

01;05

Соотношения взаимности нелинейной проводимости фрактальных резисторов

© А.А. Снарский, С.И. Буда

Национальный технический университет Украины,
25205 Киев, Украина

(Поступило в Редакцию 15 июля 1997 г.)

Рассмотрены соотношения взаимности для проводимости неоднородных слабо нелинейных двумерных сред конечных размеров.

Введение

Нелинейные свойства сильно неоднородных компози- тов привлекают постоянное внимание (см., например, [1] и цитируемую там литературу). В частности, это связано с тем, что в таких средах распределение полей и токов сильно неоднородно, что вынуждает учитывать отклонения от закона Ома.

Для макроскопически неоднородных сред линейный закон Ома, в первом приближении по нелинейности заменяется на

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \chi(\mathbf{r})|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — плотности электрического тока и напряженность, $\sigma(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r})$ — удельная линейная и нелинейная электропроводности.

В двухфазных средах, о которых речь пойдет ниже, электропроводности принимают значения σ_1, χ_1 и σ_2, χ_2 в первой и второй фазах соответственно. Будем рассма- тривать случай сильной неоднородности $h = \sigma_2/\sigma_1 \ll 1$ и слабой нелинейности $\chi(\mathbf{r})|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \ll \sigma(\mathbf{r})$.

Важнейшими характеристиками случайно-неоднород- ной среды являются ее эффективные кинетические ко- эффициенты, в данном случае σ_e и χ_e , связывающие по определению средние по объему поля и токи

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle &= \sigma_e \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle + \chi_e \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle^2 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle, \langle \dots \rangle \\ &= V^{-1} \int \dots dV. \end{aligned} \quad (2)$$

При характерном размере усреднения $L \propto V^{1/3}$, много большем корреляционной длины ξ , происходит само- усреднение параметров системы. Эффективная проводи- мость зависит от концентрации и, например, в случайно- неоднородных средах вблизи порога протекания [2]

$$\sigma_e \approx \sigma_1 \tau^t, \quad \tau = (p - p_c)/p_c, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

где p — концентрация фазы с проводимостью σ_1 , p_c — порог протекания, t — критический индекс проводимо- сти.

Выражение (3) справедливо асимптотически, когда $\tau \rightarrow 0$ и можно пренебречь протеканием тока по

фазе с проводимостью σ_2 . Аналогичное универсальное поведение проводимости имеет место и ниже порога про- текания, т. е. при $\tau < 0$. Для χ_e также были установлены универсальные соотношения типа (3), но, конечно, с другими критическими индексами [3]. Вопрос о том, какой размер таких сред ξ , пользуясь терминологией И.М. Лифшица [4], считать репрезентативным, требует специального рассмотрения в каждом отдельном случае. Для двухфазных перколяционных сред

$$\xi \propto a_0 |\tau|^{-\nu}, \quad (4)$$

где a_0 — минимальный размер в системе (размер "зерна" неоднородности), ν — критический индекс корреляцион- ной длины [5].

Для образцов с размерами $L < \xi$ система является мезоскопической и измеряемые характеристики флук- туируют от реализации к реализации. В этом случае хорошо определенными физическими величинами явля- ются средние по реализациям. Так как в перколяционных системах средние по реализации эффективные прово- димости $\{\sigma_e\}$ и $\{\chi_e\}$ являются степенными функциями размера системы [5], то о таких системах говорят как о фрактальных. В случае, когда вкладом одной из фаз в проводимость всей системы можно пренебречь, напри- мер, при $\tau > 0, \sigma_2 = 0$, существует "рецепт" [5] получе- ния зависимости средних по реализациям от размера L системы. Используя (4) вместо τ в σ_e (3) подставляется $\tau = (L/a_0)^{-1/\nu}$, откуда

$$\{\sigma_e\} \approx \sigma_1 (L/a_0)^{-1/\nu}, \quad \tau > 0, \quad (5)$$

аналогично и для средних по реализациям других эффек- тивных коэффициентов.

