

01

Взаимная синхронизация и рассинхронизация систем Лоренца

© В.С. Анищенко, А.Н. Сильченко, И.А. Хованов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 26 сентября 1997 г.

Посредством численного эксперимента исследуется динамика двух симметрично связанных систем Лоренца. Представлен бифуркационный анализ процесса синхронизации, результаты которого сопоставляются с результатами численных экспериментов. Показано, что изменение связи может обуславливать как синхронизацию, так и рассинхронизацию подсистем.

Явление синхронизации систем, демонстрирующих хаотическую динамику, стало предметом многочисленных исследований и дискуссий в течение последнего десятилетия [1]. В ходе изучения выработалось несколько основных подходов к определению хаотической синхронизации [2–9]. В упомянутых работах, как впрочем и в большинстве работ, посвященных хаотической синхронизации, обычно решается задача о нахождении функционалов, позволяющих диагностировать взаимные корреляции между подсистемами, и уделяется мало внимания выяснению бифуркационного механизма явления. Сложность бифуркационного анализа хаотической синхронизации обусловлена тем, что в большинстве случаев математическим образом хаотических колебаний является квазиаттрактор, включающий в себя наряду с нетривиальным гиперболическим подмножеством седловых траекторий счетное множество устойчивых периодических орбит [10]. С учетом сказанного для анализа бифуркационного механизма хаотической синхронизации наиболее подходящей является система Лоренца, в фазовом пространстве которой при определенных значениях параметров существует единственный аттрактор–аттрактор Лоренца [11].

Целью настоящей работы является исследование динамики двух симметрично связанных систем Лоренца, а также изучение бифуркаций седловых циклов и состояний равновесия, обуславливающих эффекты, наблюдаемые при изменении параметра связи.

Рассматриваемая в данной работе динамическая система описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= r_{1,2}x_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2} - y_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= x_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2}b. \end{aligned} \quad (1)$$

Значения параметров таковы ($\sigma = 10$, $r_1 = 28$, 8 , $r_2 = 28$, $b = 8/3$), что в каждой из подсистем существует аттрактор Лоренца. Наиболее общим при исследовании синхронизации хаотических систем является подход, опирающийся на концепцию аналитического сигнала и позволяющий ввести понятия мгновенной амплитуды и мгновенной фазы хаотических колебаний [6,12]. Выражения для мгновенной амплитуды и фазы сигнала, введенные через преобразование Гильберта, имеют вид:

$$A(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}, \quad \phi(t) = \arctan \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)}, \quad \text{где } \tilde{s}(t) = 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)d\tau}{t-\tau} —$$

преобразование Гильберта исходного сигнала $s(t)$. На рис. 1, *a* приведены зависимости разности фаз, усредненной по ансамблю реализаций, от времени при различных значениях связи между подсистемами. Как видно из рисунка, в случае нулевой связи (кривая 1) фазы подсистем являются некоррелированными и с ростом времени их разность монотонно возрастает. Вполне естественно ожидать, что введение связи между подсистемами приведет к появлению корреляций между их фазами, разность которых станет ограниченной. Однако результаты численных экспериментов (кривые 2 и 3 на рис. 1) убеждают в обратном — при значениях γ в интервале от 0 до 2 разность фаз не уменьшается, а наоборот, еще сильнее нарастает, т.е. имеет место фазовая рассинхронизация подсистем! Дальнейший рост связи приводит к ограничению разности фаз при $\gamma = 4.1$ (кривая 5 на рис. 1), обуславливая тем самым фазовую синхронизацию подсистем. Поведение средних частот $\Omega_{1,2} = \langle \dot{\phi}(t) \rangle$, зависимость которых от величины параметра связи приведена на рис. 1, *b*, также позволяет сделать вывод о том, что моменту фазовой синхронизации подсистем предшествует их рассинхронизация (средние частоты расходятся в интервале значений γ от 0 до 2). Заметим, что поведение средних частот Ω_1 и Ω_2 , вычисленных с помощью преобразования Гильберта, оказалось полностью эквивалентным поведению средних частот переключений, которое анализировалось в нашей предыдущей работе [13].

