

01

Неустойчивость периодических стационарных волн в активной нелинейной среде с высокочастотными потерями

© А.А. Короновский, И.С. Ремпен

Учебно-научный центр "Колледж" Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 29 мая 1997 г.

Рассматривается вопрос об устойчивости стационарных волн в нелинейных активных средах с высокочастотными потерями без дисперсии. Показано, что в такой среде могут существовать волны, длины которых не меньше некоторой минимальной длины λ_{\min} . Все стационарные волны являются неустойчивыми по отношению к малым возмущениям их профиля, однако с увеличением длины волны увеличивается ее время жизни и для волн с большими длинами λ время их жизни может быть достаточно велико, так что эти волны могут в некотором смысле считаться устойчивыми.

Возможность существования стационарных волн (т.е. таких волн, профиль которых не изменяется с течением времени) в нелинейных активных средах известна давно. Более того, стационарные решения соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных — это, пожалуй, наиболее просто получаемые решения, поскольку за счет независимости решений от времени удается перейти (для одномерных задач) от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., например, [1–4]).

В то же самое время один из наиважнейших вопросов, относящихся к стационарным волнам, не может быть разрешен в рамках стационарного решения, а именно вопрос об устойчивости этих самых стационарных волн. Действительно, вполне возможны случаи, когда исходные дифференциальные уравнения допускают стационарные решения, которые, однако, могут быть неустойчивыми по отношению к малым возмущениям, и, следовательно, в реальных системах стационарные волны существовать не будут. Таким образом, чтобы сделать вывод об устойчивости (или неустойчивости) стационарных волн, необходимо провести дополнительное исследование [5,6].

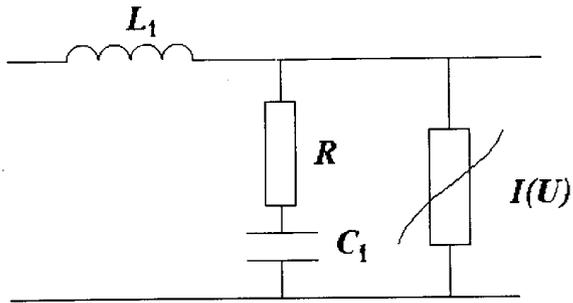


Рис. 1. Длинная линия — модель нелинейной активной среды без дисперсии.

В рамках настоящей работы рассмотрена одна из самых простых нелинейных активных сред с высокочастотными потерями без дисперсии, моделью которой может служить длинная линия, изображенная на рис. 1. Если предположить, что нелинейность в линии мала, то уравнение, описывающее процессы, происходящие в такой среде, в рамках одноволнового приближения [7] будет иметь вид [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu f(u), \quad (1)$$

где u — безразмерное напряжение, t — безразмерное время, V_0 — скорость распространения волн в линейной среде без потерь, ν — параметр высокочастотной диссипации, μ — параметр нелинейности, $f(u)$ — функция нелинейности (безразмерная характеристика активного нелинейного элемента), которая должна ограничивать нарастание колебаний и которая, как правило, выбирается в виде $f(u) = (1 - u^2)u$. Вводя новые переменные $\xi = (x - V_0 t) \sqrt{\mu/\nu}$, $\tau = \mu t$ и полагая, что $u = u(\xi, \tau)$, перейдем от уравнения (1) к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \mu f(u). \quad (2)$$

Известно, что уравнение (1) допускает решение в виде периодических стационарных бегущих волн, распространяющихся со скоростью

$V = V_0$ [8]. Однако вопрос, устойчивы ли данные периодические стационарные волны, остается открытым. Получить ответ на него можно, например, из непосредственного численного решения уравнения (2) с соответствующими граничными и начальными условиями:

$$u(0, \tau) = u(D, \tau), \quad u_\xi(0, \tau) = u_\xi(D, \tau), \quad u(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad (3)$$

где D — безразмерная длина волны, $\varphi(\xi)$ — начальное распределение. Фактически, мы переходим к рассмотрению динамики системы длиной D , описываемой уравнением (2), замкнутой в кольцо [9].

