01;03

Снижение критических условий неустойчивости сильно заряженной капли, движущейся относительно среды

© С.О. Ширяева, В.А. Коромыслов, О.А. Григорьев

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 19 сентября 1997 г.
В окончательной редакции 10 февраля 1998 г.

Показано, что с увеличением скорости потока идеальной жидкости, обтекающей заряженную идеальнопроводящую каплю идеальной жидкости, критическая для реализации неустойчивости капли величина собственного заряда быстро снижается.

В разнообразных задачах технической физики, геофизики и технологии приходится сталкиваться с заряженными каплями, движущимися относительно среды [1–3]. Но хотя исследованию дробления свободно падающих капель в атмосфере посвящено весьма значительное число работ [4], вопросы, связанные с закономерностями развития неустойчивости в каплях по отношению к собственному заряду и по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей на свободной поверхности капли, до сих пор не изучены. Поскольку критические условия неустойчивости капиллярных волн на заряженной поверхности жидкости при наличии тангенциального поля скоростей не зависят от вязкости [5], для упрощения нижеследующих рассуждений проведем рассмотрение на моделях идеальных жидкостей.

Пусть идеальная несжимаемая диэлектрическая среда с плотностью ρ_1 и диэлектрической проницаемостью ε движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ относительно сферической капли радиуса R идеальной идеальнопроводящей жидкости с плотностью ρ_2, имеющей заряд Q и коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред σ. Найдем критические условия неустойчивости капиллярных колебаний капли в описанных условиях.

Решение задачи проведем в сферической системе координат с началом отсчета в центре капли в линейном приближении по величине возмущения свободной поверхности капли $\xi(\theta, t)$, вызванного тепловыми капиллярными волнами и имеющими амплитудные значения $\sim 10^{-8}$ cm. Уравнение свободной поверхности капли имеет вид $r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t)$.

Выражение для поля скоростей течения потенциального движения жидкости вокруг невозмущенной капли имеет вид [6]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{R^3}{2r^3}\left[3\mathbf{n}\,(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{U}\right] + \mathbf{U}. \tag{1}$$

Волновые движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными, с гармоническими потенциалами скоростей Ψ_1, Ψ_2 и электростатическим потенциалом Φ, удовлетворяющими задаче:

$$\Delta\Psi_i = 0; \quad (i = 1; 2); \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$r \to \infty: \qquad \nabla\Psi_1 = \mathbf{U}; \qquad \Phi \to 0;$$

$$r = 0: \qquad \nabla\Psi_2 = 0;$$

$$r = R + \xi: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial r};$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial r};$$

$$-\rho_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + \rho_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} - \rho_1\left(\nabla\Psi_{\mathbf{1}}\right)^2 - P_Q + P_\sigma = 0;$$

$$\Phi = \mathrm{const};$$

$$P_\sigma(\xi) = -\frac{\sigma}{R^2}(2 + \Delta_\Omega)\xi;$$

$$P_Q = -\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon R^4}\xi + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^4}\sum_n (n+1)Y_n(\mu)\int\limits_{-1}^{1}\xi Y_n(\mu)\,d\mu,$$

здесь Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Решение этой задачи в линейном приближении по возмущению поверхности ξ будем искать (как это делалось в аналогичной задаче о неустойчивости Гельмгольца [6]) в виде:

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi + \sum_n A_n r^{-(n+1)} Y_n(\mu)\exp(St);$$

$$\Psi_2(\mathbf{r},t)=\sum_n B_n r^n Y_n(\mu)\exp(St);$$

$$\xi(\mathbf{r},t)=\sum_n Z_n Y_n(\mu)\exp(St).$$

Y_n — сферические функции; A_n, B_n, Z_n — коэффициенты одного порядка малости; φ — потенциал поля скоростей жидкости (1), имеет нулевой порядок малости; квадратичное слагаемое $\sim (\nabla\Psi_{\mathbf{1}})^2$ в динамическом граничном условии на свободной поверхности жидкости сохранено, так как содержит φ в качестве слагаемого.

Решение сформулированной задачи несложно найти обычными методами [5]. В безразмерных переменных, в которых $R=1$, $\sigma=1$ и $\rho_2=1$, для амплитуд капиллярных колебаний капли получается бесконечная система однородных алгебраических уравнений:

$$\rho U^2 K_n Z_{n-2}-\rho U S L_n Z_{n-1}+\Big\{\Big(\frac{\rho}{(n+1)}+\frac{1}{n}\Big)S^2$$
$$-\rho U^2 M_n+(n-1)\Big[n+2-W\Big]\Big\}Z_n$$
$$-\rho U S I_n Z_{n+1}+\rho U^2 J_n Z_{n+2}=0, \qquad (2)$$

$$W\equiv\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon};M_n\equiv\frac{9\alpha_n\alpha_{n-1}}{2n}+\frac{9\beta_n\alpha_{n+1}}{2(n+2)};K_n\equiv\frac{9\alpha_n\alpha_{n-1}}{2n};L_n\equiv\frac{(9n+6)\alpha_n}{2n(n+1)};$$

$$I_n\equiv\frac{(9n+12)\beta_n}{2(n+1)(n+2)};\quad J_n\equiv\frac{9\beta_n\beta_{n+1}}{2(n+2)};\quad \rho\equiv\rho_1/\rho_2;$$

$$\alpha_n\equiv\frac{n(n-1)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}};\quad \beta_n\equiv\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}.$$

Необходимым и достаточным условием существования решения такой системы является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при искомых амплитудах Z_n. Это требование даст дисперсионное уравнение задачи, принимающее в пренебрежении взаимодействием мод простой вид

$$S_n^2=\big[n(n-1)[W-n+2]-n\rho U^2 M_n\big]\cdot\left(\frac{n\rho}{(n+1)}+1\right)^{-1}. \qquad (3)$$

Капля претерпевает неустойчивость, когда S_2^2 проходит через ноль и становится отрицательным. При выполнении этого условия амплитуда основной моды начинает экспоненциально расти со временем, что приводит к последовательному возбуждению амплитуд более высоких мод [3], и капля распадается по закону, описанному в [7]. Из (3) видно, что с увеличением скорости потока, обтекающего каплю, критическая для реализации неустойчивости величина параметра Рэлея $W = W_*$ быстро убывает:

$$W_* = 4 - \rho U^2 M_2.$$

Это обстоятельство дает основание для возобновления усилий построения физической модели инициирования разряда молнии, основанной на идее зажигания коронного разряда в окрестности свободно падающей в грозовом облаке крупной тающей градины [8–10], согласующейся с реалиями грозового облака (по измеряемым величинам зарядов на градинах, напряженности внутриоблачного электрического поля и скорости падения градин).

В заключение отметим, что использованное при анализе приближение идеальной жидкости не ограничивает общности полученного результата, поскольку критические условия реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду не зависят от вязкости жидкости.

Список литературы

[1] *Шевченко С.И., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 4. С. 3–21.
[2] *Григорьев А.И., Сыщиков Ю.А., Ширяева С.О.* // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[4] *Гонор А.Л., Ривкинд В.Я.* // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 17. М: Изд. ВИНИТИ, 1982. С. 98–159.
[5] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Методы расчета критических условий электрогидродинамических неустойчивостей. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 1996. 60 с.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[7] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 3. С. 19–28.
[8] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
[9] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 5. С. 6–13.
[10] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Phys. Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.