В случае $h = \sigma_2/\sigma_1 \neq 0$ такой простой "рецепт" уже не проходит [5]. А в случае неоднородных сред, но не вблизи порога протекания, когда нет универсальных зависимостей типа (3), и для сред специальной структу- ры, когда понятие близости к порогу протекания вообще не определено, универсальных зависимостей типа (5) вообще не установлено. Тем не менее, как показано ниже, для определенного класса двумерных сред (в том числе перколяционных) удастся установить точные соот- ношения взаимности (СВ) для средних по реализациям. Эти СВ связывают между собой некоторые комбинации

средних по реализациям коэффициентов проводимости и являются обобщением СВ для линейного случая в средах с геометрически эквивалентным в среднем расположением фаз, установленных впервые для $L \gg \xi$ в [7,8].

Вывод соотношений зависимости

Рассмотрим неоднородный двумерный образец размером $L_{\parallel} \times L_{\perp}$ с единичной толщиной. Токи и падения напряжений вдоль I_{\parallel} , U_{\parallel} и поперек I_{\perp} , U_{\perp} длинной стороны связаны между собой, согласно (2), линейными и нелинейными контактансами

$$I_{\parallel} = G_{\parallel}U_{\parallel} + X_{\parallel}U_{\parallel}^3, \quad I_{\perp} = G_{\perp}U_{\perp} + X_{\perp}U_{\perp}^3, \quad (6)$$

при этом предполагается, что в первом случае на вертикальные грани образца нанесены идеальные (с нулевым сопротивлением) контакты, а во втором контакты нанесены на горизонтальные грани. Согласно [8], каждому образцу неоднородной среды найдем соответствующий дуальный образец

$$j = \Lambda \tilde{P}_{\pi/2} \tilde{E}, \quad E = \Lambda^{-1} \tilde{P}_{\pi/2} \tilde{j}, \quad (7)$$

где $\Lambda = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$, $\tilde{P}_{\pi/2}$ — оператор поворота в плоскости среды на угол $\pi/2$.

Далее мы будем полагать, что для локальных коэффициентов выполняется условие

$$\chi_2/\chi_1 = -(\sigma_2/\sigma_1)^2. \quad (8)$$

В этом случае легко показать, что подстановка (6) в (1) приведет с точностью до кубических по полю членов к среде с тем же локальным законом

$$\langle \tilde{j}(\mathbf{r}) \rangle = \tilde{\sigma}_e \langle \tilde{E}(\mathbf{r}) \rangle + \tilde{\chi}_e \langle \tilde{E}(\mathbf{r}) \rangle^2 \langle \tilde{E}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (9)$$

но с взаимной заменой фаз: если $\sigma(\mathbf{r} \in O_1) = \sigma_1$, $\sigma(\mathbf{r} \in O_2) = \sigma_2$, то $\sigma(\mathbf{r} \in O_1) = \sigma_2$, $\sigma(\mathbf{r} \in O_2) = \sigma_1$,

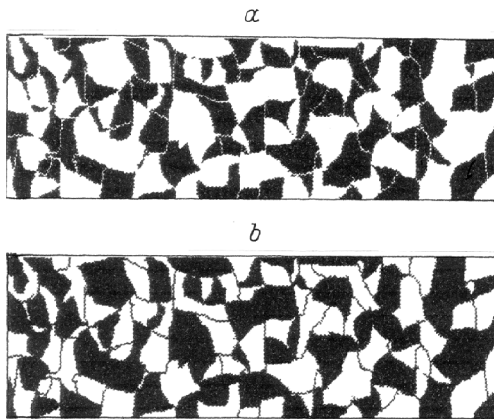


Рис. 1. Неоднородный образец конечных размеров (а) и дуальный образец, полученный из первого при взаимной замене фаз $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$, $X_1 \leftrightarrow X_2$ (b).

и аналогично для $\chi(\mathbf{r})$. Т.е. если обозначить первую фазу черным цветом, а вторую белым, то дуальный образец будет представлять собой негатив первого, соответствующим образом изменятся и граничные условия, определяющие набор контактов (рис. 1, b). При этом в дуальной среде будут выполняться те же уравнения ($\text{div } \tilde{j} = 0$, $\text{rot } \tilde{E} = 0$), что и в начальной.

