Физика твердого тела, 1999, том 41, вып. 4

Солитоны в двумерных и трехмерных кристаллах при ферми-резонансе оптических колебаний

© О.А. Дубовский, А.В. Орлов

Физико-энергетический институт,
249020 Обнинск, Калужская обл., Россия

(Поступила в Редакцию 20 июля 1998 г.)

Показано, что в двумерных и трехмерных кристаллических системах типа сверхрешеток при ферми-резонансе колебаний граничащих кристаллов существуют солитонные возбуждения пикового, кратерного и темнового типов, найденные авторами ранее только в одномерных кристаллах. Приведено аналитическое решение для центральной части огибающих солитонов. Численный расчет дал совпадающие с аналитическим решением результаты в центральной части солитонов и показал наличие отсутствующих у одномерных кристаллов пульсаций огибающих на крыльях пиковых и кратерных солитонов в двумерных и трехмерных кристаллах.

В настоящее время ведутся экспериментальные и теоретические исследования нелинейных оптических колебаний в органических сверхрешетках с программируемым чередованием монослоев органических молекул, разрабатываются новые технологии изготовления многослойных сверхрешеток для нелинейных оптических устройств, которые в преспективе могут быть использованы для создания оптического компьютера [1–3]. В [4–6] обращено внимание на важную роль ферми-резонанса (ФР) оптических колебаний в контактирующих кристаллических плоскостях, при котором энергия $\hbar\omega_C$ экситона в одной из плоскостей близка к суммарной энергии $2\hbar\omega_B$ двух экситонов в соседней плоскости. В [6–9] было показано, что в таких системах, типа сверхрешеток, вдоль интерфейса могут распространяться специфические смешанные $BB+C$ экситонные возбуждения (FRIM, Fermi Resonance Interface Modes) [6], эти квантовые и классические FRIM определяют бистабильность [7] и, возможно, генерирование нелинейных солитонных возбуждений — многочастичных комплексов из FRIM состояний [8–10]. При этом в [8–10] в предположении гладкости огибающих солитонов, дающем возможность использования соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, для модельных одномерных кристаллических систем были получены солитонные решения с гладкими монотонными огибающими типа известного гиперболического косинуса. В работах авторов [11,12] при исследовании солитонных возбуждений FRIM типа в одномерных замкнутых кристаллических цепочках с возрастающей длиной было показано, что солитонные возбуждения того типа, который был найден ранее в [8–10] при решении соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, являются отдельным элементом целого класса солитонных возбуждений, имеющих различные виды симметричных [11] и антисимметричных [12] огибающих. При этом в [11,12] было показано, что в отличие от [8–10] несущая частота солитона не является фиксированной величиной, а может с определенным порогом варьироваться при соответствующем изменении огибающей. Результаты работ [11,12] были использованы в последнее время в [13,14] уже при более глубоком исследовании солитонов различных типов, найденных в [11,12], с использованием соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. В связи с усиливающимся интересом к найденным в [11,12] солитонным возбуждениям представляется необходимым теперь уже более детальное изучение этих возбуждений в реальных, экспериментально исследуемых кристаллических системах — на двумерных интерфейсах, в плоских сверхрешетках [10], в трехмерных кристаллах с ферми-резонансом мономеров [15] и т.д. Отметим, что ФР может также оказывать существенное влияние на спектры оптических и акустических многофононных колебаний в легких металлах типа бериллия [16].

В настоящей работе исследуются нелинейные возбуждения FRIM типа в реальных двумерных ($2D$) и трехмерных ($3D$) кристаллических системах. Рассматриваются, во-первых, $2D$-системы двух контактирующих в сверхрешетке монослоев из молекул типа B и C при ФР оптических возбуждений в этих молекулах, или аналогичный по топологии монослой из органических молекул, в каждой из которых существует ФР внутримолекулярных оптических колебаний, и, во-вторых, $3D$-кристаллы из таких же органических молекул. При дальнейшем развитии результатов работ [11,12], полученных для $1D$-кристаллов, будет показано, что в $2D$ и $3D$ кристаллических системах также существует несколько типов солитонных возбуждений с принципиально различной формой огибающих. Солитоны так называемого "пикового" (peak, (p)) типа имеют максимум огибающей в центре и последующее уменьшение огибающей до нуля при удалении к крыльям солитона. Солитоны "кратерного" (crater, (c)) типа имеют в центре относительный минимум, затем максимум на ближайших узлах решетки и уменьшение огибающей до нуля при удалении от центра солитона. "Темновые" (dark, (d)) солитоны имеют абсолютный минимум в центре солитона и асимптотическое возрастание с осцилляциями при приближении на крыльях к конечному асимптотическому пределу. При этом на крыльях солитонов p и c типов для $2D$ и $3D$, в отличие от солитонов, найденных в [11,12] для $1D$-систем, может наблюдаться тонкая структура. Отметим, что дополнительно исследовалась зависимость огибающих от несущей частоты колебаний и расстройки ФР. Расчеты показали, что при приближении несущей частоты к полосе одночастичных возбуждений и при уменьшении расстройки ФР происходит уменьшение амплитуды и уширение солитонов, и возможно макроскопическое описание с использованием соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, что может быть актуально в связи с появлением в этом направлении ряда новых работ [13,14] и подготовкой интересных экспериментов.

