01

Нелинейная стадия развития неустойчивости в моностабильной активной среде

© *А.А. Пухов*

Объединенный институт высоких температур. Научно-исследовательский центр прикладных проблем электродинамики РАН, Москва

Поступило в Редакцию 8 января 1998 г.

Теоретически рассмотрена нелинейная стадия развития нустойчивости в моностабильной активной среде, описываемой уравнением типа "реакция–диффузия". Граница области среды, в которой развивается неустойчивость, движется с постоянной скоростью. Теоретико-групповой анализ задачи позволяет получить аналитическое выражение для скорости распространения такой границы. Полученные результаты могут быть существенны при анализе развития неустойчивости в широком классе активных сред.

Целый ряд сильнонеравновесных физических систем (активных сред) описывается нелинейным уравненнием типа "реакция–диффузия"

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + f(\theta), \tag{1}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial^2 x + \partial^2/\partial^2 y + \partial^2/\partial^2 z$, а θ в зависимости от характера диссипативного процесса может представлять собой температуру среды, концентрацию реагентов, электрическое поле и т.д. (см. [1] и цитируемую там литературу). Ниже для определенности под величиной θ будем подразумевать температуру. Характер нелинейной стадии развития неустойчивости в таких системах полностью определяется видом функции источника $f(\theta)$. Например, для бистабильных систем (рис. 1, кривая *1*) переход между двумя устойчивыми состояниями среды $\theta(x,y,z,t) = \theta_1$ и $\theta(x,y,z,t) = \theta_3$ осуществляется посредством распространения по ней автоволны переключения. В одномерном случае асимптотическое поведение такой волны $\theta(x,t) = \theta(x-ut)$ характеризуется постоянством скорости ее распространения u [1]. Способы приближенного вычисления скорости волны и ее зависимость от параметров задачи к настоящему времени достаточно подробно изучены [2,3].

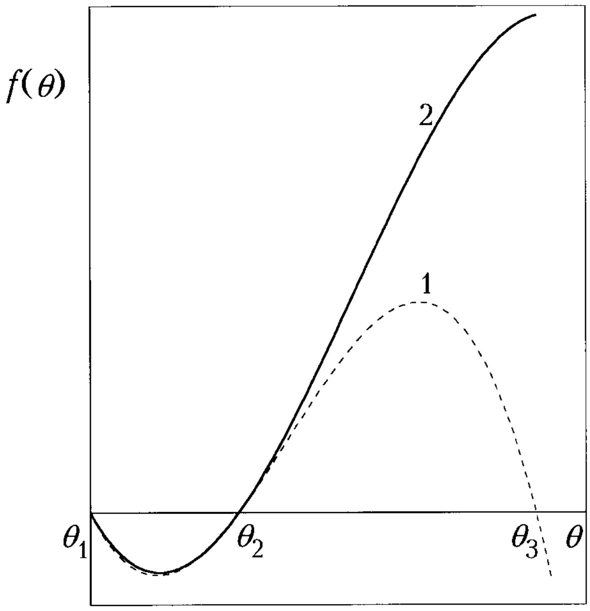

Рис. 1. Характерная зависимость нелинейной функции источника $f(\theta)$ от θ в бистабильном (кривая *1*) и моностабильном (кривая *2*) случаях.

Однако в целом ряде ситуаций бистабильность утрачивается системой (сильная зависимость диссипации от температуры, резкое возрастание дифференциальной проводимости и т. д. [1–3]). Качественный вид зависимости $f(\theta)$ в этом случае приведен на рис. 1 (кривая *2*). При превышении температурой θ в какой-либо области среды порогового значения θ_2 происходит ее неограниченный саморазогрев. Это обстоятельство является причиной особого характера развития нустойчивости в моностабильной среде. Фронт нелинейной волны $\theta(x, y, z, t)$, разделяющей "горячую" и "холодную" области среды, устроен следующим образом. Температура θ в "холодной" области среды равна θ_1, а в "горячей" неограниченно возрастает. Таким образом, развитие неустойчивости в этом случае осуществляется за счет двух параллельно идущих процессов: вытеснения "холодной" области среды "горячей" и быстрого увеличения температуры "горячей" области.

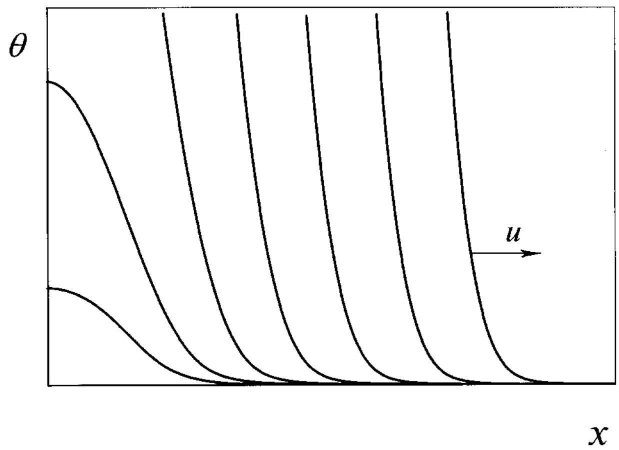

Рис. 2. Схематическое изображение эволюции профиля фронта волны в моностабильной активной среде [4–6]. Кривые разделены равными промежутками времени.

