

01;05.4;09

Численное моделирование ширины линии генерации в синхронных многоэлементных джозефсоновских структурах

© В.К. Корнев, А.В. Арзуманов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

Поступило в Редакцию 8 января 1998 г.

Разработана методика моделирования динамики систем с джозефсоновскими переходами с учетом тепловых флуктуаций на основе программного пакета PSCAN и последующего вычисления спектра джозефсоновской генерации с помощью авторегрессионного метода. Проведено исследование ширины линии синхронной джозефсоновской генерации в нескольких типах джозефсоновских структур.

Моделирование шумов

Численное моделирование динамики аналоговых и цифровых джозефсоновских устройств является одним из наиболее эффективных методов изучения таких нелинейных систем. При этом рассмотрение целого ряда задач, в том числе изучение ширины линии джозефсоновской генерации, требует моделирования процессов с учетом тепловых или квантовых флуктуаций. Одним из наиболее эффективных и известных пакетов программ для численного моделирования динамики систем с джозефсоновскими элементами является PSCAN [1], разработанный в лаборатории криоэлектроники физического факультета МГУ. Его высокая эффективность основана на переменном шаге интегрирования по времени системы дифференциальных уравнений. Для задания флуктуационных компонент тока через каждый джозефсоновский элемент при моделировании динамики джозефсоновских систем необходимо использовать датчик псевдослучайных чисел. Чтобы получить шумы с белым спектром путем обращения к датчику на каждом шаге интегрирования по времени пришлось бы зафиксировать шаг на минимальном значении, а это привело бы к существенному снижению эффективности

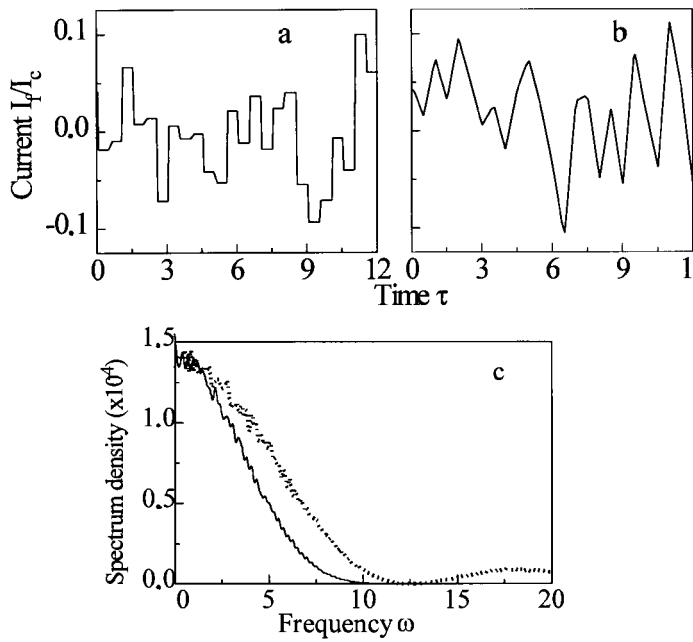


Рис. 1. Два типа шумовой компоненты тока (*a*) и (*b*) и их спектры (*c*). Пунктирной линией изображен спектр сигнала (*a*), сплошной линией — сигнала (*b*).

пакета PSCAN. Поэтому для моделирования флуктуаций мы использовали последовательность прямоугольных импульсов со случайной амплитудой и фиксированной длительностью, совпадающей с периодом следования T , который превышает максимальную величину переменного шага интегрирования ΔT_{\max} (рис. 1, *a*). В этом случае спектр шума, показанный на рис. 1, *c* пунктирной линией, приближенно описывается следующим выражением:

$$S(\Omega) = (2\pi)^{-1} \sigma^2 T \text{sinc}^2(\pi \Omega T / \Omega_c). \quad (1)$$

Задавая период T достаточно малым, можно получить квазибелый спектр шумов вплоть до частот Ω , превышающих характерную джоузефсоновскую частоту $\Omega_c = (2e/\hbar)V_c$, где $V_c = I_c R_N$ — характерное