Усредняя преобразования (7), для полных токов и падений напряжения получим

$$I_{\parallel,\perp} = \Lambda U_{\perp,\parallel}, \quad U_{\parallel,\perp} = \Lambda^{-1} I_{\perp,\parallel}. \quad (10)$$

Применяя эти преобразования к (5), с точностью до кубических членов приходим к

$$\tilde{I}_{\parallel,\perp} = \tilde{G}_{\parallel,\perp} \tilde{U}_{\parallel,\perp} + \tilde{X}_{\parallel,\perp} \tilde{U}_{\parallel,\perp}^3, \quad (11)$$

причем

$$\tilde{G}_{\parallel,\perp} = \Lambda^2/G_{\perp,\parallel}, \quad \tilde{X}_{\parallel,\perp} = -X_{\perp,\parallel} \Lambda^4/G_{\perp,\parallel}^4. \quad (12)$$

Из этих двух соотношений и будут следовать все результаты работы.

Соотношения взаимности для случайно-неоднородных сред во фрактальной области

Если образец представляет собой часть случайно-неоднородной среды и $L_{\parallel} = L_{\perp} \gg \xi$, то $G_{\parallel} = G_{\perp} = \sigma_e$, $\tilde{G}_{\parallel} = \tilde{G}_{\perp} = \tilde{\sigma}_e$ (напомним, что образец единичной толщины). Из (12) тогда следует соотношение взаимности Дыхне [8] $\sigma_e \tilde{\sigma}_e = \sigma_1 \sigma_2$. Так как для случайно-неоднородных сред $\tilde{\sigma}_e(p) = \sigma_e(1-p)$, то последнее можно записать как $\sigma_e(p) \sigma_e(1-p) = \sigma_1 \sigma_2$.

При $L < \xi$ необходимо усреднение по реализации. Перейти от (12) к средним по реализациям можно несколькими способами. В частности из первого соотношения в (12) следует, что [9]

$$\langle \tilde{G}_{\perp,\parallel} \rangle / \langle R_{\parallel,\perp} \rangle = \sigma_1 \sigma_2, \quad (13)$$

где $R_{\parallel,\perp} = 1/G_{\parallel,\perp}$ — сопротивление образца.

При $L_{\parallel} = L_{\perp}$ и $p = p_c$ образцы вырезаны из среды на пороге протекания и каждый из них, естественно фрактален, средние по реализациям основной и дуальной среды совпадают. Тогда из (13) получаем [7]

$$\langle G \rangle / \langle R \rangle = \sigma_1 \sigma_2, \quad L_{\parallel} = L_{\perp}, \quad p = p_c. \quad (14)$$

Еще одно СВ для линейной части контактанса можно получить, если перед усреднением по реализациям прологарифмировать (12). Учитывая, что при $L_{\parallel} = L_{\perp}$ и $p = p_c$ $\langle \ln \tilde{G}_{\perp} \rangle = \langle \ln G_{\parallel} \rangle$, получаем

$$\langle \ln G \rangle = \ln \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad L_{\parallel} = L_{\perp}, \quad p = p_c. \quad (15)$$

Аналогичные, но более сложные СВ можно записать и для нелинейной части кондактанса. В частности, из (12) следует

$$\frac{\tilde{X}_{\perp}}{\tilde{G}_{\perp}^2} = -\frac{X_{\parallel}}{G_{\parallel}^2}, \quad \frac{\tilde{X}_{\parallel}}{\tilde{G}_{\parallel}^2} = -\frac{X_{\perp}}{G_{\perp}^2}, \quad (16)$$

что после усреднения по реализациям дает

$$\left\langle \frac{\tilde{X}_{\perp}}{\tilde{G}_{\perp}^2} \right\rangle = -\left\langle \frac{X_{\parallel}}{G_{\parallel}^2} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\tilde{X}_{\parallel}}{\tilde{G}_{\parallel}^2} \right\rangle = -\left\langle \frac{X_{\perp}}{G_{\perp}^2} \right\rangle. \quad (17)$$

Заметим, что (17) для $L_{\parallel} = L_{\perp}$ и $p = p_c$ дает

$$\left\langle \frac{X}{G^2} \right\rangle = -\left\langle \frac{X}{G^2} \right\rangle \text{ и, следовательно, } \left\langle \frac{X}{G^2} \right\rangle = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь случай, когда один из размеров образца по-прежнему меньше корреляционной длины, а другой много больше — $L_{\parallel} \gg \xi$, $L_{\perp} \leq \xi$ — случай длинной полоски. Несмотря на то что один из размеров меньше корреляционной длины, усреднения по реализациям случайно-неоднородной среды не требуется. $\{G_{\parallel}\} = G_{\parallel}$, где G_{\parallel} — кондактанс данной реализации, и аналогично для других кондактансов. Для полоски, вырезанной из среды на пороге протекания, кроме того, выполняется $\tilde{G}_{\parallel} = G_{\parallel}$, $\tilde{X}_{\parallel} = X_{\parallel}, \dots$ и из (12) можно получить

$$G_{\parallel}G_{\perp} = \Lambda^2, \quad X_{\parallel}/X_{\perp} = -(G_{\parallel}/G_{\perp})^2, \\ L_{\perp} \leq \xi, \quad L_{\parallel} \gg \xi. \quad (19)$$