Рассмотрим сначала одномерный случай ($D = 1$). Уравнение (1) не имеет автомодельного решения типа бегущей автоволны $\theta(x,t) = \theta(x - ut)$ в силу неограниченного увеличения температуры "горячей" области $\theta(x,t) > \theta_2$. Однако для целого ряда моностабильных активных сред численное моделирование показало, что, несмотря на нестационарность температуры $\theta(x,t)$ в "горячей" области среды, фронт движется с постоянной скоростью u (рис. 2) [4–6]. Таким образом, распределение $\theta(x,t)$ в "холодном" хвосте фронта имеет вид $\theta(x,t) = \theta(x - ut)$ и в системе, движущейся вместе с волной, удовлетворяет асимптотически ($\theta \cong \theta_1$) уравнению

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + u\frac{d\theta}{dx} + f(\theta) = 0. \tag{2}$$

В достаточно общем виде нелинейную функцию источника $f(\theta)$ можно представить как [5]

$$f(\theta) = a\theta^m(\theta^n - b), \tag{3}$$

где m, n, a, b — произвольные положительные величины, $b = \theta_2^n$. Отсутствие автомодельного решения не позволяет определить величину скорости u стандартными методами теории распространения автоволн конечной амплитуды [1–3] как собственное значение уравнения (2) с граничными условиями $d\theta/dx = 0$ при $x = \pm\infty$. Для нахождения величины u в этом случае можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями [7,8]. Будем считать, что степени m и n фиксированы, а a и b являются управляющими параметрами задачи. Тогда уравнения (2), (3) инвариантны относительно группы преобразования переменных вида

$$x = L^{-p}x',\ \theta = L^{q}\theta',\ u = L^{p}u',\ a = L^{2p+(1-m-n)q}a',\ b = L^{nq}b', \qquad (4)$$

представляющих собой группу растяжений с масштабным фактором L. Степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (2), (3) относительно преобразования (4) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тем же уравнениям (2), (3). Это приводит к тому, что группа преобразований (4) содержит свободные параметры L, p и q, которые могут принимать произвольные значения.

Из физических соображений ясно, что величина скорости u в (2), (3) есть функция только a и b: $u = F(a, b)$. Это соотношение должно быть инвариантно относительно группового преобразования (4), т. е. $u' = F(a', b')$ [9]. Будем искать решение в виде $u \propto a^r b^s$ [10], где степени r и s подлежат определению. Тогда

$$u/a^r b^s = L^{p(2r-1)+q[ns+(1-m-n)r]}u'/a'^r b'^s \qquad (5)$$

и из условия инвариантности $u/a^r b^s = u'/a'^r b'^s$ получаем $p(2r-1) + q[ns + (1-m-n)r] = 0$. В силу произвольности p и q в (4) получаем однозначные выражения для степеней: $r = 1/2$, $s = (m+n-1)/2n$. Итак, для скорости u имеем

$$u \propto a^{1/2} b^{(m+n-1)/2n}. \qquad (6)$$

Коэффициент пропорциональности порядка единицы в (6) не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения необходимы либо численные расчеты [4,5], либо привлечение дополнительных соображений [6].

В симметричных двумерном ($D = 2$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$) и трехмерном ($D = 3$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$) случаях автомодельность является приближенной: $\theta(r, t) \cong \theta(r - ut)$, и при $r \gg 1$ для скорости фронта волны получаем $dr/dt = u - (D-1)/r$ [1,2]. Кривизна фронта вызывает замедление волны, что приводит к логарифмической поправке в равномерном распространении фронта $r \cong ut - u^{-1}(D-1)\ln t$. Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнений (1), (3) позволяет получить функциональную зависимость u от управляющих параметров при любой размерности задачи.

В заключение отметим, что рассмотренные особенности развития неустойчивости в моностабильной активной среде сближают ее с так называемыми "режимами с обострением". Такие режимы возникают в задачах о нелинейных активных средах с сильной зависимостью теплоемкости и тепловыделения от температуры [11], описываемых уравнением

$$\theta^k \frac{\partial\theta}{\partial t} = \nabla(\theta^l \nabla\theta) + f(\theta). \tag{7}$$

Применяя рассмотренную выше процедуру к уравнениям (3), (7), для скорости фронта волны получаем

$$u \propto a^{1/2} b^{(m+n+l-2k-1)/2n}. \tag{8}$$

Однако, используя этот результат, следует принимать во внимание, что для "режима с обострением" может быть характерен "взрывной" характер развития неустойчивости, когда температура среды обращается в бесконечность за конечное время ($m+n-k-1>0$ [11]).

Автор признателен Н.А. Бузникову за полезные обсуждения полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке ГНТП "Актуальные направления в физике конденсированных сред" (проект № 96083) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96–02–18949).

Список литературы

[1] *Васильв В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
[2] *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
[3] *Гуревич А.Вл., Минц Р.Г.* // УФН. 1984. Т. 142. В. 1. С. 61–98.
[4] *Львовский Ю.М.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 15. С. 39–44.

[5] *Петровский С.В.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. В. 8. С. 1–6.
[6] *Pukhov A.A.* // Supercond. Sci. Technol. 1997. V. 10. N 8. P. 547–551.
[7] *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
[8] *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1989. 412 p.
[9] *Dresner L.* Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. London: Pitman books Ltd., 1983. 60 p.
[10] *Dresner L.* // IEEE Trans. Magn. 1985. V. 21. N 2. P. 392–395.
[11] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михалов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.