

01;03

## Метастабильные состояния заряженной эллипсоидальной капли

© С.И. Щукин, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет

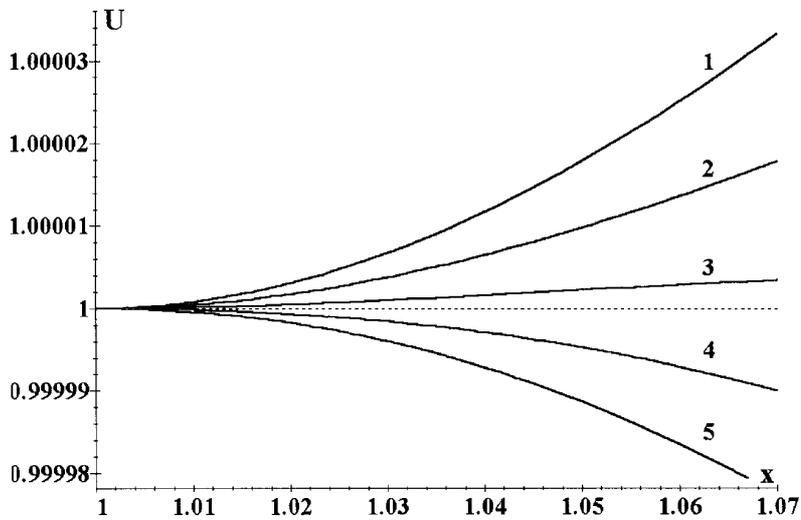
Поступило в Редакцию 8 декабря 1997 г.

В рамках принципа минимальности потенциальной энергии замкнутой системы в состоянии равновесия исследованы на устойчивость заряженные капли идеально проводящей жидкости, имеющие форму вытянутых сфероидов. Показано, что в некотором диапазоне величин зарядов и сфероидальных деформаций существуют метастабильные состояния.

Исследованию устойчивости заряженных капель посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [1]). Так, еще Рэлей [2] установил, что сферическая капля радиуса  $R$  с поверхностным натяжением  $\sigma$ , имеющая заряд  $Q$ , становится неустойчивой по отношению к бесконечно малым сфероидальным возмущениям формы, если  $W \equiv \frac{Q^2}{4\pi R^3 \sigma} \geq 4$ . В работах [3,4] были сделаны выводы о возможности бифуркации формы сферической капли при  $W \geq 4$  к форме вытянутого и сплюснутого сфероида, а в [4] отмечалось, что при конечных возмущениях формы переход к устойчивой сфероидальной форме возможен и при  $W < 4$ . Рассмотрение более общего случая, когда капля имеет форму трехосного эллипсоида, позволило показать, что сплюснутый эллипсоид не является устойчивой формой капли ни при каких значениях параметра  $W$ , так как при  $W < 4$  сплюснутый эллипсоид эволюционирует к сфере, а при  $W \geq 4$  — к вытянутому сфероиду.

В данной работе устойчивость состояний вытянутой сфероидальной заряженной идеально проводящей капли рассматривается с точки зрения минимума ее потенциальной энергии, равной сумме энергии сил поверхностного натяжения и энергии электростатического поля собственного заряда капли.

Обезразмерив потенциальную энергию заряженной капли, имеющей форму вытянутого сфероида, на энергию сферической капли с таким же