Гамильтониан H кристаллической системы, состоящей из двух контактирующих двумерных монослоев молекул B- и C-типа или трехмерного кристалла из мономеров — молекул с ФР внутримолекулярных колебаний — имеет вид

$$H = H_C + H_B + H_{\text{int}}, \tag{1}$$

где H_C, H_B — гамильтонианы свободных экситонов C- и B-типа

$$H_C = \sum_{\mathbf{n}} \hbar\omega_C c_{\mathbf{n}}^+ c_{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{nm}} V_{\mathbf{nm}}^{(c)} c_{\mathbf{n}}^+ c_{\mathbf{m}},$$

$$H_B = \sum_{\mathbf{n}} \hbar\omega_B b_{\mathbf{n}}^+ b_{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{nm}} V_{\mathbf{nm}}^{(b)} b_{\mathbf{n}}^+ b_{\mathbf{m}}. \tag{2}$$

В (2) $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ для $2D$ и $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ для $3D$-систем; b^+, c^+, b, c — Бозе-операторы рождения, уничтожения экситонов, $V_{\mathbf{nm}}^{(c,b)}$ — матричные элементы операторов межмолекулярного взаимодейстия, определяющие трансляционное движение c и b экситонов. Гамильтониан H_{int} ангармонического $C + BB$ взаимодействия 3-го порядка в (1), определяющий эффект ФР, имеет вид

$$H_{\text{int}} = \Gamma \sum_{\mathbf{n}} \left[\left(b_{\mathbf{n}}^+\right)^2 c_{\mathbf{n}} + c_{\mathbf{n}}^+ \left(b_{\mathbf{n}}\right)^2 \right], \tag{3}$$

где Γ — константа этого взаимодействия. Детальное обсуждение такого вида гамильтониана H_{int} приводится в [6].

Уравнения Гейзенберга для операторов $b_{\mathbf{n}}, c_{\mathbf{n}}$

$$i\hbar \frac{db_{\mathbf{n}}}{dt} = -\left[H, b_{\mathbf{n}}\right], \qquad i\hbar \frac{dc_{\mathbf{n}}}{dt} = -\left[H, c_{\mathbf{n}}\right] \tag{4}$$

при взаимодействии ближайших соседей с учетом (1)–(3) имеют следующий вид:

$$i\hbar \frac{db_{\mathbf{n}}}{dt} = \hbar\omega_B b_{\mathbf{n}} + V_B \sum_{\mathbf{l}} b_{\mathbf{n+l}} + 2\Gamma b_{\mathbf{n}}^+ c_{\mathbf{n}}, \tag{5a}$$

$$i\hbar \frac{dc_{\mathbf{n}}}{dt} = \hbar\omega_C c_{\mathbf{n}} + V_C \sum_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{n+l}} + \Gamma b_{\mathbf{n}}^2, \tag{5b}$$