Таким образом, несмотря на то что и линейные и нелинейные кондактансы являются степенными функциями L_{\perp} , некоторые их комбинации, в частности (19), не зависят от размера L_{\perp} .

Соотношения взаимности для детерминированных структур

При размерах, меньших корреляционной длины, кондактансы отдельных реализаций случайно-неоднородной среды не представляют, вообще говоря, интереса. Однако для некоторых сред с детерминированной неоднородностью, обладающей определенной симметрией, СВ данной реализации могут быть содержательны. На рис. 2 приведены неоднородные образцы, обладающие симметрией относительно поворота на $\pi/2$ и взаимной замены фаз. В случае такой симметрии $G_{\parallel} = G_{\perp}$, $X_{\parallel} = X_{\perp}$ и дуальная среда имеет те же кондактансы, что и основная. Из (12) при этом следует, что

$$G = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}, \quad X = 0. \quad (20)$$

Напомним, что рассматривается случай, когда локальные кондактансы удовлетворяют условию (8). Если, например, в первой фазе $\chi_1 > 0$ (суперлинейная ВАХ), то во второй $\chi_2 < 0$ (сублинейная ВАХ). Таким образом, в рассматриваемых структурах суперлинейность

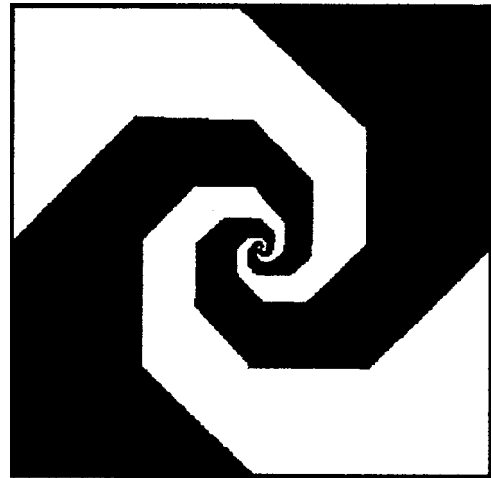
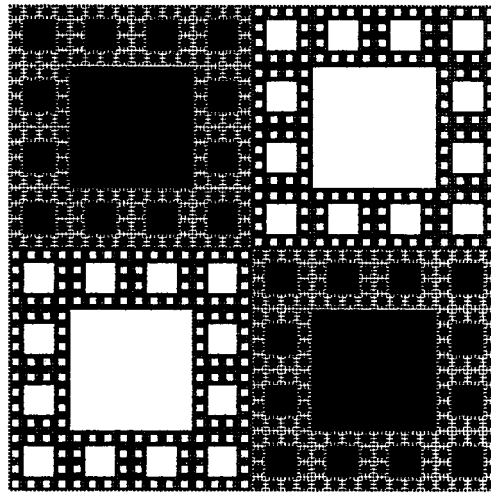
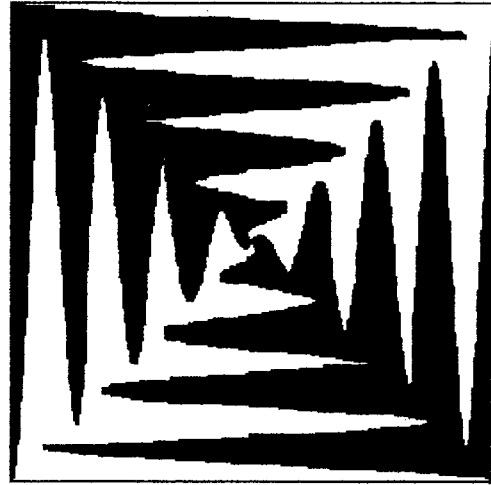


Рис. 2. Двухфазные дуальные структуры. При взаимной замене фаз и повороте на $\pi/2$ сопротивление образца остается неизменным.

