

01;03

Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида

© С.И. Щукин, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 3 ноября 1997 г.)

В рамках принципа минимальности потенциальной энергии замкнутой системы анализируется устойчивость сильно заряженной изолированной проводящей капли. Рассмотрение устойчивости капель эллипсоидальных форм показало, что как сферические капли, так и капли, имеющие сплюснутую сфероидальную форму, при достаточно больших зарядах претерпевают неустойчивость по одной схеме — деформируясь к вытянутому сфероиду.

Исследование устойчивости заряженных капель представляет интерес для многих областей физики и техники: от капельной модели ядра и объяснения формы планет до разработки технологий электродиспергирования жидкости и определения коэффициентов теплопереноса в гетерогенных средах [1–3]. История исследований, затрагивающих этот вопрос, восходит еще к концу прошлого века, когда Рэлей опубликовал работу [4], в которой было показано, что при определенном соотношении сил поверхностного натяжения и электростатических сил сферическая капля становится неустойчивой. В [4] было показано, что при малых возмущениях формы сферической капли наименьшей энергией возбуждения обладает основная осесимметричная мода, пропорциональная второму полиному Лежандра $\sim P_2(\cos \Theta)$. Очевидно, поэтому в более поздних работах, посвященных устойчивости заряженных капель, рассматривались только осесимметричные формы [1]. В частности, в исследованиях различных авторов, применявших несхожие подходы к нахождению устойчивых форм заряженной капли [5–7], были сделаны выводы об устойчивости сильно заряженной капли в форме осесимметричного сплюснутого сфероида вращения, что не совсем очевидно из общефизических соображений.

Целью данной работы является исследование устойчивости заряженных эллипсоидальных капель и закономерностей реализации их неустойчивости по отношению к собственному заряду. Уравнение свободной поверхности эллипсоидальной капли запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > b > c$ — полуоси.

В пределе при $a = b > c$ имеем сплюснутый осесимметричный эллипсоид, при $a > b = c$ — вытянутый осесимметричный эллипсоид.

Полная потенциальная энергия проводящей заряженной эллипсоидальной капли определяется суммой энергии сил поверхностного натяжения и электростатической

энергии заряда Q капли [5,6]

$$U_E = S\sigma + \frac{Q^2}{2C}.$$

C — емкость, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Площадь поверхности эллипсоида S запишем в виде

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \{c^2 \mathbf{F}(m, k) + (a^2 - c^2) \mathbf{E}(m, k)\};$$

$$m = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}; \quad k = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

\mathbf{F} — эллиптический интеграл первого рода, \mathbf{E} — эллиптический интеграл второго рода [8].

Емкость эллипсоида определяется известным соотношением [9]

$$\frac{1}{C} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2 + x)(b^2 + x)(c^2 + x)}} dx$$

и также может быть выражена через эллиптические интегралы [9]

$$\frac{1}{C} = \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\right) - \mathbf{F}\left(\frac{c}{b}, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\right)}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Если ввести два параметра (x и y), однозначно характеризующие форму эллипсоида

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c},$$

и записать уравнение связи величины полуосей эллипсоида с радиусом равновеликой сферы $R^3 = abc$, то, выражая a, b, c через x, y, R ,

$$a = R(x^2 y)^{\frac{1}{3}}, \quad b = R\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad c = \frac{R}{(xy^2)^{\frac{1}{3}}},$$