$$V_{\mathbf{nm}}^{(b,c)} = V_{B,C}\delta_{\mathbf{n,m+l}}. \tag{5c}$$

Для описания нелинейных оптических возбуждений с большими числами заполнения при сильной лазерной накачке обычно используется квазиклассическое приближение, в рамках которого все операторы в (5) заменяются их средними значениями $\langle b_{\mathbf{n}}\rangle \equiv B_{\mathbf{n}}$, $\langle c_{\mathbf{n}}\rangle \equiv C_{\mathbf{n}}$, где $B_{\mathbf{n}}, C_{\mathbf{n}}$ — амплитуды колебаний [6–12]. Будем искать решения системы уравнений для $B_{\mathbf{n}}, C_{\mathbf{n}}$, соответствующей (5), с временной зависимостью $B_{\mathbf{n}} = B_{\mathbf{n}} \exp\left(-i(\omega/2)t\right)$, $C_{\mathbf{n}} = C_{\mathbf{n}} \exp(-i\omega t)$ при действительных амплитудах $B_{\mathbf{n}}, C_{\mathbf{n}}, \omega$ — несущая частота. При такой временной зависимости система уравнений для $B_{\mathbf{n}}, C_{\mathbf{n}}$ имеет вид

$$\frac{\hbar\omega}{2} B_{\mathbf{n}} = \hbar\omega_B B_{\mathbf{n}} + V_B \sum_{\mathbf{l}} B_{\mathbf{n+l}} + 2\Gamma B_{\mathbf{n}} C_{\mathbf{n}}, \tag{6a}$$

$$\hbar\omega\, C_{\mathbf{n}} = \hbar\omega_C C_{\mathbf{n}} + V_C \sum_{\mathbf{l}} C_{\mathbf{n+l}} + \Gamma B_{\mathbf{n}}^2. \tag{6b}$$

Нетрудно видеть, что решения системы уравнений (6) $B_{\mathbf{n}}, C_{\mathbf{n}}$ зависит от параметра Γ и $\hbar$ как от масштабных множителей, и поэтому естественно ввести имеющие размерность частоты величины $b_{\mathbf{n}} = (\Gamma/\hbar)B_{\mathbf{n}}$, $c_{\mathbf{n}} = (\Gamma/\hbar)C_{\mathbf{n}}$. Для этих величин система соответствующих (6) уравнений имеет вид

$$\frac{\omega}{2} b_{\mathbf{n}} = \omega_B b_{\mathbf{n}} + \frac{V_B}{\hbar} \sum_{\mathbf{l}} b_{\mathbf{n+l}} + 2b_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}, \tag{7a}$$

$$\omega c_{\mathbf{n}} = \omega_C c_{\mathbf{n}} + \frac{V_C}{\hbar} \sum_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{n+l}} + b_{\mathbf{n}}^2. \tag{7b}$$

В [8–10] для одномерной системы аналитически было найдено солитонное решение системы уравнений (5) с огибающей известного вида — обратного гиперболического косинуса. При этом были найдены солитоны локализованного типа — "стоячие" солитоны — с нулевой скоростью перемещения максимума солитона $v = 0$ и бегущие солитоны с $v \neq 0$. Как следствие априорно предполагаемой гладкости огибающих и пропорциональности B и C амплитуд несущие частоты и скорости солитонов оказывались фиксированными величинами, определяемыми параметрами, входящими в (1)–(3). Далее будет показано, что в рассматриваемых двумерных и трехмерных кристаллах могут распространяться несколько солитонов различного типа. При этом в первую очередь рассматривались локализованные, "стоячие" солитоны.

На первом этапе исследовались азимутально и сферически симметричные солитонные решения. Соответственно последовательно рассматривались квадратные и кубические кластеры с выделенным центральным узлом и возрастающими нечетными полными числами узлов $N = N_2$ и $N = N_3$ соответственно для $2D$- и $3D$-систем. Для $2D$-систем — $N_2 = 5, 9, 13, 21, \ldots$, для $3D$-систем — $N_3 = 7, 19, 27, \ldots$, в соответствии с алгоритмом создания ближайших к центральному узлу окружностей и сфер с последовательно возрастающими радиусами. При этом радиальная зависимость амплитуд фиксируется одним индексом r по степени удаленности от центрального узла. Для $2D$-системы в дальнейшем в соответствии с этим принципом использовалась нумерация $b_0 \equiv b_{0,0}$; $b_1 \equiv b_{0,\pm 1} \equiv b_{\pm 1,0}$; $b_2 \equiv b_{\pm 1,\pm 1}$; $b_3 \equiv b_{\pm 2,0} \equiv b_{0,\pm 2}$; $b_4 \equiv b_{\pm 2,\pm 1} \equiv b_{\pm 1,\pm 2}$. Для $3D$-системы использовалась нумерация $b_0 \equiv b_{0,0,0}$, $b_1 \equiv b_{\pm 1,0,0} \equiv b_{0,\pm 1,0} \equiv b_{0,0,\pm 1}$, $b_2 \equiv b_{0,\pm 1,\pm 1} \equiv b_{\pm 1,0,\pm 1} \equiv b_{\pm 1,\pm 1,0}$ и т.д. При этом соответствующие радиус-векторы этих узлов равны для $2D$-системы $r_0 = 0$, $r_1 = a$, $r_2 = \sqrt{2}a$, $r_3 = 2a\ldots$, для $3D$-системы — $r_0 = 0$, $r_1 = a$, $r_2 = \sqrt{2}a$, $r_3 = \sqrt{3}a$ и т.д., где a — постоянная решетки. Величины r_i могут рассматриваться как радиусы соответствующих координационных окружностей ($2D$) или сфер ($3D$).

