985).
- [23] Y. Kantor, I. Webman. Phys. Rev. Lett. **52**, 1981 (1984).
- [24] D.J. Bergman, Y. Kantor. Phys. Rev. Lett. **53**, 511 (1984).
- [25] S. Arbabi, M. Sahimi. Phys. Rev. **B38**, 7173 (1988).
- [26] H.J. Herrmann, H.E. Stanley. J. Phys. **A21**, 1829 (1988).
- [27] S. Arbabi, M. Sahimi. Phys. Rev. **B47**, 695 (1993).
- [28] M. Sahimi, S. Arbabi. Phys. Rev. **B47**, 703 (1993).
- [29] П. де Жен. Идеи скейлинга в физике полимеров. Мир, М. (1979). 368 с.
- [30] H.E. Stanley. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. University Press. Oxford (1971).
- [31] A. Coniglio, H.E. Stanley. Phys. Rev. Lett. **52**, 1068 (1984).
- [32] D. Stauffer, A. Aharony. Introduction to Percolation Theory. Taylor & Francis, London (1992).
- [33] P.J. Reynolds, H.E. Stanley, W. Klein. Phys. Rev. **B21**, 1223 (1980).
- [34] B.B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco (1982).
- [35] D.A.S. Weitz, M. Oliveira. Phys. Rev. Lett. **52**, 1433 (1984).
- [36] V.P. Privalko, V.V. Novikov. The Science of Heterogeneous Polymers: Structure and Thermophysical Properties. J. Wiley, Chichester (1995). 235 p.
- [37] L. Pietronero, E. Tosatti. Fractals in Physics. North-Holland, Amsterdam (1986). 670 p.
- [38] K.G. Wilson, J.B. Kogut. Phys. Rep. **9**, 75 (1974).
- [39] J. Bernasconi. Phys. Rev. **B18**, 2185 (1978).
- [40] Z. Hashin, S.A. Shtrikman. Mech. Phys. Solids **11**, 127 (1963).
- [41] Z. Hashin. J. Appl. Mech. **50**, 481 (1983).