

## Квантовые волны в благородных металлах

© С.Н. Савельева, В.Г. Скобов, А.С. Чернов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 18 ноября 1998 г.)

Теоретически изучено влияние квантования энергии дырок в постоянном магнитном поле на проникновение СВЧ-волн через пластину благородного металла. Показано, что квантование приводит к сильным осцилляциям циклотронного поглощения. При этом в интервалах между пиками поглощения затухание настолько уменьшается, что становится возможным распространение своеобразных квантовых волн. Возбуждение таких волн в пластине металла приводит к резким осцилляциям ее поверхностного сопротивления как функции магнитного поля. Форма этих осцилляций весьма своеобразна.

Известно, что при наличии постоянного магнитного поля в металлах с неравными концентрациями электронов и дырок могут распространяться геликоны — электромагнитные волны с квадратичным спектром. Область их существования имеет порог со стороны слабых магнитных полей. Ниже порога существует бесстолкновительное циклотронное поглощение, которое делает распространение волн невозможным. Так обстоит дело при малых амплитудах радиочастотного поля. Магнитное поле волны большой амплитуды "захватывает" носители, ответственные за циклотронное поглощение, что приводит к его существенному уменьшению [1]. Это подавление циклотронного затухания может быть настолько сильным, что в области магнитных полей, намного меньших порогового поля геликона, диссипативная часть нелокальной проводимости оказывается малой по сравнению с недиссипативной частью. В результате в металлах с неравными концентрациями электронов и дырок становится возможным распространение нелинейных волн, частоты которых пропорциональны четвертой степени волнового вектора [2].

Помимо захвата носителей магнитным полем волны возможен и другой механизм подавления бесстолкновительного поглощения в металлах. Таким механизмом является квантование электронных состояний в магнитном поле. В самом деле, циклотронное поглощение волн обусловлено носителями с определенным значением компоненты импульса вдоль постоянного магнитного поля  $p_z = p_{z0}$ , среднее смещение которых за циклотронный период равно длине радиочастотной волны в металле. С другой стороны, квантование поперечной энергии носителей в постоянном магнитном поле  $H$  приводит к тому, что на поверхности Ферми их продольный импульс имеет определенные дискретные значения  $p_n$ , зависящие от величины  $H$ . Если одно из  $p_n$  совпадает с  $p_{z0}$ , то на поверхности Ферми имеются носители, которые эффективно поглощают энергию волн, и циклотронное поглощение значительно превосходит то, которое имеет место в отсутствие квантования. Если же значение  $p_{z0}$  попадает посередине между двумя соседними  $p_n$ , то на поверхности Ферми нет носителей, удовлетворяющих условию циклотронного поглощения, и поглощение оказывается намного меньше, чем в классическом случае

(эта ситуация аналогична той, которая имеет место в случае гигантских осцилляций поглощения ультразвука в металлах [3]). В результате оказывается, что величина поглощения как функция  $H$  представляет собой совокупность узких и высоких квантовых пиков, разделенных широкими и глубокими минимумами. Весьма важно, что в этих минимумах поглощение сильно подавлено по сравнению с его классическим значением. Поэтому в соответствующих интервалах значений  $H$  диссипативная часть нелокальной проводимости может оказаться малой по сравнению с недиссипативной частью. В этом случае в металле будут существовать квантовые волны со спектром, похожим на спектр волн в нелинейном режиме. Теории таких волн в металлах с неравными концентрациями электронов и дырок и посвящена настоящая работа. В разделе 1 будет построена теория для простейшего случая щелочных металлов, имеющих сферическую поверхность Ферми, а в разделе 2 — для случая благородных металлов, в которых условия для существования квантовых волн оказываются намного более благоприятными.

### 1. Волны в щелочном металле

1.1. Классический случай. Рассмотрим распространение волны в щелочном металле со сферической поверхностью Ферми в случае  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{k} \parallel z$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор. В этом случае фурье-образ нелокальной проводимости в отсутствие квантовых эффектов определяется выражением (см., например, [4])

$$\sigma_{\pm}(k, \omega, H) = \frac{4\pi e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon_F} \times \int \frac{(\varepsilon - p_z^2/2m)dp_z}{\nu - i(\omega \pm \omega_c - kv_z(p_z))}, \quad (1)$$

где  $\omega$  — угловая частота волны,  $-e$  — заряд электрона,  $m$  — масса,  $v_z = \partial\varepsilon/\partial p_z$  — составляющая скорости вдоль оси  $z$ ,  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми,  $\omega_c = eH/mc$  — циклотронная частота,  $c$  — скорость света,  $f(\varepsilon) = [\exp((\varepsilon - \varepsilon_F)/k_0T) + 1]^{-1}$  — функция

Ферми,  $T$  — температура,  $k_0$  — постоянная Больцмана,  $\nu$  — частота столкновений электронов с рассеивателями, индексы  $\pm$  относятся к правой и левой круговым поляризациям волнового поля.