Существует, однако, еще один способ, с помощью которого можно было бы выяснить характер устойчивости периодических стационарных волн. Заменяем функцию $f(u) = (1 - u^2)u$ кусочно-линейной функцией $f(u) = -u + |u + \frac{1}{2}| - |u - \frac{1}{2}|$. Разумеется, в этом случае будет рассматриваться несколько иная активная нелинейная среда с высокочастотными потерями, нежели та, о которой говорилось выше, но резких существенных отличий в данном случае, на первый взгляд, быть не должно. Кусочно-линейный вид функции $f(u)$ позволяет, в свою очередь, воспользоваться тем обстоятельством, что рассматриваемая система становится линейной на соответствующих отрезках, и это может помочь при анализе происходящих в системе процессов (см., например, [10]).

Профиль стационарной волны, распространяющейся в среде, описываемой уравнением (2) с граничными и начальными условиями (3), будет определяться, как

$$u^0(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \sin \xi - \cos \xi), & \xi \leq L, \\ \frac{1}{2} \left(2 + \operatorname{th} \frac{\xi}{2} \operatorname{sh}(\xi - L) - \operatorname{ch}(\xi - L) \right), & L < \xi \leq L + S, \\ \frac{1}{2} \left(\cos(\xi - L - S) - \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \sin(\xi - L - S) \right), & L + S < \xi \leq 2L + S, \\ \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}(\xi - 2L - S) - \operatorname{th} \frac{\xi}{2} \operatorname{sh}(\xi - 2L - S) - 2 \right), & 2L + S < \xi \leq 2L + 2S, \end{cases} \quad (4)$$

где значения величин L и S связаны между собой соотношениями¹

$$\operatorname{ctg} \frac{L}{2} = \operatorname{th} \frac{S}{2} \quad (5)$$

и

$$2(L + S) = D. \quad (6)$$

Из формул (4), (5) можно видеть, что в рассматриваемой среде, описываемой уравнением (2), могут существовать стационарные волны с длиной волны $\lambda \geq 2\pi$. (Соответственно в среде, описываемой уравнением (1), минимальная длина стационарной волны будет $\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{\nu/\mu}$ при $S = 0$, когда для любого значения x выполняется условие $|u(x, t) \leq 1/2|$). Нетрудно заметить, что значение величины L монотонно уменьшается от π с увеличением S от нуля.

Можно показать, что стационарные волны в рассматриваемой системе оказываются неустойчивыми: если $|u(\xi, \tau)| < 1/2$ для любого ξ , то существует аналитическое выражение, описывающее эволюцию системы:

$$u(\xi, \tau) = a_0 \exp(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{D}\xi\right) \times \exp\left(\left(1 - \frac{4\pi^2 n^2}{D^2}\right)\tau\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{D}\xi\right) \times \exp\left(\left(1 - \frac{4\pi^2 n^2}{D^2}\right)\tau\right), \quad (7)$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются начальным распределением $\varphi(\xi)$. Из полученного решения (7) отчетливо видно, что все подобные волны оказываются неустойчивыми из-за существующих компонент a_0 и $a_k, b_k, 0 < k < n$. С другой стороны, для волн, на профиле которых существуют характерные точки $\xi_{1/2}^i(\tau)$, в которых $u(\xi_{1/2}^i(\tau), \tau) = \pm 1/2$, вопрос об устойчивости этих волн сводится к вопросу об устойчивости этих характерных точек и может показать, что для таких точек имеет

¹ Точнее говоря, вместо (6) следовало бы использовать $2(L + S) = D/n$, где $n = 1, 2, \dots, n_{\max}$, такое, что $D/n \geq 2\pi$. Однако мы будем рассматривать только те случаи, когда в кольце укладывается ровно одна длина стационарной волны. Понятно, что случай, когда в кольце укладывается несколько длин волн, может быть сведен к предыдущему уменьшением длины кольца в соответствующее число раз.