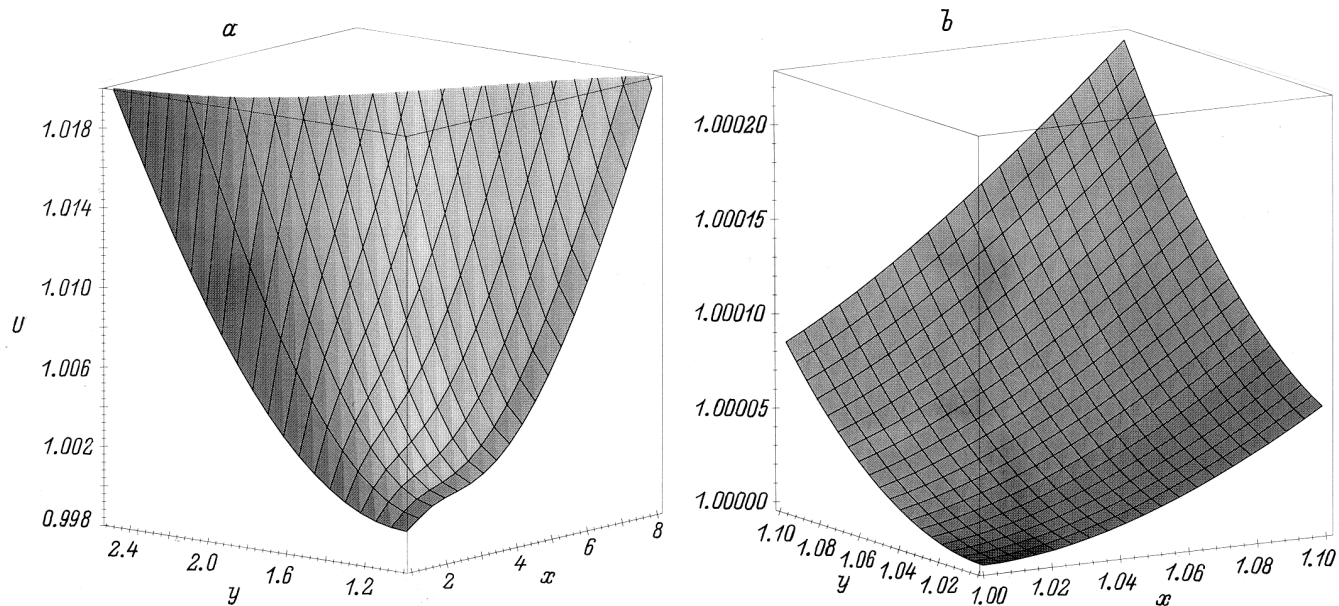


Рис. 1. *a* — зависимость безразмерной энергии эллипсоидальной заряженной капли от величины отношений полуосей x и y , характеризующих геометрию сфероида при $W = 3.5$; *b* — та же зависимость, но в более крупном масштабе в окрестности точки $x = 1, y = 1$, т.е. при весьма малых эллипсоидальных деформациях сферы.

