01;09

Электростатическая задача для плоского эксцентрического кольца

© Т.В. Денисова, В.С. Проценко

Харьковский авиационный институт,
310070 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 11 ноября 1996 г. В окончательной редакции 4 августа 1997 г.)

Задача электростатики для концентрического кольцевого диска изучена достаточно полно (см. [1] и библиографию в ней). Эксцентрическое кольцо рассматривается впервые на основе одного предложения, которое в литературе известно как преобразование Кельвина [2]. Это преобразование позволило свести исходную задачу к задаче для концентрического кольца с точечным зарядом, лежащим вне кольца в той же плоскости. Последняя решена методом тройных интегральных уравнений. Приближенное решение для плотности распределения заряда на эксцентрическом кольцевом диске приведена в виде разложения по малому параметру.

1. Для диска, заряженного до потенциала u_0, краевая задача ставится так: найти в пространстве с диэлектрической постоянной ε^* гармоническую функцию u, убывающую к нулю на бесконечности, если известно ее значение на диске, равное u_0.

Пусть диск в декартовой системе координат расположен в плоскости $z = 0$ (см. рисунок, a). В силу симметрии поля относительно плоскости $z = 0$ будем иметь дополнительное условие $u'_z(x, y, 0) = 0$ вне диска. Полагаем, что эксцентрическое кольцо занимает область (S)

$$\left\{x^2 + y^2 < R^2, \quad (x + h)^2 + y^2 > R_1^2\right\}, \qquad (1.1)$$

где $h > 0$, $R_1 < R$, $h < R$, $R > R_1 + h$.

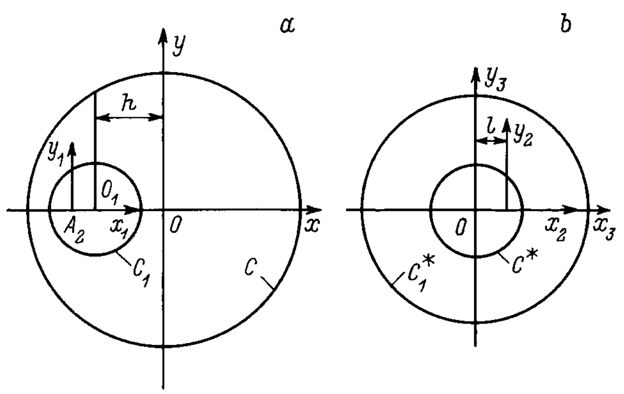
Справедлива лемма, которую мы приводим без доказательства ввиду ее простоты.

Каковы бы ни были параметры эксцентрического кольца (S), удовлетворяющие системе неравенств (1.1), уравнение

$$k^2h + k(R_1^2 - h^2 - R^2) + hR^2 = 0 \qquad (1.2)$$

всегда имеет действительные положительные корни k_1 и k_2, такие что удовлетворяются неравенства $k_1 > R$, $h < k_2 < h + R_1$, $k_1 > k_2$.

Геометрически это означает, что точки $A_1(-k_1, 0)$ и $A_2(-k_2, 0)$ лежат вне кольца (S), причем точка A_1 расположена слева от большой окружности C, а точка A_2 — внутри малой окружности C_1.



Т е о р е м а. Если с точкой A_p $(p = 1, 2)$ связать новую декартову систему координат (x_1, y_1), поместив начало координат в эту точку и направив оси этой системы по направлению осей системы (x, y), то преобразование инверсии с центром в точке A_p

$$x_1 = x_2/\rho_2^2, \quad y_1 = y_2/\rho_2^2, \quad \rho_2^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

$$y = y_1, \quad x_1 = x + k_p$$

переводит эксцентрическое кольцо S в концентрическое кольцо S_1 на плоскости (x_2, y_2) (см. рисунок, b).

Мы примем для определенности за центр инверсии точку A_2. Тогда кольцо (S_1) будет определяться неравенствами

$$(x_2 + l)^2 + y_2^2 > a_1^2, \quad (x_2 + l)^2 + y_2^2 < a^2,$$

$$l = k_2(R^2 - k_2^2)^{-1}, \quad a_1 = R(R^2 - k_2^2)^{-1,}$$

$$a = R_1\left[R_1^2 - (k_2 - h)^2\right]^{-1}. \qquad (1.3)$$

При таком выборе центра инверсии удобным является предельный переход от эксцентрического кольца к концентрическому. Если за центр инверсии принять точку A_1, то естественным будет предельный переход от концентрического кольца к круговому диску.