Для выделения основных аналитических особенностей огибающих солитонных возбуждений рассмотрим $2D$-систему с наименьшим возможным числом узлов $N_2 = 5$. При этом уравнения (7) для b_n, c_n амплитуд имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right) b_0 - 4\,\frac{V_B}{\hbar}\, b_1 = 2b_0c_0, \quad (\omega - \omega_C)c_0 - 4\,\frac{V_C}{\hbar}\, c_1 = b_0^2, \tag{8a}$$

$$\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right) b_1 - \frac{V_B}{\hbar}\, b_0 = 2b_1c_1, \quad (\omega - \omega_C)c_1 - \frac{V_C}{\hbar}\, c_0 = b_1^2. \tag{8b}$$

Эта система уравнений имеет точные аналитические решения. Будем для упрощения анализа полагать $V_A \equiv V_B \equiv \hbar V$. Выражая из первых уравнений ($8a$), ($8b$) $c = c(b)$ как функции b, после подстановки во вторые уравнения ($8a$), ($8b$) получаем два нелинейных связанных уравнения для b_0 и b_1

$$2b_0^2 = (\omega - \omega_C)\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right) - V(\omega - \omega_C)\frac{4}{x} - 4V\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right) + 4V^2 x, \tag{9a}$$

$$2b_1^2 = (\omega - \omega_C)\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right) - V(\omega - \omega_C)x - 4V\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right) + 4V^2\frac{1}{x}, \tag{9b}$$

где $x \equiv b_0/b_1$ — отношение амплитуд. Для величины x после деления ($9a$) на ($9b$) получаем уравнение 4-й степени

$$V(\omega - \omega_C)x^4 - (\omega - \omega_C - 4V)\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right)x^3 + (\omega - \omega_C - 4V)\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right)x - 4V(\omega - \omega_C) = 0. \tag{10}$$

Это уравнение имеет точные аналитические решения $x = x_i(\omega)$ со сложной зависимостью $x_i(\omega)$. Однако для солитонных решений с сильной локализацией возбуждений можно найти аппроксимирующие решения. Для пиковых солитонов с $x \gg 1$ в уравнении необходимо учесть только первые два члена. В результате для $x = x_p$ получаем следующее выражение:

$$x_p = \frac{(\omega - \omega_C - 4V)\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right)}{V(\omega - \omega_C)} > 1. \tag{11}$$

Для темнового солитона $x \ll 1$, в уравнении необходимо учесть только последние два члена и, соответственно, для $x = x_d$ получаем

$$x_d = \frac{4V(\omega - \omega_C)}{(\omega - \omega_C - 4V)\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right)} < 1. \tag{12}$$

Наконец для солитонов кратерного типа с $x \approx 1$ необходимо учитывать все члены, но можно произвести разложение по малому отклонению δ величины x от единицы, $x = 1 + \delta$, $\delta \ll 1$. В результате получаем для $x = x_c$ следующее соотношение:

$$\delta = \frac{3V(\omega - \omega_C)}{4V(\omega - \omega_C) - 2(\omega - \omega_C - 4V)\left(\frac{\omega}{2} - \omega_B\right)} < 1,$$

$$x_c = 1 + \delta. \tag{13}$$

Неравенства в соотношениях (11)–(13) определяют области существования солитонов и соответствующие пороги. Величины b_0 и b_1 для солитонов всех трех типов получаются из соотношений (7) при использовании найденных при решении (9) значений x_p, x_d, x_c. Расчеты для $3D$-системы с минимальным числом узлов $N_3 = 7$ аналогичные (8)–(13) дают такие же соотношения для амплитуд с небольшими численными поправками. Как показали дальнейшие расчеты, при увеличении N происходит только наращивание крыльев этих солитонов с базовыми значениями b_0, b_1, полученными таким образом. Вместе с тем далее будет отмечено, что у крыльев солитонов в $2D$- и $3D$-системах появляется определенная, отсутствующая у $1D$-солитонов [11,12], немонотонность с замедлением спадания и локальными максимумами.