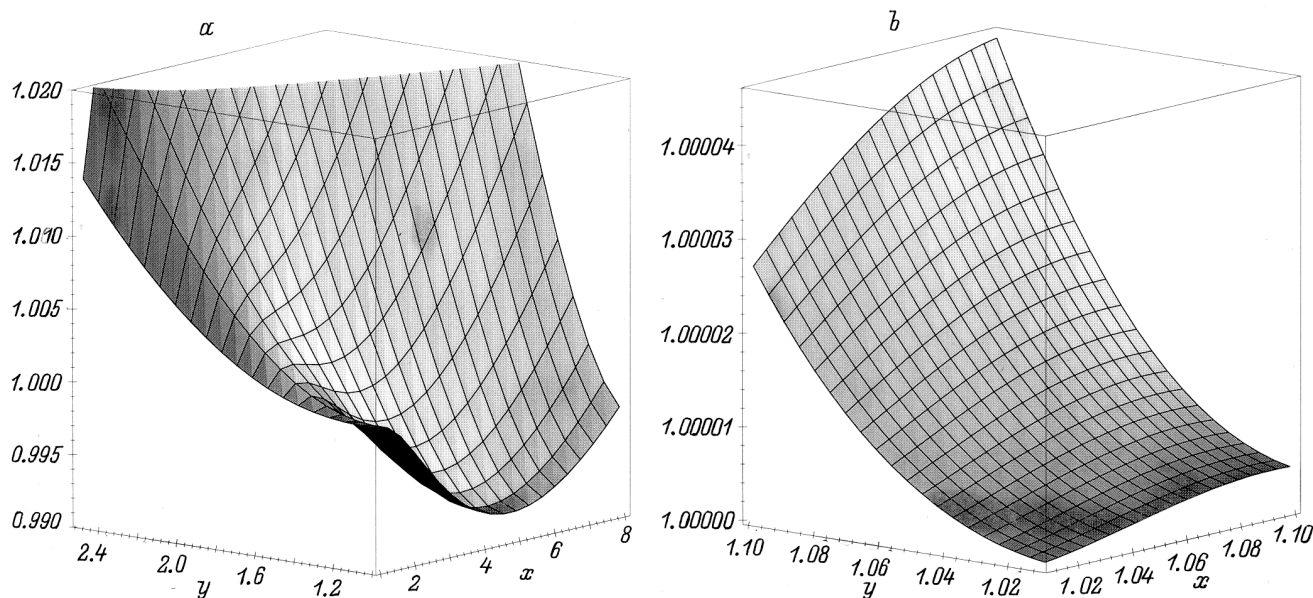


Рис. 2. *a* — зависимость безразмерной энергии эллипсоидальной заряженной капли от величины отношений полуосей x и y , характеризующих геометрию сфероида при $W = 3.9$; *b* — та же зависимость, но в более крупном масштабе в окрестности точки $x = 1, y = 1$, т.е. при весьма малых эллипсоидальных деформациях сферы.

можно записать полную потенциальную энергию заряженной эллипсоидальной капли в виде

$$U_E = 2\pi\sigma R^2 \left\{ \sqrt{x^2 y^2 - 1} + y[\mathbf{F}(m, k) + (x^2 y^2 - 1)\mathbf{E}(m, k)] + Wxy^2 \left[\mathbf{K}(p) - \mathbf{F}\left(\frac{1}{y}, p\right) \right] \right\} \cdot [x^{2/3} y^{4/3} \sqrt{x^2 y^2 - 1}]^{-1};$$

$$W = \frac{Q^2}{4\pi R^3 \sigma}; \quad m = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2 y^2}};$$

$$k = \frac{x\sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}}; \quad p = \frac{y\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}}.$$

Обезразмерим это выражение на потенциальную энергию заряженной проводящей сферической капли равно-