Применим к исходной краевой задаче для эксцентрического кольца преобразование Кельвина [2] с центром инверсии в точке A_2

$$x_1 = x_2/r_2^2, \quad y_1 = y_2/r_2^2, \quad z_1 = z_2/r_2^2,$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2. \qquad (1.4)$$

Тогда функция $\psi(x_2, y_2, z_2) = r_2^{-1}u(x_1, y_1, z_1)$ будет удовлетворять в полупространстве $z_2 < 0$ уравнению Лапласа и краевым условиям

$$\psi(x_2, y_2, 0)u_0\rho_2^{-1} \quad (x_2, y_2) \in (S_1), \qquad (1.5)$$

$$\psi'_{z_2}(x_2, y_2, 0) = 0 \quad (x_2, y_2) \notin (S_1), \qquad (1.6)$$

$$\psi(x_2, y_2, z_2) \to 0 \quad \text{при} \quad r_2 \to \infty. \qquad (1.7)$$

2. С помощью преобразования сдвига $x_3 = l + x_2$, $y_3 = y_2$, $z_3 = z_2$ центр кольца (S_1) перейдет в начало координат системы (x_3, y_3, z_3) (см. рисунок, b). Краевые условия (1.5), (1.6) преобразуются в условия

$$\psi(x_3, y_3, 0) = u_0\left[(x_3 - l)^2 + y_3^2\right]^{-1/2}, \quad a_1 < \rho_3 < a, \quad (2.1)$$

$$\psi'_{z_3}(x_3, y_3, 0) = 0, \quad 0 \le \rho_3 < a_1, \quad \rho_3 > a. \quad (2.2)$$

В дальнейшем ради простоты изложения индексы при переменных x, y, z временно опустим.

Задачу для концентрического кольца будем решать методом, предложенным в работе [3]. Функцию $\psi(x, y, z)$ представим в цилиндрической системе координат в виде разложения Фурье–Бесселя

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \int_0^{\infty} A_m(\lambda)\lambda^{-1} e^{\lambda z} J_m(\lambda\rho)\,d\lambda \quad (z < 0). \quad (2.3)$$

Граничную функцию (2.1) представим в виде аналогичного разложения

$$\frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2l\rho\cos\varphi}} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda l)\,d\lambda,$$

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_m = 2, \quad m \ge 1, \quad l < a_1 < a, \quad (2.4)$$

где (ρ, φ) — полярные координаты с началом в точке O^* (см. рисунок, b).

Из граничных условий (2.1), (2.2) с помощью разложений (2.3), (2.4) получаем систему тройных уравнений для определения фунции $A_m(\lambda)$

$$\int_0^{\infty} A_m(\lambda)\lambda^{-1} J_m(\lambda\rho)\,d\lambda = \delta_m \int_0^{\infty} J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda l)\,d\lambda \quad (a_1 < \rho < a),$$

$$\int_0^{\infty} A_m(\lambda) J_m(\lambda\rho)\,d\lambda = 0 \quad (0 \le \rho < a_1, \quad \rho > a). \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) в соответствии с методом [4] приводим к системе интегральных уравнений для вспомогательных функций $f_m^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2)$

$$\rho^{1-m} f_m^{(1)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\rho\left(a^2 - \rho^2\right)^{-1/2} \times \int_a^{\infty} \frac{t^{1-m}(t^2 - a^2)^{1/2}}{t^2 - \rho^2} f_m^{(2)}(t)\,dt \quad (0 \le \rho < a),$$

$$\rho^{1+m} f_m^{(2)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\rho\left(\rho^2 - a_1^2\right)^{-1/2} \times \int_0^{a_1} \frac{t^{1+m}(a_1^2 - t^2)^{1/2}}{t^2 - \rho^2} f_m^{(1)}(t)\,dt + g_m(\rho) \quad (\rho > a),$$

$$g_m(\rho) = \frac{2}{\pi} l^m \delta_m \frac{\rho\sqrt{a_1^2 - l^2}\,u_0}{(\rho^2 - l^2)\sqrt{\rho^2 - a_1^2}}. \quad (2.6)$$

Отметим, что интересующая нас функция

$$\sigma_m(\rho) = \int_0^{\infty} A_m(\lambda) J_m(\lambda\rho)\,d\lambda \quad (a_1 < \rho < a),$$

через которую выражается плотность распределения заряда на кольце, определяется формулой

$$\sigma_m(\rho) = f_m^{(1)}(\rho) + f_m^{(2)}(\rho) \quad (a_1 < \rho < a). \quad (2.7)$$

В [3] система (2.6) заменяется совокупностью двух бесконечных систем алгебраических уравнений. Для этого положим

$$f_m^{(1)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\varepsilon \frac{\rho^m a^{-(m+1)}}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}^{(m)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k},$$

$$f_m^{(2)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\varepsilon \frac{\rho^{-m} a_1^{m-1}}{\sqrt{\rho^2 - a_1^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^{(m)} \left(\frac{a_1}{\rho}\right)^{2k+2},$$

$$\varepsilon = a_1 a^{-1}. \quad (2.8)$$

В результате разложения функций $(t^2 - \rho^2)^{-1}$, $(\rho^2 - l^2)^{-1}$ в степенные ряды, вычисления интегралов и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ρ получим

$$a_{2k}^{(m)} = \sum_{p=0}^{\infty} b_{2p}^{(m)} \varepsilon^{2p+m+1} M_p^k(m, \varepsilon^2), \quad k \ge 0,$$