Аналитические расчеты огибающих солитонов для систем с $N_2 > 5$, $N_3 > 7$ являются достаточно сложной задачей, поэтому для таких систем на PC PENTIUM были проведены численные расчеты решений системы нелинейных уравнений для $b_{\mathbf{n}}$, полученных из (7) после подстановки в ($7b$) $c_{\mathbf{n}} = c_{\mathbf{n}}(b_{\{m\}})$ как функций $b_{\mathbf{n}}$ и ближайших $b_{\mathbf{m}}$. Сами уравнения здесь не приводятся из-за громоздкой нелинейной связи $c_{\mathbf{n}}$ с различными b_m. Расчеты велись параллельно для $1D$-, $2D$- и $3D$-систем. При этом в $1D$-системе, соответствующей одномерному кластеру, расчеты велись до 7-го узла, удаленного от центрального на расстояние $7a$, в $2D$-системе — до 8-й координационной окружности, в $3D$-системе — до 10-й координационной сферы. На рис. 1, 2, 3 для $1D$-системы для сравнения с $2D$- и $3D$-системами приведены только центральные части огибающих до $n = 4$. Различное число координационных сфер и окружностей было использовано для отслеживания пульсаций на крыльях солитонов при различных r.

На рис. 1, 2, 3 приведены результаты расчетов радиальной зависимости огибающих b_r для солитонов p — пикового типа (рис. 1), c — кратерного типа (рис. 2), и d — темнового типа (рис. 3). Отметим, что значения радиусов r для систем различной размерности отличаются: в $1D$-системе — $r = r_i = ia$, в

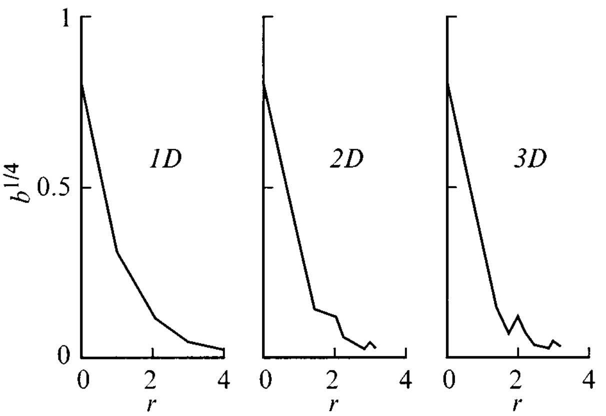

Рис. 1. Радиальная зависимость огибающих солитонов пикового типа в $1D$, $2D$, $3D$ кристаллических системах.