Выражение (1) имеет простой физический смысл. Действительно, в случае однородного статического электрического поля и в отсутствие магнитного поля выражение в круглых скобках в знаменателе подынтегральной функции обращается в нуль и (1) сводится к статической проводимости  $\sigma_0 = n_e e^2 / m \nu$ , где  $n_e$  — концентрация электронов. В случае однородного высокочастотного поля, когда  $\omega \gg \nu$ , а  $k = 0$  и  $H = 0$ , проводимость становится не зависящей от  $\nu$ ,  $\sigma = n_e e^2 / m(-i\omega)$ , ток запаздывает по фазе на  $\pi/2$  относительно электрического поля и джоулевы потери отсутствуют. В случае монохроматической волны с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  электрон, движущийся вдоль оси  $z$  со скоростью  $v_z$ , вследствие эффекта Доплера испытывает действие электрического поля с частотой  $\omega' = \omega - kv_z$ . Наконец, при наличии постоянного магнитного поля  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{k}$  частота поля, которое действует на электрон, увеличивается на  $\omega_c$ , если это поле вращается навстречу электрону (поляризация плюс), и уменьшается на  $\omega_c$ , если поле вращается в ту же сторону, что и электрон (поляризация минус).

Если заменить  $df(\varepsilon)/d\varepsilon$  на  $-\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ , то интегрирование по  $p_z$  и по  $\varepsilon$  в (1) дает

$$\sigma_{\pm}(q) \equiv \sigma_{xx} \pm \sigma_{yx} = \frac{ne^2}{m[\nu - i(\omega \pm \omega_c)]} F_{\pm}(q), \quad (2)$$

$$F_{\pm}(q) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1 - q^2}{2q^3} \ln \frac{1 + q}{1 - q} \right), \quad (3)$$

где  $q = kv_F / (\mp \omega_c - \omega - i\nu)$ ,  $v_F = (2\varepsilon_F / m)^{1/2}$  — скорость Ферми. Выражения (2)–(3) являются обобщением формулы Рейтера и Зондхеймера [5], которые рассматривали случай  $H = 0$ . Нас будет интересовать случай, когда  $\omega_c \gg \omega$ ,  $\nu$  и величина  $q = kv_F / \omega_c$  есть отношение смещения электронов в опорной точке ферми-сферы за циклотронный период к длине электромагнитной волны.

Дисперсионное уравнение волны

$$k^2 c^2 = 4\pi i \omega \sigma_{\pm} \quad (4)$$

можно представить в форме

$$q^2 = \mp \frac{2}{3} \xi F_{\pm}(q), \quad \xi = \frac{6\pi \omega n m^2 v_F^2 c}{e H^3}. \quad (5)$$

В области сильных магнитных полей, где  $\xi < 1$ , корни уравнения (5) меньше единицы. При этом логарифм в (3) и, следовательно, корень дисперсионного уравнения для поляризации минус являются вещественными. Это и есть геликонный корень, который существует в области полей  $H > H_L$ , где  $H_L$  — значение поля, соответствующее условию  $\xi = 1$ . В области  $H < H_L$  величина  $q^2 > 1$  и логарифм в (3) имеет мнимую часть, равную  $-i\pi \operatorname{sgn} q$ ,

которая описывает циклотронное поглощение. В области слабых полей, где  $\xi \gg 1$ , величина  $q^2 \gg 1$  и функция

$$F_{-}(q) \simeq \frac{3\pi i}{4|q|} + \frac{3}{q^2}. \quad (6)$$

Мнимая часть (6) превосходит вещественную часть, и в области  $\xi \gg 1$  имеет место аномальный скин-эффект. Такова ситуация в классическом случае.

1.2. Квантовый случай. В случае сильных магнитных полей и низких температур, когда  $\hbar\omega_c \gg k_0 T$ , следует учитывать квантование поперечного движения электронов: энергия этого движения принимает дискретные значения  $\hbar\omega_c(n + 1/2)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Выражение для проводимости  $\sigma_{\pm}$  в квантовом случае можно получить из (1), если  $\varepsilon$  заменить на  $\varepsilon_{np_z} = \hbar\omega_c(n + 1/2) + p_z^2/2m$ , а интегрирование по  $\varepsilon$  — на суммирование по  $n$  с одновременным умножением на  $\hbar\omega_c$ . В результате такой замены формула для вещественной части проводимости  $\sigma'_{\pm} \equiv \operatorname{Re}\sigma_{\pm}$  принимает вид

$$\sigma'_{\pm} = \frac{4\pi e^2 (\hbar\omega_c)^2}{(2\pi\hbar)^3} \times \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{df(\varepsilon_{np_z})}{d\varepsilon_F} \frac{\nu(n + 1/2)}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_c - kv_z)^2}. \quad (7)$$

Формула (7) получена в предположении, что  $\hbar\omega \ll k_0 T$ . В противном случае необходимо еще сделать замену

$$\frac{df(\varepsilon_{np_z})}{d\varepsilon_F} \rightarrow \frac{1}{\hbar\omega} [f(\varepsilon_{np_z}) - f(\varepsilon_{np_z} + \hbar\omega)].$$

Выражая производную от функции Ферми через гиперболический косинус и вводя обозначения

$$\Phi(p_z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{df(\varepsilon_{np_z})}{d\varepsilon_F} = \frac{1}{4k_0 T} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2} \right) \times \cosh^{-2} \left[ \frac{\varepsilon_F - \hbar\omega_c(n + 1/2) - p_z^2/2m}{2k_0 T} \right], \quad (8)$$

$$D(p_z) = \frac{\nu/\pi}{\nu^2 + (\omega_c - kv_z)^2}, \quad (9)$$

представим выражение для  $\sigma'$  в форме

$$\sigma' = \frac{e^2 \omega_c^2}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p_z) D(p_z) dp_z. \quad (10)$$

Функция  $\Phi(p_z)$  представляет собой совокупность узких и высоких пиков, находящихся при значениях

$$p_z = p_n \equiv [2m(\varepsilon_F - \hbar\omega_c(n + 1/2))]^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_F, \quad (11)$$

где  $n_F$  — наибольшее значение  $n$ , при котором подкоренное выражение в (11) положительно.