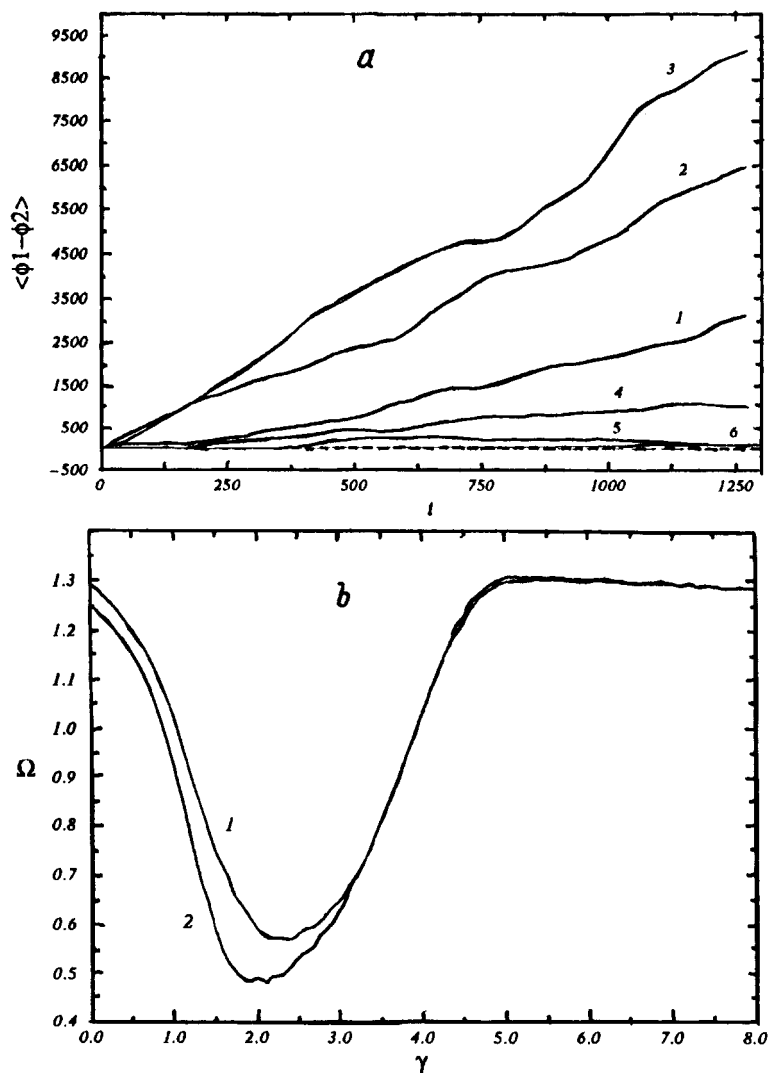


Рис. 1. *a* — зависимость усредненной разности фаз от времени; *b* — зависимость средних частот: 1 — Ω_1 и 2 — Ω_2 от величины коэффициента связи; *c* — зависимость четырех старших ляпуновских показателей от величины коэффициента связи.