место соотношение

$$\frac{d}{d\tau} (\Delta \xi_{1/2}^i(\tau)) \approx \Delta \xi_{1/2}^i(\tau), \quad (8)$$

где $\delta \xi_{1/2}^i(\tau) = \xi_{1/2}^i(\tau) - \xi_{1/2}^i$ — смещение характерной точки $\xi_{1/2}^i(\tau)$ относительно характерной точки стационарной волны $\xi_{1/2}^i$ в момент времени τ . Видно, что отклонение будет нарастать, и следовательно, такие стационарные волны также оказываются неустойчивыми.

Заметим, что локальные возмущения стационарной волны нарастают во времени для тех участков профиля волны, в которых $|u(\xi, \tau)| < 1/2$. В то же время локальные возмущения для участков профиля волны $|u(\xi, \tau)| > 1/2$, как нетрудно видеть, затухают. Таким образом, интенсивность нарастания возмущений профиля стационарной волны будет определяться соотношением длин "устойчивых" и "неустойчивых" участков профиля волны. Поскольку с увеличением длины стационарной волны λ отношение длин "устойчивых" участков к "неустойчивым" S/L в силу соотношений (5), (6) неограниченно нарастает, то следует ожидать, что процесс разрушения профиля стационарной волны будет происходить тем медленнее, чем больше длина этой волны. Для количественного описания этого обстоятельства введем в рассмотрение величину τ_l , которую будем называть "временем жизни" стационарной волны. Под временем жизни стационарной волны длиной λ будем понимать интервал времени, за который удельное возмущение профиля стационарной волны

$$\delta(\tau) = \frac{1}{\lambda} \int_{\xi^*}^{\xi^*+\lambda} |u(\xi, \tau) - u^0(\xi)| d\xi \quad (9)$$

возрастает в два раза, т.е. $\delta(\tau_l) = 2\delta(0)$, при $\delta(0) \rightarrow 0$ и $u(\xi, \tau) - u^0(\xi) = \text{const}$. Понятно, что с увеличением длины стационарной волны возрастает и ее время жизни τ_l и теоретически оно может быть достаточно большим, чтобы на конечном интервале времени стационарная волна сохраняла свой профиль с некоторой наперед заданной точностью. В этом смысле стационарные волны с большими длинами λ могут считаться устойчивыми.

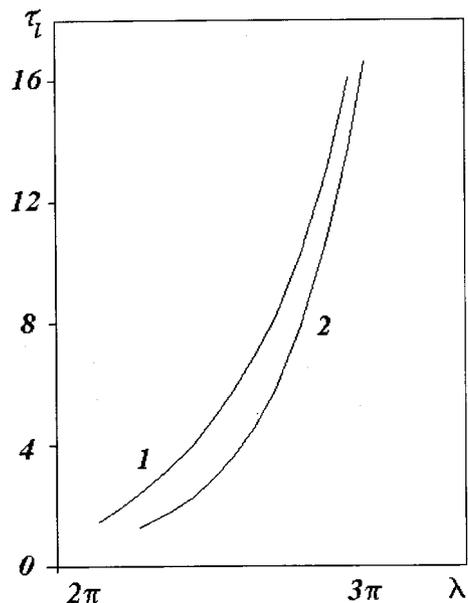


Рис. 2. Зависимость времени жизни τ_l стационарной волны от ее длины λ : 1 — среда с кусочно-линейной, 2 — с кубической функцией $f(u)$.

Результаты численного моделирования² подтверждают выводы, которые были получены на основе анализа уравнения 2 с кусочно-линейной функцией $f(u)$. В кольце длиной больше 2π возможно существование в течение некоторого периода времени волн, близких по профилю к стационарным. На рис. 2 приведены зависимости времени жизни стационарных волн, рассчитанные по формуле (9) от их длины λ для (4) с кусочно-линейной и кубической функциями $f(u)$. Из приводимых

² Было проведено непосредственное численное моделирование уравнения (2) с граничными и начальными условиями (3) как для функции $f(u) = -u + \left|u + \frac{1}{2}\right| - \left|u - \frac{1}{2}\right|$, так и для функции $f(u) = (1 - u^2)u$. В качестве разностной схемы была выбрана шеститочечная классическая схема Кранка–Николсона [11] с весом $w = 1/2$. Решение системы нелинейных уравнений осуществлялось гибридным методом: внешние итерации проводились по Зейделю, внутренние — по Ньютону [12]. В качестве параметров схемы были выбраны шаг по координате $h_{\xi=0.01}$, шаг по времени $h_{\tau} = 0.0025$.