Расстояние между соседними пиками

$$\Delta_n \equiv p_n - p_{n+1} \simeq m\hbar\omega_c/p_n. \quad (12)$$

Функция  $D(p_z)$  имеет максимум при

$$p_z = p_c \equiv \frac{m\omega_c}{k} = \frac{p_F}{q} \quad (13)$$

с шириной

$$\Delta p = p_c\nu/\omega_c \ll p_c. \quad (14)$$

Величина  $p_c$  представляет продольную составляющую импульса электронов, которые обуславливают циклотронное поглощение в классических условиях. Произведение  $\Phi(p_z)D(p_z)$  и, следовательно, нелокальная проводимость  $\sigma'$ , связанная с циклотронным поглощением, весьма чувствительны к соотношению между  $\Delta p$  и расстоянием между ближайшими к  $p_c$  значениями  $p_n$ . Наиболее интересен случай, когда ширина максимума  $D$ -функции  $\Delta p$  много меньше  $\Delta_n$  (расстояния между соседними максимумами функции  $\Phi$ ). С учетом (12) и (14) это условие сводится к неравенству

$$\eta \equiv \frac{\nu\varepsilon_F}{\hbar\omega_c^2} \ll q^2. \quad (15)$$

Если последнее удовлетворяется, то величина циклотронного поглощения, определяемая интегралом (10), очень сильно зависит от перекрытия функций  $\Phi$  и  $D$ , т.е. от расстояния между  $p_c$  и ближайшим к нему значением  $p_n$ . Если  $p_c$  совпадает с одним из  $p_n$ , то величина  $\sigma'$  является максимальной. Если же  $p_c$  попадает посередине между значениями  $p_n$  и  $p_{n+1}$ , то  $\sigma'$  оказывается минимальным. Значения  $p_n$  зависят от  $H$ . Поэтому при изменении  $H$  значения продольного импульса электронов, соответствующие различным уровням Ландау на ферми-сфере, смещаются вдоль оси  $p_z$  и поочередно проходят через значение  $p_c$ . В результате график  $\sigma'$  как функции  $H$  представляет собой последовательность узких и высоких квантовых пиков, разделенных широкими и глубокими минимумами. Эта квантовая структура циклотронного поглощения подобна гигантским квантовым осцилляциям поглощения ультразвука [3]. Нас интересует ситуация, когда квантование приводит к подавлению циклотронного поглощения. Поэтому не будем обсуждать высоту и ширину квантовых максимумов  $\sigma'$ , а рассмотрим минимумы. При этом рассмотрим случай предельно низких температур, когда выполняются неравенства

$$k_0T \ll \hbar\omega_c\eta/q^2 \ll \hbar\omega_c, \quad (16)$$

и форма квантовых осцилляций  $\sigma'$  определяется рассеянием электронов. Пусть значение  $H$  таково, что  $p_c$  попадает посередине между  $p_N$  и  $p_{N+1}$ , т.е.  $p_c = (p_N + p_{N+1})/2$ . Тогда в сумме (8) достаточно сохранить лишь члены с  $n = N$  и  $n = N + 1$ , а функцию  $D(p_z)$  в (10) заменить ее значениями в точках  $p_z = p_N$  и  $p_z = p_{N+1}$ , равными  $4\nu m^2/\pi k^2 \Delta_N^2 \simeq 16\eta^2/\pi\nu q^4$ . В результате получаем

$$\sigma'_{\min} = \frac{2\eta}{q^2}\sigma_a, \quad (17)$$

где

$$\sigma_a = \frac{3\pi n_e e c}{4H|q|} = \frac{3\pi n_e e^2}{4m\nu_F|k|}, \quad (18)$$

$\sigma_a$  — проводимость, определяющая аномальный скин-эффект. Поскольку мы рассматриваем случай (15), то величина проводимости в минимумах квантовых осцилляций действительно оказывается много меньше ее классического значения. Таким образом, квантование может сильно подавлять бесстолкновительное поглощение волны в металле. Квантование в принципе влияет и на мнимую часть проводимости  $\sigma'' = \text{Im} \sigma$ . Однако, как показывает анализ, квантовые девиации  $\sigma''$  являются заметными лишь в непосредственной окрестности квантовых пиков поглощения и практически отсутствуют в минимумах поглощения. Другими словами, значения функции  $F_-(q)$  в минимумах поглощения даются выражением

$$F_{\min}^{(-)}(q) = \frac{3}{q^2} + i\frac{3\pi\eta}{2|q|^3}. \quad (19)$$

В области значений  $\omega$  и  $H$ , в которой  $\xi \gg 1$ , корни дисперсионного уравнения (5) велики:  $q^2 \gg 1$ . Поэтому в случае  $\xi \gg 1$  и  $\eta < 1$  решение дисперсионного уравнения для поляризации минус можно приближенно записать в виде

$$q_- \equiv q' + iq'' = (2\xi)^{1/4} + i\frac{\pi\eta}{8}. \quad (20)$$

Видно, что в рассматриваемом случае  $q'' \ll q'$ , т.е. это решение соответствует распространяющейся моде. Таким образом, подавление циклотронного поглощения в минимумах гигантских осцилляций в принципе приводит к возможности распространения своеобразных квантовых волн. Эти волны существуют в области магнитных полей, много меньше порогового поля геликона, и их поле вращается в ту же сторону, что и поле геликона.