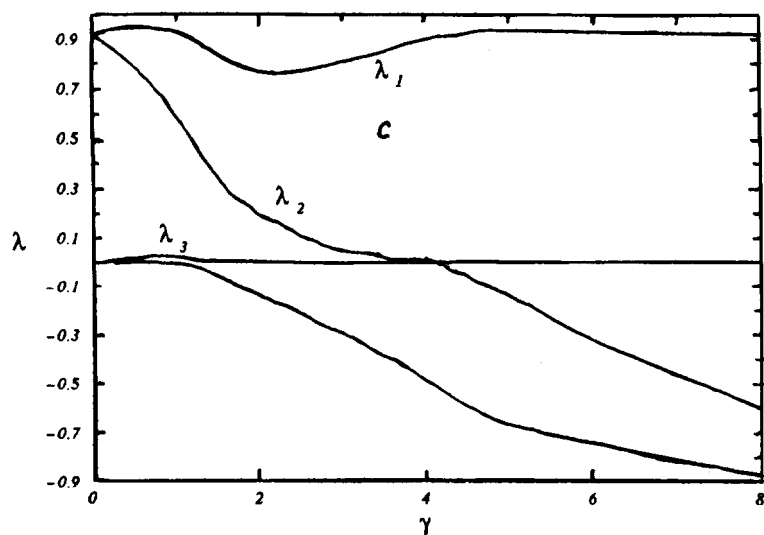


Рис. 1 (продолжение).

Одной из наиболее часто используемых при изучении хаотической синхронизации характеристик является спектр ляпуновских показателей. Зависимости четырех старших ляпуновских показателей системы (1) от связи приведены на рис. 1, с. Из рисунка видно, что при слабой связи система обладает тремя положительными ляпуновскими показателями λ_1 , λ_2 и λ_3 (один из нулевых стал положительным). При $\gamma = 1.3$ один из показателей становится отрицательным (в нашем случае это λ_3), что в случае взаимодействия систем Ресслера сопровождается фазовой синхронизацией подсистем [6]. В нашем случае наблюдается иная ситуация: несмотря на смену знака одним из показателей, синхронизации фаз не происходит, напротив, в интервале значений связи от 0 до 2, как уже отмечалось выше, имеет место фазовая рассинхронизация. Фазовая синхронизация наступает лишь при $\gamma = 4.1$, когда показатель λ_2 становится отрицательным.

Анализ бифуркаций, имеющих место при увеличении параметра связи, показал следующее. При относительно слабой связи ($\gamma < 0.27$) структура разбиения фазового пространства R^6 определяется семейства-

ми седловых циклов, попарно совпадающими с семействами, существовавшими при нулевой связи. Увеличение параметра связи ($\gamma > 0.27$) обуславливает цепочку касательных бифуркаций, в результате которых рождаются два семейства седловых циклов C_n^{+1} и C_n^{-1} (линии $l_{11}^{+1}l_{12}^{+1}$ на рис. 2, a — линии рождения двух пар седловых циклов, принадлежащих указанным семействам), расположенные в окрестности симметричного ($x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$) и асимметричного ($x_1 = -x_2, y_1 = -y_2, z_1 = -z_2$) подпространств соответственно. С ростом связи указанные семейства эволюционируют по-разному. Как видно из рис. 2, a, b , размерность устойчивого многообразия седловых циклов из семейства C_n^{+1} возрастает с 3 до 4 (на бифуркационной диаграмме этому соответствуют линии l_{11}, l_{12}, l_{14}), тогда как седловые циклы из семейства C_n^{-1} становятся все более неустойчивыми и исчезают в результате касательных бифуркаций (рис. 2, d). Линия l_d на рис. 2, a является линией исчезновения семейства C_n^{-1} .

Наряду с рассмотренными выше бифуркациями седловых циклов в системе (1) также имеют место бифуркации состояний равновесия. Локальные свойства потока в окрестности состояний равновесия исследовались с помощью широко известного комплекса LOCIBIF [14]. Исследования показали, что при введении связи между подсистемами состояния равновесия $P_1 - P_8$ попарно претерпевают бифуркации Хопфа, в результате которых рождаются седловые циклы. Состояния равновесия P_1, P_5 претерпевают бифуркацию Хопфа при $\gamma = 0.515$, состояния равновесия P_3, P_7 при $\gamma = 0.7944$; P_4, P_8 при $\gamma = 1.191$; P_2, P_6 при $\gamma = 1.473$. Из восьми родившихся в результате бифуркаций Хопфа седловых циклов наиболее важную роль играют циклы C_0^1 и C_0^2 (рис. 2, a). Родившись при $\gamma = 0.515$, данные седловые циклы имеют размерность устойчивого многообразия, равную двум. При увеличении связи пара их комплексно-сопряженных мультипликаторов становится при $\gamma = 0.7944$ по модулю меньше единицы, а размерность устойчивого многообразия возрастает до четырех. Так как размерность устойчивых многообразий седловых циклов из семейства C_n^{+1} при данных значениях связи ($1 < \gamma < 4$) равна 3, то циклы C_0^1 и C_0^2 становятся наиболее притягивающими седловыми циклами в фазовом пространстве R^6 . По этой причине вероятность попадания фазовой траектории в их окрестность становится выше вероятности попадания в окрестность симметричного подпространства, что приводит к наблюдаемому эффекту рассинхронизации подсистем. Как уже отмечалось выше, при значениях параметра