$2D$-системе — $r = r_{ij} = (i^2 + j^2)^{1/2}a$, в $3D$-системе — $r = r_{ijk} = (i^2 + j^2 + k^2)^{1/2}a$, где индексы i, j, k нумеруют узлы кристалла. Поскольку для некоторых из полученных зависимостей b_r значения функции при разных r, $0 \leqslant r \leqslant 7$, различаются на 5–10 порядков, для визуального восприятия результатов на рис. 1, 2, 3 представлена зависимость от r функции $(b_r)^{1/4}$, монотонно отображающей b_r с относительным увеличением малых значений функции и относительным уменьшением больших значений функции. Все частотные характеристики выражались в единицах ω_C. Значения параметров выбирались близкими к реальным оптическим параметрам $V_B/\hbar\omega_C = V_C/\hbar\omega_C = 0.01$, $\omega_B/\omega_C = 0.4$, использованным в [4,9–12]. В [11,12] отмечалось, что для несущей частоты в $1D$-системах существуют пороговые ω, при превышении которых появляются солитоны различного типа. Аналогичная ситуация наблюдается в $2D$- и $3D$-кристаллах. При используемых параметрах нижние пороговые значения несущей частоты $\omega = \omega_0$, при которых появляются d- и c-солитоны, равняются в $1D$-системе $\omega_0/\omega_C \cong 1.02$, в $2D$-системе — $\omega_0/\omega_C \cong 1.14$, в $3D$-системе — $\omega_0/\omega_C \cong 1.54$. Для одновременного графического представления $1D$-, $2D$- и $3D$-системы выбиралось значение параметра $\omega/\omega_C = 1.7$. На рис. 1 видно, что в отличие от $1D$ огибающие p-солитона для $2D$- и $3D$-систем имеют локальные максимумы и замедление спадания при определенных значениях r. Эти значения r отвечают точкам на кристаллографических осях $(i, 0)$, $(0, i)$, $i = 2, 3 \ldots$ в $2D$-системе. В $3D$-системе локальные максимумы наблюдаются в точках $(i, j, 0)$, $(i, 0, j)$, $(0, i, j)$, $i, j = 2, 3 \ldots$. Значения огибающих в точках $(i, 0)$, $(0, i)$ $2D$-системы $b_r = b_{i,0} = b_{0,i}$ и в точках $(i, 0, 0)$, $(0, i, 0)$, $(0, 0, i)$ $3D$-системы $b_r = b_{i00} = b_{0i0} = b_{00i}$ близки к значениям огибающей $b_r = b_i$ в $1D$-системе. Значения огибающей $b_r = b_{ij0} = b_{i0j} = b_{0ij}$ в $3D$-системе близки к значениям $b_r = b_{ij}$ в $2D$-системе. Последнее связано с чрезвычайно малым значением $V/\hbar\omega_C = 0.01$ для оптических систем, большим удалением ω от ω_C, большой расстройкой ферми-резонанса $\omega_C - 2\omega_B$, но при больших V, меньших удалениях ω от ω_C, меньших расстройках ФР эти значения различаются более существенно. Проведенные качественные аналитические расчеты показали, что отмеченные выше локальные максимумы и замедления спадания на огибающих связаны с тем обстоятельством, что, например, в $2D$-системе молекула с $r = 6$ взаимодействует с молекулой низшей координационной окружности $r = 3$ и соответственно ее амплитуда возрастает по сравнению с амплитудой молекулы $r = 5$, взаимодействующей с молекулой $r = 4$. Такие же ситуации наблюдаются и в других случаях, в $2D$- и $3D$-кристаллах.

На рис. 2, представляющем кривые огибающих c-солитона, видно, что при $r = 0$ значения амплитуд в центре для $1D$-, $2D$-, $3D$-систем находятся в отношении $b_0 > b_{00} > b_{000}$ (в прежней индексации). Начиная со следующей координационной окружности, или сферы, $r = 1$, т.е. на спадающем участке зависимостей b_r, поведение огибающих c-солитона имеет те же особенности, что и поведение огибающих p-солитона. При этом, однако, пульсации на крыльях солитонов имеют большие по сравнению с рис. 1 амплитуды.

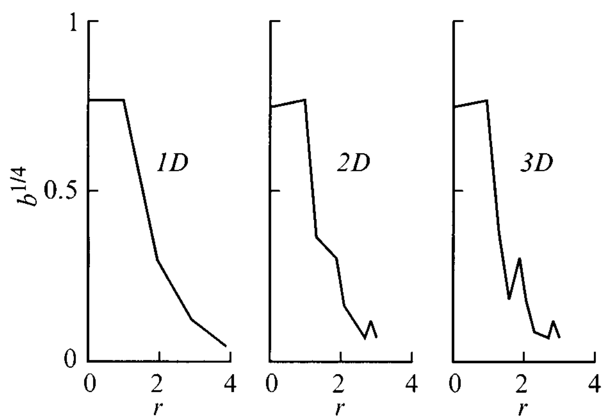

Рис. 2. Радиальная зависимость огибающих солитонов кратерного типа в $1D$, $2D$, $3D$ кристаллических системах.

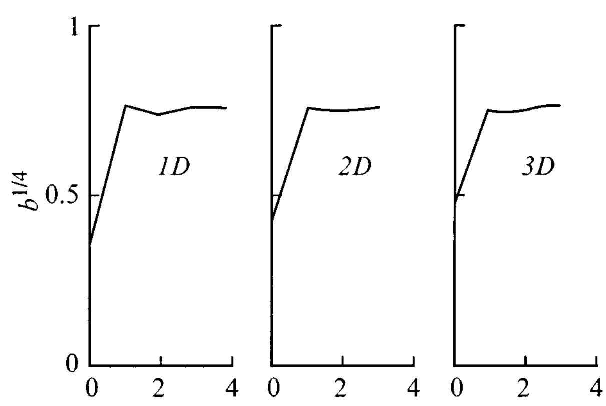

Рис. 3. Радиальная зависимость огибающих солитонов темного типа в $1D$, $2D$, $3D$ кристаллических системах.