Обсудим теперь вопрос о возможности наблюдения квантовых волн в щелочном металле. Для кристалла Na с длиной пробега электронов 0.2 mm ( $\nu = 5 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$ ) в поле  $H = 200 \text{ kOe}$  параметр  $\eta \simeq 1$ . При частоте волны  $\omega/2\pi = 80 \text{ GHz}$  величина  $\xi \simeq 20$ . При этом вещественная часть волнового вектора  $k$  всего в 6 раз превосходит его мнимую часть, т.е. волна является затухающей. Таким образом, при реально достижимых значениях  $\nu$  и  $H$  щелочные металлы оказываются неподходящими для наблюдения квантовых волн.

## 2. Волны в благородных металлах

2.1. Классический предел. Благородные металлы являются намного более благоприятным объектом для наблюдения квантовых волн, чем щелочные металлы. Для этого имеются две причины. Прежде всего, длина свободного пробега носителей в них может быть на два порядка больше, чем в щелочных. Соответственно уменьшается и параметр  $\eta$ , определяемый соотношением (15). Кроме того, в силу особенностей поверхности

Ферми благородных металлов область циклотронного поглощения электронами в геометрии  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{k} \parallel [110]$  имеет порог не со стороны длинных волн, как обычно, а со стороны коротких волн [4]. Вследствие этого в бесстолкновительное затухание коротковолновых мод вносят вклад только дырки, концентрация которых почти на порядок меньше концентрации электронов. Это также приводит к уменьшению затухания и улучшает условия для наблюдения квантовых волн. Поэтому представляет интерес построение теории таких волн в благородных металлах.

Рассмотрим распространение волны в кристалле меди в геометрии  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{k} \parallel [110]$ . Электронная часть нелокальной проводимости в этом случае имеет вид [4]

$$\sigma_{\pm}^{(e)}(k, \omega, H) = i \frac{n_e e c}{H I_{\pm}} s(q), \quad (21)$$

$$s(q) = 1 - \frac{q^2}{\sqrt{q^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{q^2 - 1}}, \quad (22)$$

$$q = \frac{k c p_0}{e H I_{\pm}}, \quad I_{\pm} = \pm 1 + \frac{\omega + i\nu}{\omega_{ce}}, \quad (23)$$

где индекс "e" отмечает величины, относящиеся к электронам,  $p_0 = 0.6 \hbar \text{ \AA}^{-1}$  — параметр размерности импульса, определяющий минимальное смещение за циклотронный период  $u_e = 2\pi c p_0 / eH$ . Поскольку нас интересует случай  $\omega_{ce} \gg \omega, \nu$ , то в дальнейшем будем считать  $I_{\pm} = \pm 1$ .

В окрестности центрального сечения поверхности Ферми имеются дырочные орбиты типа "собачьей кости", концентрация которых  $n_h$  в 5 раз меньше  $n_e$ . Для описания дырок используем модель, в которой их закон дисперсии имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \left[ \frac{1}{4p^2} (p_x^2 + p_y^2 - p_a^2)^2 + p_z^2 \right], \quad (24)$$

где  $m$  — константа размерности массы, а  $p$  и  $p_a$  — константы размерности импульса. Площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью  $p_z = \text{const}$  в этой модели

$$S(\varepsilon, p_z) \equiv \pi(p_x^2 + p_y^2) = \pi(p_a^2 - 2p\sqrt{2m\varepsilon - p_z^2}). \quad (25)$$

Циклотронная масса дырок  $m_c$  и их смещение за циклотронный период даются формулами

$$m_c(\varepsilon, p_z) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right| = \frac{mp}{\sqrt{2m\varepsilon - p_z^2}}, \quad (26)$$

$$u_h(\varepsilon, p_z) = \frac{c}{eH} \frac{\partial S}{\partial p_z} = 2\pi \frac{cp}{eH} \frac{p_z}{\sqrt{2m\varepsilon - p_z^2}}. \quad (27)$$

Возьмем следующие значения параметров:

$$m = 10^{-28} g, \quad p = 1.0 \hbar \text{ \AA}^{-1}, \quad p_a = 0.9 \hbar \text{ \AA}^{-1}, \\ p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F} = 0.3 \hbar \text{ \AA}^{-1}. \quad (28)$$