напряжение джозефсоновского перехода. Спектральная плотность таких шумов на низких частотах $\Omega \approx 0$ определяется дисперсией σ^2 амплитуд импульсов:

$$S(0) \approx \sigma^2 T / (2\pi). \quad (2)$$

В дальнейшем шумовой сигнал был модифицирован путем замены последовательности прямоугольных импульсов на сигнал в виде непрерывной ломаной линии (рис. 1, *b*) с тем же периодом следования вершин, высота которых является случайной величиной. Такая форма шумового сигнала более предпочтительна с точки зрения методов численного моделирования процессов. Спектр шумового сигнала, рассчитанный численно для $\sigma^2 = 4 \cdot 10^{-4}$ и $T_c = 1.17$, что соответствует значению шумового фактора $\gamma \equiv \pi S(0) = 2.3 \cdot 10^{-4}$, показан на рис. 1, *c* сплошной линией. Здесь и в дальнейшем используются нормированное время $\tau = t\Omega_c$, нормированная частота $\omega = \Omega/\Omega_c$, нормированные ток $i = I/I_c$ и напряжение $v = V/V_c$. Максимальный шаг интегрирования по времени ΔT_{\max} не превышал 0.1.

Вычисление спектра генерации

Вычисление спектра по классическим методам требует, как известно, времени счета, пропорционального $K M_1 \log_2 M_1$, где M_1 — число отсчетов исследуемого сигнала с фиксированным шагом ΔT_{samp} внутри каждого интервала усреднения, а M_1 — число таких интервалов. При этом верхняя граничная частота вычисляемого спектра будет определяться шагом ΔT_{samp} , а спектральное разрешение зависит от полного числа отсчетов $M \sim K M_1$. Современные персональные компьютеры с динамической памятью 64 МБ позволяют обрабатывать до $M \sim 10^6$ отсчетов без использования постоянной памяти. Однако данное значение M слишком мало, чтобы обеспечить разрешение линии джозефсоновской генерации даже в случае одиночного джозефсоновского элемента (рис. 2, *a*), в то время как синхронные многоэлементные структуры из N джозефсоновских переходов могут демонстрировать сужение линии генерации, пропорциональное числу N или даже N^2 [2]. Дальнейшее же увеличение числа отсчетов M вызовет катастрофическое возрастание времени вычисления спектра, связанное с обращением к постоянной памяти.

В последние годы получили развитие так называемые авторегрессионные методы спектрального анализа [3], зарекомендовавшие себя как

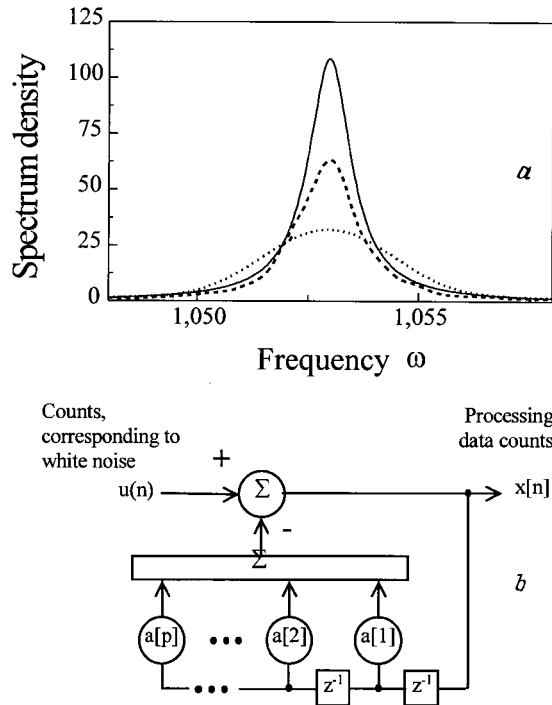


Рис. 2. *a* — спектр джозефсоновской генерации $2S_v(\omega)$ для одиночного джозефсоновского элемента (первая гармоника), где сплошной линией показана реальная спектральная линия генерации, вычисленная с помощью авторегрессионного метода, а штриховой и пунктирной линиями показаны результаты вычисления этой спектральной линии с помощью классического метода при использовании $M = 10^6$ отсчетов и $K = 256$ и $K = 128$ интервалов усреднения соответственно. Фактор шума $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$. *b* — авторегрессионный фильтр порядка P .