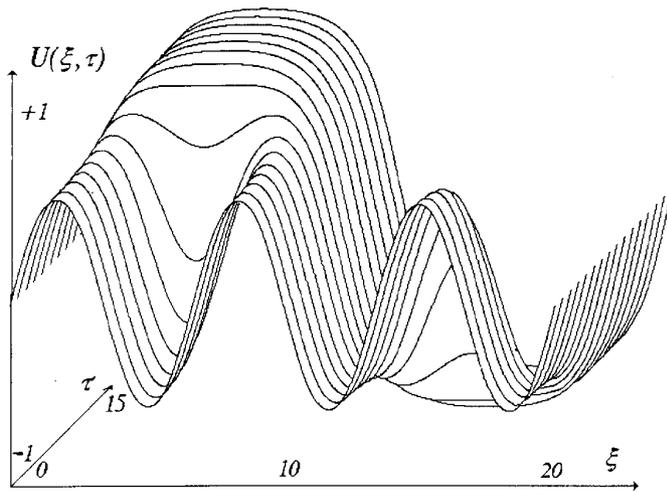


Рис. 3. Разрушение стационарной волны длиной $D/3$ и установление в среде с кусочно-линейной функцией $f(u)$ стационарной волны длиной D , которая имеет большее время жизни τ_l .

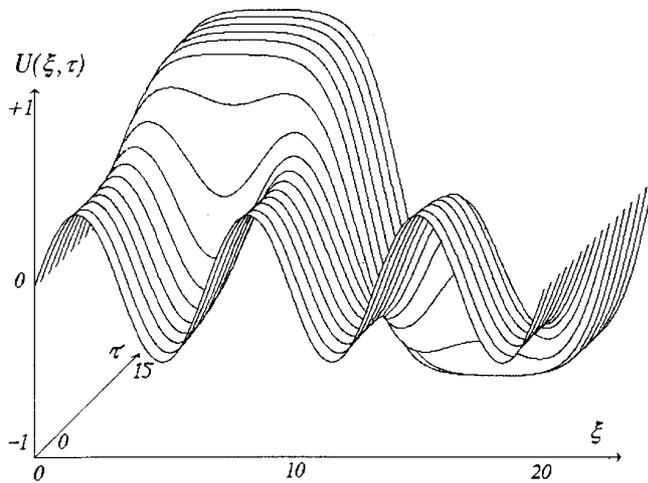


Рис. 4. Разрушение стационарной волны длиной $D/3$ и установление в среде с кубической функцией $f(u)$ стационарной волны длиной D .

рисунков отчетливо видно, что в обоих случаях с увеличением длин волн неограниченно нарастает время их жизни, поэтому в некотором смысле волны с большими λ являются устойчивыми. В результате того, что время жизни увеличивается с ростом длины волны, в кольце, в котором могут существовать несколько волн с разными длинами λ , происходит переход от стационарных волн с меньшими длинами к волнам с большими длинами, как это показано на рис. 3, 4.

В заключение выражаем искреннюю признательность чл.-корр. РАН, профессору Д.И. Трубецкову за постоянное внимание и содействие, а также канд. физ.-мат. наук В.Г. Анфиногентову и аспиранту А.Е. Храмову за ряд ценных советов и критические замечания.

Список литературы

- [1] Рабинович М.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. С. 477.
- [2] Островский Л.А. // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука, 1989. С. 29–50.
- [3] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [4] Scott A.C. Trans. IRE CT-9. 1962. P. 192–195.
- [5] Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
- [6] Eckhaus W. Studies in nonlinear stability theory. Springer, New York, 1965.
- [7] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [8] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
- [9] Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.
- [10] Buratti R.J., Lindgren A.G. // Proc. IEEE 56. 1968. P. 1392–1393.
- [11] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
- [12] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 212.