Хотя форма дырочных орбит в меди существенно отличается от круговой, зависимость  $S$  и  $u_h$  от  $p_z$  в этой модели находится в хорошем соответствии с результатами расчета Пауэлла [6]. В частности, из (26) и (27) видно, что на краю слоя дырочных орбит ( $p_z \rightarrow \sqrt{2m\varepsilon}$ ) циклотронная масса и смещение стремятся к бесконечности. Поэтому есть все основания полагать, что нелокальная проводимость

$$\sigma_{\pm}^{(h)}(k, \omega, H) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon_F} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\varepsilon, p_z) dp_z}{m_c(\varepsilon, p_z) [\nu - i(\omega \mp \omega_c - kv_z)]} \quad (29)$$

будет правильно описывать циклотронное поглощение дырками. Если подставить (25) и (26) в (29) и заменить  $df(\varepsilon)/d\varepsilon_F$  на  $\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ , то вычисление  $\sigma_{\pm}^{(h)}$  не представляет затруднений. В дальнейшем нас будет интересовать предельный случай  $q^2 \gg 1$ , в котором диссипативная проводимость, связанная с циклотронным поглощением, может быть представлена в виде

$$\sigma_0(q) \equiv \operatorname{Re} \sigma_{\pm}^{(h)} = \frac{\pi}{2} \frac{p_a^2 - 2pp_F}{p_a^2 - \pi p p_F / 2} \frac{p_0}{p} \frac{n_h e c}{H|q|} = \alpha \frac{n_e e c}{H|q|}, \\ n_h = \frac{p_F(p_a^2 - \pi p p_F / 2)}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad \alpha \simeq 0.1. \quad (30)$$

В этой области электронная функция  $s(q)$ , даваемая (22), равна

$$s(q) \simeq -\frac{2}{3q^2}. \quad (31)$$

Пренебрегая вкладом дырок в недиссипативную часть проводимости, дисперсионное уравнение (4) для волны с поляризацией плюс можно записать в форме

$$q^2 = \left( \frac{1}{q^2} + i \frac{3\alpha}{2|q|} \right) \xi, \quad \xi = \frac{8\pi\omega n_e p_0^2 c}{3eH^3}. \quad (32)$$

Сравнение выражений (32) и (6) показывает, что отношение диссипативного члена к недиссипативному для меди в 5 раз меньше, чем для щелочного металла.

В области значений  $H$ , удовлетворяющих условиям

$$1 \ll \xi \ll \frac{1}{\alpha^4} = 10^4, \quad (33)$$

решение уравнения (32) имеет вид

$$q = \xi^{1/4} + i \frac{3}{8} \alpha \xi^{1/2}. \quad (34)$$

Хотя в области (33) величина  $q''$  и мала по сравнению с  $q'$ , она все же оказывается слишком большой, чтобы позволить проникновение этой моды через пластину меди: для толщины пластины  $d = 0.1 \text{ mm}$ ,  $\xi = 10$  и  $H = 20 \text{ kOe}$  произведение  $k''d = eHq''d/(p_0c)$  равно 5.5, т.е. сигнал ослабляется в 250 раз.

2.2. Квантовые волны в меди. Поскольку при  $q^2 > 1$  циклотронное поглощение электронами отсутствует, то нам предстоит рассмотреть влияние квантования только на дырочную часть нелокальной проводимости. Для этого воспользуемся правилом квазиклассического квантования, согласно которому площадь дырочных орбит может принимать только дискретные значения

$$S(\varepsilon, p_z) \equiv \pi(p_x^2 + p_y^2) = 2\pi \frac{\hbar e H}{c} n, \quad (35)$$

где  $n$  — целое число. Подставляя (35) в (24), получаем спектр собственных значений энергии дырок

$$\varepsilon_{np_z} = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\hbar e H}{c p} \right)^2 (N - n)^2 + p_z^2 \right], \quad N = \frac{c p_a^2}{2 \hbar e H}. \quad (36)$$

Отметим, что в данной модели поперечная энергия дырок пропорциональна квадрату  $H$  и  $(N - n)^2$ , а не первой степени, как это имеет место для ферми-сферы.

Квантовое выражение для нелокальной дырочной проводимости можно получить из (29), если подставить в него (35), (36) и заменить интегрирование по  $\varepsilon$  суммированием по  $n$  и умножением на  $\hbar \omega_c$ . В результате получаем формулу

$$\sigma' = \frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} \left( \frac{eH}{c} \right)^2 \times \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{df(\varepsilon_{np_z})}{d\varepsilon_F} \frac{n\nu}{m_c^2 [\nu^2 + (\omega_c - kp_z/m)^2]}, \quad (37)$$

которая отличается от (7) спектром собственных значений энергии (36) и тем обстоятельством, что входящая в (37) циклотронная масса  $m_c$  существенно зависит от  $p_z$ .