высоко эффективные при анализе многих типов спектров исследуемых процессов. Высокая эффективность таких методов применительно к джозефсоновским системам позволяет получить необходимое спектральное разрешение (как для одиночных джозефсоновских элементов, так и для многоэлементных синхронных структур) при использовании лишь $M \sim 10^5$ отсчетов. Основная идея этих методов сводится к определению

параметров линейного фильтра порядка P , который бы преобразовал белый шум в исследуемый сигнал (см. блок-схему на рис. 2, *b*). В этом случае совокупность параметров фильтра позволяет вычислить спектральную характеристику анализируемого сигнала, причем увеличение P ведет к повышению спектрального разрешения. Нами было установлено, что достоверное вычисление спектра джозефсоновской генерации одиночного джозефсоновского перехода имеет место в широком интервале значений P : от $P = 100$ до значения $P = 2000$, выше которого при $M = 10^5$ наблюдается "переразрешение" спектральной линии, связанное с появлением несуществующей тонкой структуры линии. Полное время вычисления спектральных характеристик джозефсоновских структур с помощью авторегрессионного метода сравнимо со временем вычисления их вольт-амперных характеристик с помощью пакета PSCAN.

Ширина линии генерации в многоэлементных синхронных структурах

Изложенные выше методы моделирования флуктуаций и вычисления спектров были использованы для предварительного анализа ширины линии джозефсоновской генерации в синхронных многоэлементных структурах (рис. 3), которые были исследованы ранее без учета влияния тепловых флуктуаций [4,5]. В частности, ранее было показано, что наиболее перспективной одномерной структурой из рассмотренных является цепочка "B" (рис. 3) туннельных джозефсоновских переходов с RL -цепью электродинамической связи нелокального характера. В такой структуре режим синхронной генерации сохраняется в широком диапазоне разбросов критических токов I_c джозефсоновских элементов, достигающем 50–60% при значениях параметра Маккамбера, характеризующего собственную емкость джозефсоновского элемента, $\beta \equiv (2e/\hbar)I_c R_N^2 C \approx 10$ и параметров цепи связи $l \equiv (2e/\hbar)I_c L \approx 0.5$, $r \equiv R/R_N \approx 0.7$ [5]. Расчеты показывают, что ширина линии синхронной генерации в такой цепочке из N джозефсоновских элементов уменьшается пропорционально N (рис. 4, *a* и табл. 1). В то же время для цепочки "A" (рис. 3) с RL -цепью электродинамической связи локального характера был получен совершенно неожиданный результат: сужение линии генерации с ростом числа N в такой структуре отсутствует (см. данные в табл. 2).

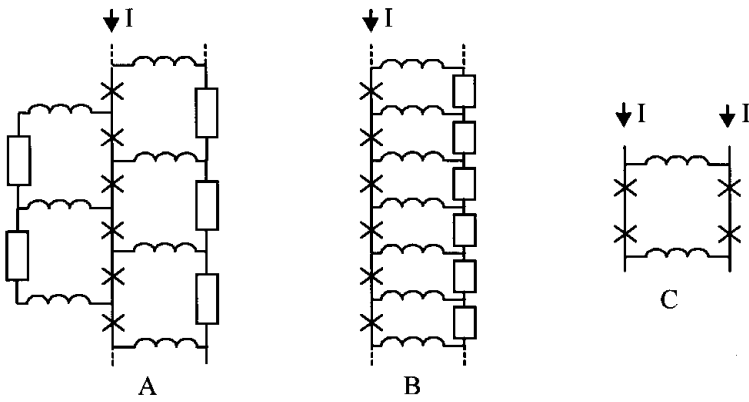


Рис. 3. Одномерные джозефсоновские цепочки "А" и "В" и элементарная ячейка "С" двумерной джозефсоновской структуры.