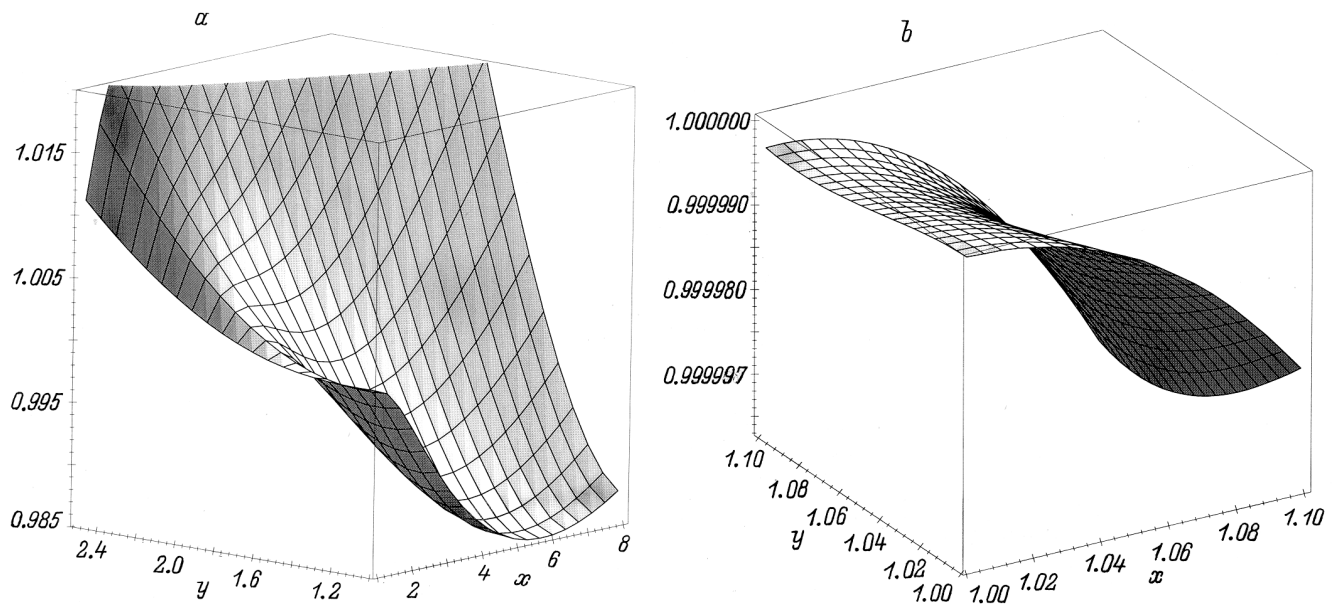


Рис. 3. *a* — зависимость безразмерной энергии эллипсоидальной заряженной капли от величины отношений полуосей x и y , характеризующих геометрию сфероида при $W = 4.1$; *b* — та же зависимость, но в более крупном масштабе в окрестности точки $x = 1, y = 1$, т.е. при весьма малых эллипсоидальных деформациях сферы.

великого объема

$$U_s = 4\pi R^2 \sigma \left(1 + \frac{1}{2}W\right)$$

и получим

$$U = \left\{ \sqrt{x^2 y^2 - 1} + y \left[\mathbf{F} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 y^2}}, \frac{x \sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}} \right) + (x^2 y^2 - 1) \mathbf{E} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 y^2}}, \frac{x \sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}} \right) \right] + W x y^2 \left[\mathbf{K} \left(\frac{y \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}} \right) - \mathbf{F} \left(\frac{1}{y}, \frac{y \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}} \right) \right] \right\} \times \left[x^{2/3} y^{4/3} \sqrt{x^2 y^2 - 1} (W + 2) \right]^{-1}; \quad U = \frac{U_E}{U_s}.$$

Графики зависимости $U = U(x, y)$ — безразмерной потенциальной энергии эллипсоидальной капли от отношения полуосей для различных значений заряда капли (параметра Рэлея W) приведены на рис. 1–4. Плоскость $x = 1$ соответствует сплюснутому эллипсоиду вращения, а плоскость $y = 1$ — вытянутому эллипсоиду вращения. Точка $x = 1, y = 1$ соответствует сферической капле, энергия которой, как следует из условия нормировки, равна 1.

Зависимость $U = U(x, y)$ при $W = 3.5$ (рис. 1, *a* и *b*) показывает, что при $W = 3.5$ энергия эллипсоидальной капли больше, чем капли сферической, причем с увеличением степени деформации увеличивается и энергия

капли. Такая тенденция проявляется как при больших деформациях (рис. 1, *a*), так и при малых деформациях (рис. 1, *b*). Таким образом, при $W \leq 3.5$ сферическая форма является устойчивой.

При $W = 3.9$ (рис. 2, *a* и *b*) зависимость $U = U(x, y)$ имеет несколько иной характер: в окрестности точки $x = 1, y = 1$ малая деформация капли приводит к увеличению ее энергии (рис. 2, *b*), в то время как при значительных деформациях на кривой $U = U(x)$ наблюдается минимум энергии у вытянутого сфероида при $x = 4.9$ (рис. 2, *a*). Более детальное исследование показывает, что минимум на кривой зависимости $U = U(x)$, т.е. энергии капли, деформированной к вытянутому сфероиду, появляется при $W > 3.546$.

При $W \geq 4$ зависимость $U = U(x, y)$ (рис. 3, *a, b*, рассчитанные при $W = 4.1$) не только имеет минимум при больших деформациях, что наблюдалось при $W = 3.9$ (рис. 2, *a*), но, как и ожидалось, становится убывающей и в области малых деформаций, а сама капля становится неустойчивой по отношению к бесконечно малым виртуальным изменениям энергии (рис. 3, *b*).

Из сравнения рис. 2, *a* и 3, *a* видно, что положение минимума зависимости $U = U(x)$ с увеличением W сдвигается в сторону увеличения x .