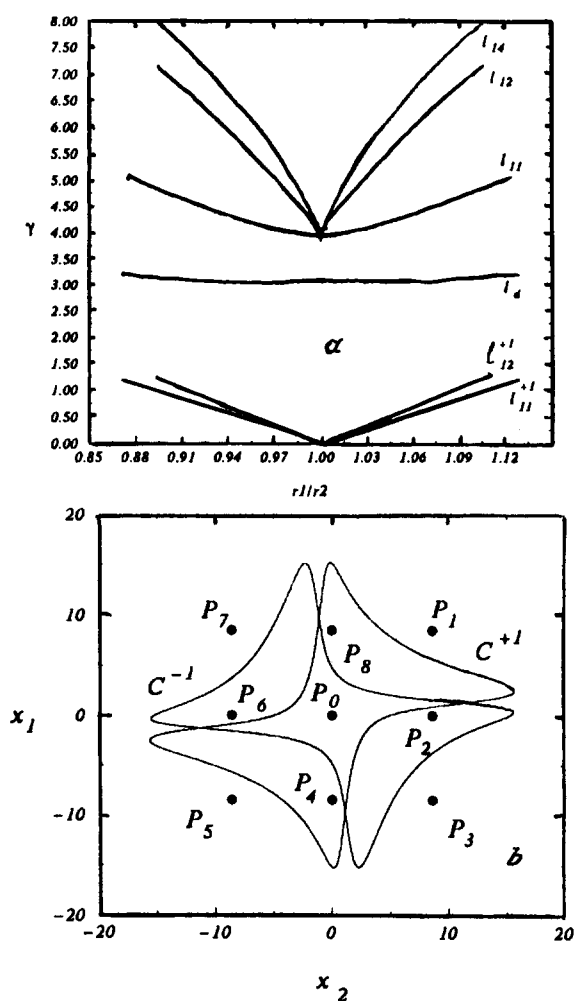


Рис. 2. *a* — бифуркационная диаграмма, *b* — взаимная фазовая проекция седловых циклов C_{11}^{+1} и C_{11}^{-1} , рождающихся при касательной бифуркации ($P_0 - P_8$ — состояния равновесия системы); *c* — зависимость мультипликаторов седлового цикла C_{11}^{+1} от величины параметра связи; *d* — зависимость мультипликаторов седлового цикла C_{11}^{-1} от величины параметра связи.