одной фазы точно компенсируется сублинейностью другой. Нелинейный локально образец в целом обладает линейной ВАХ.

Интересно также рассмотреть случай длинной полоски с детерминированной неоднородностью. На рис. 3, *a*

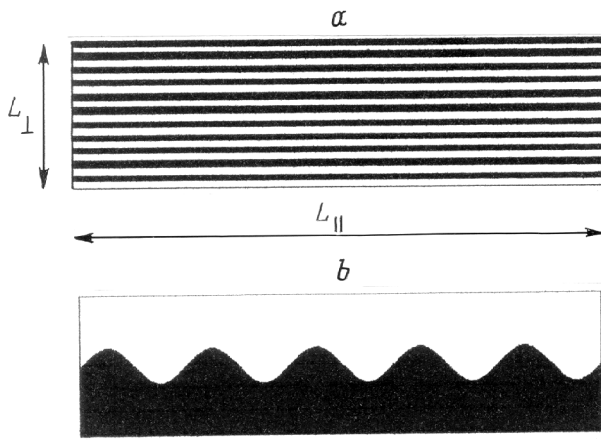


Рис. 3. Плоскостойкая (а) дуальная структура с синусоидальным разделом фаз (b).

показано слоисто-неоднородная среда, для которой не составляет труда подсчитать контактансы вдоль и поперек неоднородности. С точностью до малых более высокого порядка по нелинейности

$$G_{\parallel} = \langle G(y) \rangle; \quad X_{\parallel} = \langle X(y) \rangle; \quad G_{\perp} = 1/\langle 1/G(y) \rangle;$$

$$X_{\perp} = \langle X(y)/(G(y))^4 \rangle / \langle 1/G(y) \rangle^4. \quad (21)$$

С другой стороны, взаимная замена фаз в рассматриваемом плоско-слоистом образце не меняет контактансов $\tilde{G}_{\parallel} = G_{\parallel}, \dots$ и, согласно (12),

$$G_{\parallel} G_{\perp} = \sigma_1 \sigma_2, \quad X_{\parallel} / X_{\perp} = -(G_{\parallel} / G_{\perp})^2. \quad (22)$$

Легко показать, что учет в (21) условия (8) и подстановка последних в (22) приводит к тождеству.

Еще один пример неоднородной полоски приведен на рис. 3, b — двухфазная пленка с "шероховатой" границей раздела фаз. Если граница обладает такой симметрией, что взаимная замена фаз не приводит к изменению контактансов, то для такого образца выполняются СВ (22). Для произвольных размеров L_{\parallel} граница раздела фаз может иметь, например, форму синуса, с периодом, целое число раз укладывающимся на этой длине. Форма границы может быть и случайной. Впервые границы такого типа были введены при исследовании отражения электромагнитных волн от поверхности с мелким рельефом. В [9] для эффективной диэлектрической проницаемости было получено соотношение, аналогичное первому в (22).

Работа частично поддержана РФФИ № 97-02-16923а.

Список литературы

- [1] Yu K.W., Hui P.M. // Phys. Rev. 1994. Vol. B50. P. 13 327; Zhang X., Stroud D. // Phys. Rev. 1994. Vol. B49. P. 944.
- [2] Efros A.L., Shklovskii B.I. // Phys. St. Sol. 1976. Vol. B76. P. 475.
- [3] Stroud D., Hui P.M. // Phys. Rev. 1988. Vol. B37. P. 8919; Rammal R., Tannous C., Tremblay A.-M.S. // Phys. Rev. 1985. Vol. A31. P. 2662; Морозовский А.Е., Снарский А.А. // ЖЭТФ. 1985. Vol. 95. P. 1844; Bergman Levy and D.J. // Phys. Rev. 1994. Vol. B50. P. 3652.
- [4] Лифишиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
- [5] Stauffer D., Aharony A. Introduction to Percolation Theory. 2nd ed. London: Taylor & Francis, 1992.
- [6] Морозовский А.Е., Снарский А.А. // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. С. 674.
- [7] Keller J.B. // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34. P. 991. J. Math. Phys. 1964. Vol. 5. P. 548.
- [8] Дыхне А.А. // ЖЭТФ. 1970. Vol. 59. P. 110.
- [9] Витлина Р.З., Дыхне А.М. // ЖЭТФ. 1991. Vol. 99. P. 1758.