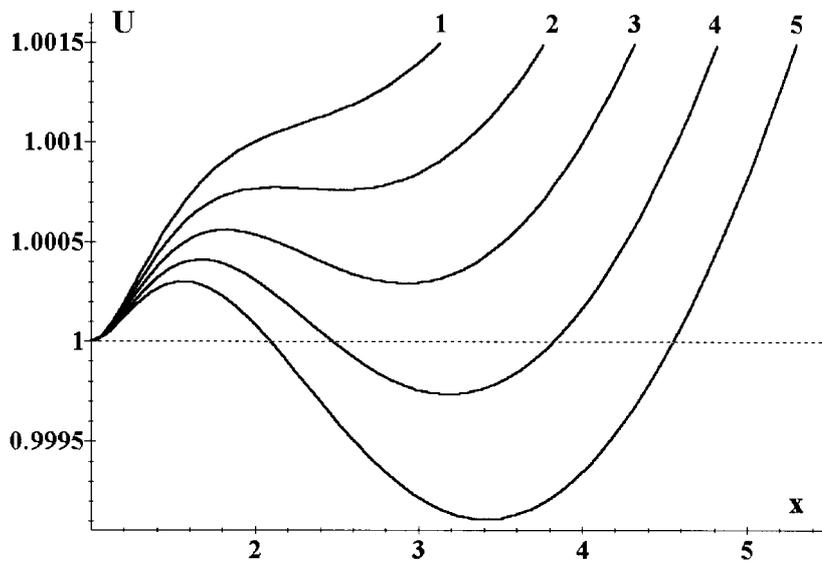


**Рис. 1.** Графики зависимости безразмерной энергии  $U$  заряженной вытянутой сфероидальной капли от  $x$  — отношения полуосей сфероида при малых деформациях и значениях параметра Рэлея  $W = 3.5; 3.7; 3.9; 4.1; 4.3$  — кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно.

объемом и зарядом, можно получить зависимость безразмерной энергии капли  $U$  от параметра Рэлея  $W$  и отношения полуосей вытянутого сфероида  $x$  [5,6]:

$$U = \frac{x^{1/3}}{(2+W)\sqrt{(x^2-1)}} \times \left[ \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + x \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) + W \arccos h(x) \right]. \quad (1)$$

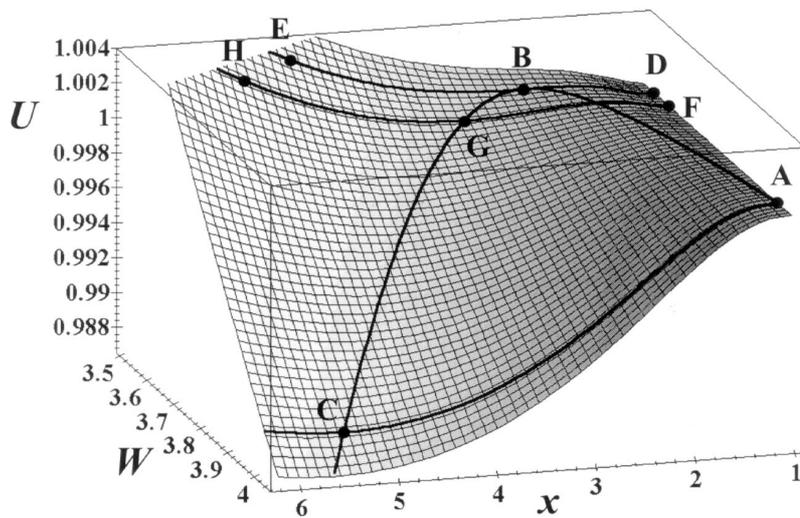
На рис. 1 приведены рассчитанные по (1) графики зависимостей потенциальной энергии сфероидальной заряженной капли от отношения полуосей  $U = U(x)$  при малых деформациях капли и нескольких значениях параметра Рэлея:  $W = 3.5; 3.7; 3.9; 4.1; 4.3$ . Как и отмечалось ранее [2–4], при  $W < 4$  малая деформация сферической капли приводит к увеличению ее потенциальной энергии, а при  $W > 4$  деформация капли



**Рис. 2.** Графики зависимости безразмерной энергии  $U$  заряженной вытянутой сфероидальной капли от  $x$  — отношения полуосей сфероидальной капли при больших деформациях и значениях параметра Рэлея  $4W = 3.52; 3.55; 3.58; 3.61; 3.64$  — кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно.

к вытянутому сфероиду уменьшает потенциальную энергию капли, т. е. является энергетически выгодной.

Однако рассмотрение графиков этих зависимостей при больших деформациях показывает, что даже при  $W < 4$  исследуемые зависимости могут быть не монотонны. Из рис. 2, где зависимости, аналогичные приведенным на рис. 1, даны при больших значениях отношения полуосей сфероидальной капли, видно, что при превышении параметром Рэлея некоторого порогового значения  $W_1$  на зависимости  $U(x)$  кроме минимума при  $x = 1$  (соответствующего сферической капле) появляется еще один локальный минимум, соответствующий метастабильному состоянию, в котором капля имеет форму вытянутого сфероидальной капли и энергию, большую, чем у сферической капли. При дальнейшем увеличении параметра Рэлея локальный минимум, соответствующий форме вытянутого сфероидальной капли, становится все глубже и при переходе  $W$  через некоторое значение  $W_2$



**Рис. 3.** График зависимости  $U(W, x)$  энергии заряженной капли в форме вытянутого сфероида от параметра Рэлея  $W$  и отношения  $x$  полуосей сфероида. Кривой  $ABC$  отмечены экстремальные значения энергии капли: кривая  $AB$  соответствует локальным максимумам, кривая  $BC$  — локальным минимумам. Кривой  $DBE$  отмечены значения энергии капли, для которой параметр Рэлея  $W = W_1$ . Кривой  $FGH$  отмечены значения энергии капли, для которой параметр Рэлея  $W = W_2$ . Кривая  $AC$  соответствует  $W = 4$ .