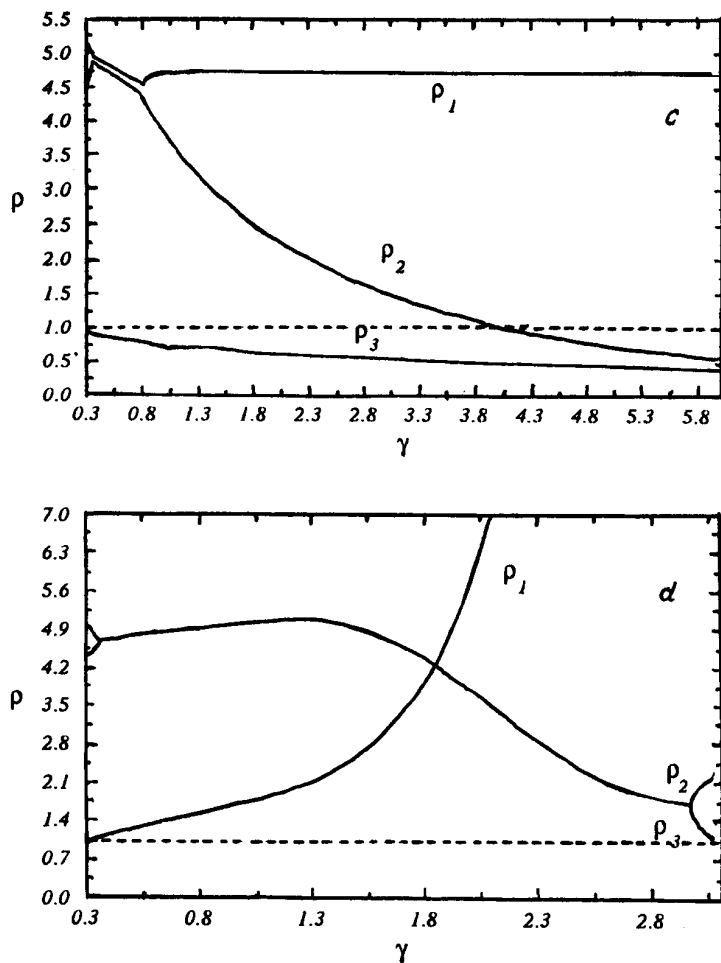


Рис. 2 (продолжение).

связи $\gamma \approx 4.1$ в системе (1) имеет место фазовая синхронизация. При этом значении связи размерность устойчивого многообразия седлового цикла C_{11}^{+1} возрастает с 3 до 4, поэтому представляется разумным в качестве границы области фазовой синхронизации рассматривать линию

l_{11} на рис. 2, а. Дальнейшее увеличение параметра связи приводит к возрастанию устойчивых многообразий седловых циклов из семейства C_n^{+1} , которое становится устойчивым к трансверсальным возмущениям при больших значениях γ и образует аттрактор, служащий математическим образом синхронных хаотических колебаний.

Таким образом, проведенные исследования динамики двух симметрично связанных систем Лоренца показали, что с ростом параметра связи имеют место эффекты рассинхронизации и синхронизации подсистем. Детальный бифуркационный анализ системы (1) показал, что наблюдаемые эффекты обусловлены касательными бифуркациями седловых циклов и бифуркациями состояний равновесия, которые имеют место при изменении связи и приводят к перестройке структуры разбиения фазового пространства R^6 на траектории. Полученные в ходе бифуркационного анализа хаотической синхронизации результаты являются, по-видимому, достаточно общими. Изучение степени их универсальности и, в частности справедливость для хаотических систем с аттракторами седлофокусного типа, является предметом дальнейших исследований.

В заключение отметим, что настоящая работа частично финансировалась за счет средств Российского фонда фундаментального естествознания (грант 95-0-8.3-66).

Список литературы

- [1] *Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G.* // Appl. Mech. Rev. 1995. V. 48. P. 733.
- [2] *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 795.
- [3] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 821.
- [4] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* // Int. J. Bif. and Chaos. 1992. V. 2. P. 644.
- [5] *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos — Models and Experiments. World Scientific, Singapore, 1995. 400 p.
- [6] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1804.
- [7] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука. 1990.
- [8] *Веричев Н.Н.* // Межвуз. тематич. сб. науч. тр. Горький, 1986.
- [9] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

- [10] *Афраймович В.С.* // Тр. междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1984. С. 34.
- [11] *Быков В.В., Шильников А.Л.* // Межвуз. тематич. сб. науч. тр. Горький, 1987.
- [12] *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.
- [13] *Анищенко В.С., Сильченко А.Н., Хованов И.А.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 8.
- [14] *Khibnik A.I., Kuznetsov Y.A., Levitin V.V., Nikolaev E.V.* // Physica D. 1992. V. 62. P. 360.