При анализе подынтегрального выражения в (37) удобно ввести функции  $\Phi$  и  $D$ , аналогичные функциям (8) и (9). При этом пики функции  $\Phi$  находятся при значениях

$$p_z = p_n \equiv \left[ p_F^2 - \left( \frac{\hbar e H}{pc} \right)^2 (N - n)^2 \right]^{1/2}, \quad (38)$$

а максимум  $D(p_z)$  — при значении  $p_z = p_c$ , которое является решением уравнения  $kp_z/m = eH/cm_c(\varepsilon_F, p_z)$  и имеет вид

$$p_c = \frac{p_F}{\sqrt{1 + (qp/p_0)^2}}. \quad (39)$$

Видно, что  $p_c < p_F$  при любых  $q$ , т.е. циклотронное поглощение дырками существует при любых длинах волн. Ширина максимума функции  $D$  есть

$$\Delta p = \frac{p_0}{q} \frac{\nu mc}{eH}. \quad (40)$$

Расстояние между соседними пиками  $\Phi(p_z)$

$$\Delta_n \equiv p_{n+1} - p_n = \left( \frac{\hbar e H}{pc} \right)^2 \frac{N - n}{p_n}, \quad (41)$$

при  $p_n = p_c$

$$\Delta_c = q \frac{\hbar e H}{p_0 c}, \quad (42)$$

а соответствующее значение квантового числа  $n$  есть

$$n_c = \left[ \frac{c}{\hbar e H} \left( \frac{p_a^2}{2} - \frac{q}{\sqrt{1 + (qp/p_0)^2}} \frac{p_F p^2}{p_0} \right) \right], \quad (43)$$

где квадратные скобки означают целую часть числа. Расстояние между квантовыми уровнями, близкими к резонансному сечению дырок, равно

$$\begin{aligned} \hbar \omega_{c0} &= \varepsilon_{n_c} - \varepsilon_{n_c+1} \simeq \frac{1}{m} \left( \frac{\hbar e H}{pc} \right)^2 (N - n_c) \\ &= \frac{\hbar e H}{mc} \frac{p_F}{p_0} \frac{q}{\sqrt{1 + (qp/p_0)^2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

При  $q^2 \gg 1$  величина  $\hbar \omega_{c0} = \hbar e H p_F / (m c p_0)$ , т.е. циклотронная масса этих дырок  $m_c = m p / p_F$ .

Длина свободного пробега носителей в благородных металлах может быть на 2 порядка больше, чем в щелочных. Поэтому в отличие от щелочных металлов для меди актуальна ситуация, когда первое из неравенств (16) заменяется на обратное и удовлетворяются условия

$$\left( \frac{p_0}{qp} \right)^2 \frac{\varepsilon_F \nu}{\hbar \omega_{c0}^2} \ll \frac{k_0 T}{\hbar \omega_{c0}} \ll 1. \quad (45)$$

Первое из этих неравенств означает, что ширина максимума функции  $D(p_z)$  меньше ширины пиков функции  $\Phi(p_z)$ . Это обстоятельство является существенным при вычислении циклотронного поглощения в области максимумов, соответствующих совпадению максимума  $D$  с последовательными максимумами функции  $\Phi$ . Нас не интересуют окрестности этих максимумов поглощения, поскольку в соответствующих интервалах магнитного поля квантовые волны не могут распространяться. Наоборот, нас будут интересовать окрестности минимумов поглощения, в которых затухание волн существенно меньше, чем в классическом случае. Поскольку вдали от пиков функция  $\Phi$  убывает экспоненциально, то в этих интервалах магнитного поля производную функции Ферми можно аппроксимировать дельта-функцией

$$df(\varepsilon_{np_z})/d\varepsilon_F \rightarrow \delta(\varepsilon_{np_z} - \varepsilon_F). \quad (46)$$

Для справедливости такой замены достаточно второго неравенства (45). Произведя в (37) замену (46) и вычисляя интеграл по  $p_z$ , представим  $\sigma'$  в форме

$$\sigma' = \sigma_0(q) Q(q, H), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} Q(q, H) &= \frac{\hbar \nu q^2 p_c}{2\pi \varepsilon_F n_c} \\ &\times \sum_n \frac{n}{p_n} \left[ \left( \frac{\nu}{\omega_c} \right)^2 + \left( 1 - q \frac{p p_n}{p_0 \sqrt{p_F^2 - p_n^2}} \right)^2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\sigma_0$ ,  $p_c$  и  $n_c$  определяются соотношениями (30), (39) и (43) соответственно. При получении (48) предполагалось, что  $q^2 \gg 1$ . Функция  $Q$  характеризует отличие

квантовой проводимости, связанной с циклотронным поглощением, от ее асимптотического вида в пределе аномального скин-эффекта при  $H \rightarrow 0$ .

Разность, стоящая в круглых скобках в (48), имеет минимум при  $n = n_c$  и быстро возрастает при увеличении  $|n - n_c|$ . Множитель же  $n/p_n$  в области  $n \sim n_c$  является плавной функцией  $n$ . Поэтому его приближенно можно заменить на  $n_c/p_c$ , и  $Q$  принимает вид

$$Q \simeq \frac{\hbar\nu q^2}{2\pi\varepsilon_F} \sum_n \left[ \left( \frac{\nu}{\omega_c} \right)^2 + \left( 1 - q \frac{pp_n}{p_0 \sqrt{p_F^2 - p_n^2}} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (49)$$

Минимумы  $Q$  находятся при значениях  $H$ , при которых максимум функции  $D$  попадает строго посередине между двумя последовательными пиками функции  $\Phi$ , т.е. при которых  $p_c = (p_n + p_{n+1})/2$ . При этом разность в круглых скобках в (49) равна  $qp\Delta_c/(2pp_F)$ , а суммирование по  $n$  приводит к умножению на  $\pi^2/4$ . В результате получаем

$$Q_{\min} = \frac{2\pi}{q^2} \left( \frac{p_0}{p} \right)^2 \frac{\varepsilon_F \nu}{\hbar \omega_{c0}^2}. \quad (50)$$

Видно, что при  $\omega_{c0}^2 \gg \nu\varepsilon_F/\hbar$  эта величина является малой, т.е. циклотронное поглощение сильно подавляется.