превращается в глобальный минимум, соответствующий устойчивому состоянию, в котором энергия капли в форме вытянутого сфероида меньше, чем капли сферической, однако продолжают существовать два минимума, разделенные потенциальным барьером. Состояние капли в форме сферы при таких значениях параметра Рэлея можно интерпретировать как метастабильное. Из рис. 2 видно также, что при увеличении параметра Рэлея значение  $x$ , соответствующее положению минимума, также увеличивается, т. е. капля, находящаяся в стабильном (метастабильном) состоянии, становится более вытянутой.

Решив относительно  $W$  уравнение  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$  и отыскав минимум полученной функции, получим значение  $W$ , при котором появляется дополнительный локальный минимум потенциальной энергии заряжен-

ной вытянутой сфероидальной капли с энергией, большей энергии сферической капли:

$$W_1 = 3.545.$$

Решая совместно уравнения  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$  и  $U(W, x) = 1$ , найдем значение  $W$ , при котором появившийся локальный минимум функции  $U(W, x)$  переходит в глобальный; при этом минимум энергии сферической капли сохраняется, но соответствующее состояние становится метастабильным

$$W_2 = 3.596.$$

Теперь потенциальная энергия сферической заряженной капли превышает потенциальную энергию капли в форме вытянутого сфероида, и переход между этими состояниями возможен при преодолении разделяющего их потенциального барьера.

Вышесказанное поясняет рис. 3, на котором в виде трехмерной поверхности изображена зависимость  $U = U(W, x)$ . Кривая  $AB$  получена из условий  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0$  и проходит через точки локальных максимумов зависимости  $U(W, x)$ . Кривая  $BC$  получена из условий  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$  и проходит через точки локальных минимумов зависимости  $U(W, x)$ . Кривая  $DBE$  представляет зависимость  $U(W_1, x)$  и является касательной к кривой  $ABC$ . Кривая  $FGH$  определяется зависимостью  $U(W_2, x)$ , точка  $G$  пересечения ее с кривой  $BC$  соответствует  $U = 1$  и отделяет область метастабильных состояний ( $BG$ ) от области стабильных состояний ( $CG$ ) заряженной капли в форме вытянутого сфероида. Проекция кривых  $DBE$ ,  $FGH$  и  $AC$  на плоскость  $W - x$  разделяют ее на четыре области:

— при  $W < 3.545$  существует единственный минимум зависимости  $U(W, x)$ , соответствующий стабильной сферической капле;

— при  $3.545 < W < 3.596$  существуют два минимума зависимости  $U(W, x)$ , один соответствует стабильной сферической капле, другой метастабильной вытянутой сфероидальной капле;

— при  $3.596 < W < 4$  также существуют два минимума зависимости  $U(W, x)$ , один соответствует метастабильной сферической капле, другой стабильной вытянутой сфероидальной капле;

— при  $W \geq 4$  существует единственный минимум зависимости  $U(W, x)$ , соответствующий стабильной вытянутой сфероидальной капле.

**Заключение.** В диапазоне значений параметра Рэлея  $3.545 < W < 3.596$  существует метастабильное состояние заряженной

капли, имеющей форму вытянутого сфероида. Энергия капли, находящейся в этом состоянии, больше энергии сферической капли. При  $3.596 < W < 4$  минимальной энергией обладает вытянутая сфероидальная капля и, хотя по-прежнему имеются два минимума, энергия сферической капли меньше энергии сфероидальной. Переход от сферической капли к сфероидальной может происходить только путем преодоления потенциального барьера, разделяющего оба минимума. С увеличением параметра Рэлея  $W$  эксцентриситет равновесной формы капли возрастает. При  $W \geq 4$  существует только один минимум, соответствующий сфероидальной капле.

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Rayleigh // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
- [3] Bassaran O.A., Scriven L.E. // Phys. Fluids A. 1989. V. 1. N 5. P. 795–798.
- [4] Ailam G., Gallily I. // Phys. Fluid. 1962. V. 5. N 5. P. 575–582.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.