На рис. 3, представляющем кривые огибающих d-солитона, видно, что для $r = 0$ величины $b_0 < b_{00} < b_{000}$, а для $r = 1$ величины огибающих находятся в противоположном соотношении $b_1 > b_{10} > b_{100}$. На участке зависимости $r > 1$ кривые огибающих d-солитона имеют минимум, а затем выходят асимптотически на постоянное конечное значение, и, таким образом, в $2D$- и $3D$-системах наблюдается та же закономерность, что и отмеченная в $1D$-системе в работе [11].

Отметим также, что полученные численные значения огибающих p-, c-, d-солитонов $2D$-системы в центральной точке и первой координационной окружности совпадают, с малой погрешностью, со значениями, полученными из аналитических соотношений (10)–(13), что служит одновременным подтверждением применимости как использованных численных программ, так и аналитических процедур соответствующих разложений.

Отметим, что представленные радиальные зависимости b_r дают только ориентирующее визуальное представление о действительном структурировании по кристаллографическим направлениям естественно более богатой пространственной зависимости амплитуд колебаний в $2D$ и $3D$ кристаллических решетках. Представляют интерес уже развивающиеся исследования азимутальной зависимости огибающих солитонов [13,14] и начинающиеся экспериментальные исследования в этой области. В статье основное внимание уделялось пиковым, кратерным и темновым солитонам. Необходимо, по-видимому, провести аналогичные исследования и для солитонов качественно других типов, впервые исследованных в работах авторов [11,12].

В заключение авторы выражают искреннюю признательность В.М. Аграновичу за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российской государственной научно-технической программы "Актуальные направления в физике конденсированных сред" по направлению "Нейтронные исследования вещества". (О.А.Д.) благодарит за частичную поддержку по гранту Фольксваген Фонда I/69928.

Список литературы

[1] F.F. So, S.R. Forrest, Y.Q. Shy, W.H. Steier. Appl. Phys. Lett. **56**, *7*, 674 (1990).
[2] F.F. So, S.R. Forrest. Phys. Rev. Lett. **66**, *20*, 2649 (1991).
[3] V.M. Agranovich. Mol. Liq. Cryst. **230**, *1*, 13 (1993).
[4] V.M. Agranovich, R.D. Atanasov, G.F. Bassani. Chem. Phys. Lett. **199**, *6*, 621 (1992).
[5] V.M. Agranovich. Physica Scripta **T49**, *5*, 699 (1993).
[6] V.M. Agranovich, O.A. Dubovsky. Chem. Phys. Lett. **210**, *4–6*, 458 (1993).
[7] V.M. Agranovich, J.B. Page. Phys. Lett. **A183**, *5/6*, 651 (1993).
[8] В.М. Агранович, А.М. Камчатнов. Письма в ЖЭТФ **59**, *6*, 397 (1994).
[9] V.M. Agranovich, O.A. Dubovsky, A.M. Kamchatnov. J. Phys. Chem. **98**, *51*, 13 607 (1994).
[10] V.M. Agranovich, S.A. Darmanyan, O.A. Dubovsky, A.M. Kamchatnov, E.I. Ogievetsky, P. Reineker, Th. Neidlinger. Phys. Rev. **B53**, *23*, 15 451 (1996).
[11] О.А. Дубовский, А.В. Орлов. ФТТ **38**, *4*, 1221 (1996).
[12] О.А. Дубовский, А.В. Орлов. ФТТ **38**, *6*, 1931 (1996).
[13] S. Darmanyan, A. Kobyakov, F. Lederer. Phys. Rev. **E57**, *2*, 957 (1998).
[14] V.M. Agranovich, S.A. Darmanyan, K.I. Grigorishin, A.M. Kamchatnov, Th. Neidlinger, P. Reineker. Phys. Rev. **B57**, *26*, 2461 (1998).
[15] В.М. Агранович, Й.Й. Лалов. УФН **146**, *2*, 267 (1985).
[16] О.А. Дубовский, А.В. Орлов. ФТТ **39**, *3*, 542 (1997).