$$b_{2k}^{(m)} = \gamma_{2k}^{(m)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}^{(m)} \varepsilon^{2p+m+2} M_p^k(m, \varepsilon^2),$$

$$M_p^k(m, \varepsilon^2) = \frac{(m+k+p)!}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+k+p+5/2)} \times F(1/2, m+k+p+1; m+k+p+5/2; \varepsilon^2),$$

$$\gamma_{2k}^{(m)} = u_0\delta_m \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\varepsilon_2^{2k+m}, \quad \varepsilon_2 = l a_1^{-1}, \quad \varepsilon_1 = (1 - \varepsilon_2^2)^{1/2}. \quad (2.9)$$

3. Из оценок [3] вытекает, что система (2.9) при $\varepsilon < 1$ является квазирегулярной и регулярной при $\varepsilon \le 0.75$. Из тех же оценок получаем, что решение системы (2.9) принадлежит числовому пространству последовательностей сходящихся квадратов l_2 и имеют место неравенства

$$\left|a_{2k}^{(m)}\right| \le K D_k^{(m)}, \quad \left|b_{2k}^{(m)}\right| \le \gamma_{2k}^{(m)} + K D_k^{(m)} \varepsilon,$$

$$D_k^{(m)} = \varepsilon^{m+1}(m+k)!\Gamma^{-1}(m+k+5/2),$$
$$K = \text{const} > 0. \qquad (3.1)$$

Неравенства (3.1) показывают, что ряды (2.8) и ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sigma_m(\rho)\cos m\varphi$ сходятся абсолютно и равномерно при $a_1 \le \rho \le a$. Возвращаясь последовательно от переменных x_3, y_3, z_3 к переменным x, y, z, запишем выражение для плотности распределения заряда на эксцентрическом кольцевом диске

$$\sigma(\rho,\varphi) = \frac{\varepsilon^*}{2\pi\rho^{*3}} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m(\rho_3)\cos m\varphi_3,$$

$$\rho^* = \sqrt{(x+k_2)^2 + y^2}, \quad \rho_3^2 = x_3^2 + y_3^2,$$
$$x_3 = \frac{x+k_2}{(x+k_2)^2+y^2} + l, \quad y_3 = \frac{y}{(x+k_2)^2+y^2},$$
$$\cos\varphi_3 = \frac{x_3}{\rho_3}, \quad \sin\varphi_3 = \frac{y_3}{\rho_3}.$$

В заключение приводим решение бесконечных систем в виде первых членов разложения по степеням малого параметра ε

$$a_{2k}^{(m)} = \frac{\varepsilon^{m+1}(m+k)!}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m+k+5/2)} \times \left[\gamma_0^{(m)} + \varepsilon\frac{m+k+1}{(m+k+5/2)}\left(\frac{1}{2}\gamma_0^{(m)} + \gamma_2^{(m)}\right) + O(\varepsilon^4)\right],$$

$$b_{2k}^{(m)} = \gamma_{2k}^{(m)} + \varepsilon^{2m+3} \times \left[\frac{(m+k)!m!}{4\pi\Gamma(m+k+5/2)\Gamma(m+5/2)}\gamma_0^{(m)} + O(\varepsilon^2)\right].$$

Суммируя ряды, получим

$$f_m^{(1)}(\rho) = \frac{\gamma_m\varepsilon^{m+1}}{\pi^{3/2}a\sqrt{a^2-\rho^2}} x_0^m \times \left[\psi_m(x_0^2) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_2^2\right)\psi_{m+1}(x_0^2) + O(\varepsilon^4)\right],$$

$$f_m^{(2)}(\rho) = \frac{2\gamma_m}{\pi a_1\sqrt{\rho^2 - a_1^2}} y_0^{m+2}\left[\frac{\rho^2}{\rho^2 - l^2} + \varepsilon^{2m+3} \times \frac{m!}{4\pi\Gamma(m+5/2)}\psi_m(y_0^2) + O(\varepsilon^{2m+7})\right],$$

$$x_0 = \rho/a, \quad y_0 = a_1/\rho, \quad \gamma_m = u_0\delta_m\varepsilon_2^m\sqrt{1-\varepsilon_2^2},$$

$$\psi_m(x) = \frac{m!}{\Gamma(m+5/2)}F(1, m+1; m+5/2; x). \qquad (3.2)$$

Заметим, что предложенным методом может быть решена задача о распределении электричества на кольцевом концентрическом диске в присутствии сосредоточенных зарядов, расположенных на плоскости $z = 0$ вне диска.

Список литературы

[1] *Гринберг Г.А., Курицын В.Н.* // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 1017–1025.
[2] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
[3] *Проценко В.С.* // Прикладная механика. 1968. Т. 4. № 9. С. 83–87.
[4] *Cooke J.C.* // Proc. Edinb. Math. Soc. 1963. Vol. 13. N 4. P. 303–316.