Таким образом, квантование поперечной энергии дырок приводит к тому, что мнимое слагаемое в правой части (32) умножается на функцию  $Q(q, H)$ . Поскольку в рассматриваемых нами интервалах значений  $H$  мнимое слагаемое в дисперсионном уравнении мало по сравнению с вещественным, то это уравнение можно решить, заменив  $q$  в мнимом слагаемом на  $q' = \xi^{1/4}$ , являющееся корнем дисперсионного уравнения при  $Q = 0$ . В результате находим

$$q_1 \simeq \xi^{1/4} \left[ 1 + \frac{3i}{2} \alpha \xi^{1/4} Q(\xi^{1/4}, H) \right], \quad q_2 \simeq i\xi^{1/4}. \quad (51)$$

Корень  $q_2$  относится к затухающей компоненте поля, а корень  $q_1$  — к квантовой волне, спектр которой можно записать в форме

$$\omega = \frac{3p_0^2 c^3}{8\pi n_e e^3 H} k^4. \quad (52)$$

Перейдем теперь к рассмотрению поверхностного импеданса пластины меди с нормалью, параллельной оси [110], при антисимметричном по электрическому полю возбуждению. Формула для импеданса пластины в случае, когда отражение носителей от поверхности образца является диффузным, а поле в нем представляет суперпозицию двух экспоненциальных компонент, приведена в [4] (формула (3.11)). В рассматриваемом нами случае  $\xi \gg 1$  эта формула переходит в выражение

$$Z \simeq \frac{4\pi\omega}{c^2} \left( \frac{1}{k'_1} \frac{1 - \exp(ik_1 d)}{1 + \exp(ik_1 d)} + \frac{1}{k'_2} \right), \quad (53)$$

где

$$k_1 \equiv k'_1 + ik'_2 = \frac{eH}{cp_0} q_1(H), \quad k_2 = ik'_1, \quad (54)$$

$d$  — толщина пластины. Первое слагаемое в (53) обусловлено возбуждением стоячей квантовой волны в пластине, а второе — возбуждением затухающей компоненты.

Приведем результаты расчета для параметров модели (28), частоты  $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu = 4 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$  (длина пробега носителей 4 мм) и  $d = 0.1 \text{ mm}$ . Отметим, что циклотронная масса резонансных дырок примерно в 2.5 раза меньше массы свободного электрона. Поэтому при  $H = 20 \text{ kOe}$  и  $T = 1.4 \text{ K}$  отношение  $\hbar\omega_{c0}/k_0 T$  порядка десяти, т.е. при  $H > 20 \text{ kOe}$  и  $T = 1.4 \text{ K}$  условие квантования хорошо выполняется.

Квантовые осцилляции в меди в рассматриваемой геометрии имеют очень малый период по магнитному полю — порядка десяти эрстед. Их не изобразить на графике в широкой области магнитных полей: в интервале значений  $H$  величиной в 30 кОе число осцилляций составляет около двух тысяч. Поэтому приведем огибающую квантовых осцилляций в широкой области магнитных полей и фрагменты осциллирующей кривой  $R(H)$  в узких интервалах значений  $H$ . Кривая 1 на рис. 1 изображает зависимость поверхностного сопротивления пластины  $R_0(H)$  в классическом пределе. При значениях  $H$ , при которых циклотронное поглощение велико и волновое пространство отсутствует, значение поверхностного со-

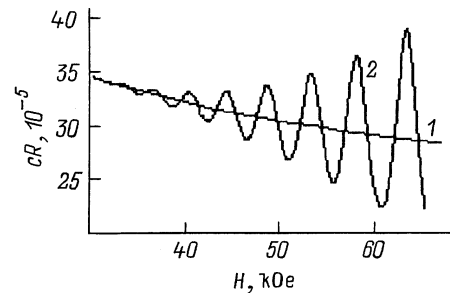


Рис. 1. Огибающие квантовых осцилляций поверхностного сопротивления пластины.