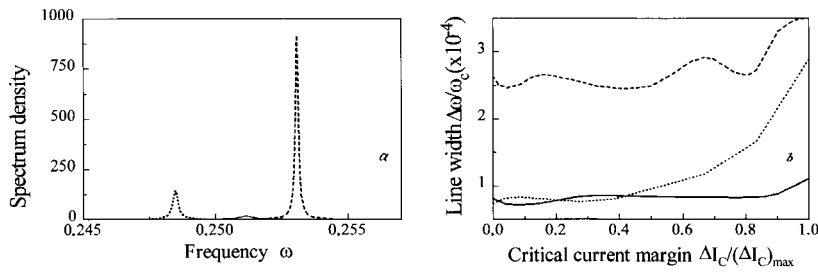


Рис. 4. *a* — спектральная линия (первая гармоника) синхронной джозефсоновской генерации в цепочке "В" из "N" джозефсоновских элементов. Сплошная линия соответствует $N = 1$, пунктирная линия — $N = 2$, штриховая линия — $N = 4$. В двух последних случаях критический ток одного из джозефсоновских элементов отличался от остальных на $\Delta I_c = 1\%$, фактор шума $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$. *b* — зависимость ширины спектральной линии синхронной джозефсоновской генерации в элементарной ячейке цепочки "В" (из двух элементов) от разности критических токов ΔI_c для двух значений частоты $\omega = 0.3$ (штриховая линия) и $\omega = 0.6$ (пунктирная линия), а также в элементарной ячейке "С" для $\omega = 0.9$ (сплошная линия).

Таблица 1. Ширина спектральной линии и амплитуда спектральной компоненты A_1 для цепочки "B" из N джозефсоновских элементов.

N	1	2	4
$\Delta\omega$	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
A_1	15	145	890

Таблица 2. Ширина спектральной линии и амплитуда спектральной компоненты A_1 для цепочки "A" из N джозефсоновских элементов.

N	3	4	5
$\Delta\omega$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$
A_1	7960	14550	19100

Таблица 3. Ширина спектральной линии и амплитуда спектральной компоненты A_1 для одиночного джозефсоновского элемента и четырех контактного интерферометра (ячейка "C") при снятии сигнала с одного из плеч интерферометра и с одного из джозефсоновских элементов этой ячейки.

	Одиночный	2	1
$\Delta\omega$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-5}$
A_1	105	6560	1690

Наконец, для показанного на рис. 3 четырехконтактного интерферометра (структура "C"), представляющего собой элементарную ячейку двумерной джозефсоновской структуры [5], было получено сужение линии генерации в 16 раз, т. е. в N^2 раз, по сравнению с линией генерации одиночного джозефсоновского элемента (см. табл. 3). На рис. 4, *b* показана зависимость ширины линии синхронной генерации от разности ΔI_C критических токов джозефсоновских элементов в двухконтактной ячейке линейной структуры "B" и четырехконтактном интерферометре. Видно, что в последнем случае ширина линии генерации практически одна и та же в пределах всей области синхронизации, а в случае цепочки ширина линии несколько увеличивается при приближении к границе области синхронизации (как при увеличении ΔI_C , так и при увеличении частоты генерации).

Работа частично финансировалась по Государственной программе "Актуальные направления физики конденсированных сред" (проект № 98051) и Учебно-научному центру "Интеграция" (проект N 461).

Список литературы

- [1] *Polonsky S.V.* et al. // Extended Abstracts of 3rd International Superconductive Electronics Conference (ISEC'91). 1991. P. 160–163.
- [2] *Jain A.K., Likharev K.K., Lukens J.E., Sauvageau J.E.* // Phys. Reports. 1984. V. 109. P. 309–426.
- [3] *Marpl S.L.Jr.* // Digital spectral analysis with applications. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1987.
- [4] *Маштаков А.Д., Корнев В.К., Овсянников Г.А.* // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 11. С. 1735–1741.
- [5] *Kornev V.K., Arsumanov A.V., Mashtakov A.D., Ovsyannikov G.A.* // IEEE Transaction. on Applied. Superconductivity. 1997. V. 7. N 2. P. 3111–3114.