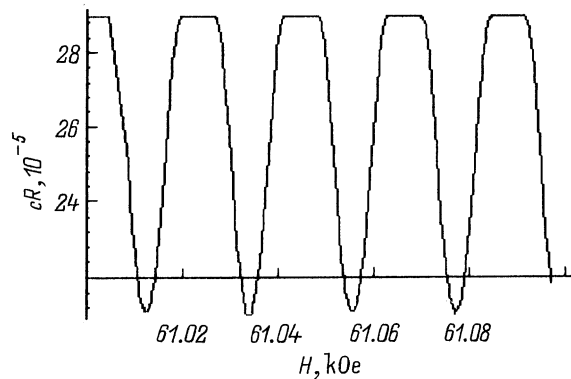
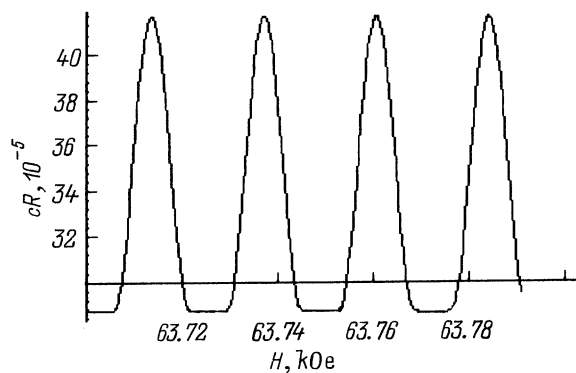
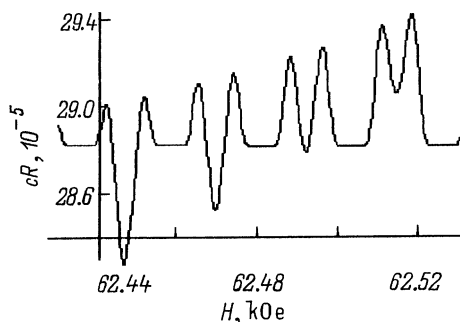


Рис. 2. Фрагмент графика  $R(H)$  в окрестности значения магнитного поля, при котором в пластине укладывается целое число длин волн.



**Рис. 3.** Фрагмент графика  $R(H)$  в окрестности значения магнитного поля, при котором в пластине укладывается нечетное число полувольт.



**Рис. 4.** Фрагмент графика  $R(H)$  в окрестности значения магнитного поля, при котором амплитуда осцилляций минимальна.

противления пластины  $R = \text{Re } Z$  совпадает с  $R_0$ . При значениях же  $H$ , соответствующих квантовым минимумам поглощения, волновое поле проникает сквозь пластину, что приводит к существенному отличию  $R$  от  $R_0$ . Кривая 2 на рис. 1 получена в предположении, что величина циклотронного поглощения при всех  $H$  является той же, что и в минимумах. Осцилляции кривой 2 обусловлены изменением фазы волнового поля  $k'_1 d$ : из (53) следует, что минимумы соответствуют значениям  $H$ , при которых  $k'_1(H)d = 2\pi s$ , где  $s$  — целое число, а максимумы — значениям  $H$ , при которых  $k'_1(H)d = \pi(2s + 1)$ . При увеличении затухания, происходящем при изменении  $H$ , график  $R$  резко переходит от кривой 2 к кривой 1. При уменьшении затухания и приближении его к минимуму график  $R$ , наоборот, переходит от кривой 1 к кривой 2. На рис. 2–4 представлены фрагменты истинной кривой  $R(H)$  в узких интервалах магнитного поля. Рис. 2 соответствует окрестности одного из минимумов кривой 2 рис. 1 (на толщине пластины укладывается четное число полувольт), а рис. 3 — окрестности одного из максимумов (на толщине пластины укладывается нечетное число полувольт). Рис. 4 соответствует окрестности значения  $H$ , при котором кривые 1 и 2 на рис. 1 пересекаются. На нем видно, как происходит переход от осцилляций с минимумами к осцилляциям с максимумами. Амплитуда

осцилляций на рис. 4 во много раз меньше, чем на рис. 2 и 3, и они имеют более сложную структуру.

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Рассмотренная модель поверхности Ферми хорошо описывает изменение  $S(p_z)$  в благородных металлах в геометрии  $\mathbf{H} \parallel [110]$ . Однако, помимо электронных и дырочных орбит, в этой геометрии имеется еще узкий слой открытых орбит, наличие которых не учитывалось. Носители с открытыми орбитами не вносят вклада в циклотронное поглощение, но обуславливают бесстолкновительное поглощение типа затухания Ландау. Квантование практически не влияет на величину этого поглощения. Поэтому в минимумах квантовых осцилляций циклотронного поглощения затухание волны  $k'_1$  может оказаться существенно больше, чем в отсутствие открытых орбит. Чтобы избавиться от этого осложнения, вектор  $\mathbf{H}$  следует направить не строго вдоль оси  $[110]$ , а отклонить его на несколько градусов. Поскольку слой открытых орбит является очень узким, то при углах наклона  $\mathbf{H}$  к оси  $[110]$ , больших  $2^\circ$ , открытые орбиты отсутствуют. При этом поведение площади сечения поверхности Ферми  $S(p_z)$  практически не меняется, рассмотренная модель соответствует реальной ситуации в благородных металлах, и все полученные результаты остаются справедливыми.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-18393).

## Список литературы

- [1] И.Ф. Волошин, Г.А. Вугальтер, В.Я. Демиковский и др. *ЖЭТФ* **72**, 1503 (1977).
- [2] В.Г. Скобов, А.С. Чернов. *ЖЭТФ* **109**, 3, 992 (1996).
- [3] В.Л. Гуревич, В.Г. Скобов, Ю.А. Фирсов. *ЖЭТФ* **40**, 3, 786 (1961).
- [4] A.S. Chernov, V.G. Skobov. *Phys. Rep.* **244**, 1, 1 (1994).
- [5] G.E. Reuter, E.H. Sondheimer. *Proc. Roy. Soc.* **A195**, 336 (1946).
- [6] B. Perrin, G. Weisbuch, A. Libchaber. *Phys. Rev.* **B1**, 1501 (1970).