Исследование зависимости $U = U(x, y)$ в области минимума энергии сплюснутого сфероида показывает, что такая форма является нестабильной, как это следует из рис. 4, *a*, рассчитанном при $W = 4.3$. Видно, что переход от сплюснутого сфероида с минимальной энергией к трехосному эллипсоиду выгоден энергетически,

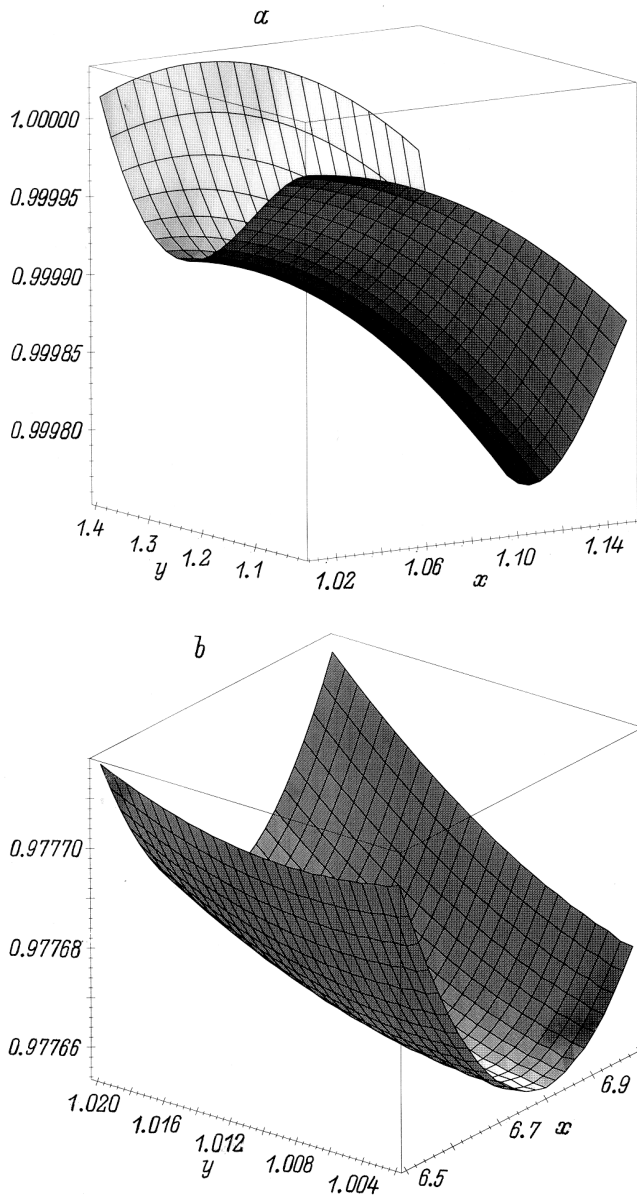


Рис. 4. Изменение энергии капли, имеющей форму сплюснутого (*a*) и вытянутого (*b*) сфероида при деформации вдоль направления, перпендикулярного оси симметрии при $W = 4.3$.

потому что приводит к дальнейшему уменьшению энергии капли. Сильно заряженная капля, имеющая форму трехосного эллипсоида, также нестабильна, ее форма эволюционирует к вытянутому сфероиду, имеющему минимальную энергию. Вытянутая сфероидальная форма является энергетически наиболее выгодной для сильно заряженной капли, что можно видеть из рис. 4, *b*. При $W > 4$ минимум функции $U(x, 1)$ является глобальным минимумом функции $U(x, y)$, т. е. деформация вытянутого сфероида минимальной энергии вдоль направления, перпендикулярного оси симметрии, приводит к возрастанию энергии капли.

Заряженная сферическая капля является устойчивой по отношению к бесконечно малым возмущениям формы при $W < 4$. В диапазоне значений параметра Рэлея $3.546 < W < 4$ на зависимости $U = U(x)$ кроме минимума при $x = 1$ появляется еще один при $x \geq 3$, поэтому достаточно энергичные внешние воздействия могут приводить к бифуркации формы капли. При значениях параметра Рэлея $W > 4$ сферическая капля неустойчива. Состояние капли в виде сплюснутого сфероида является неустойчивым при любых значениях параметра Рэлея: при $W < 4$ энергия такой капли больше, чем у сферической, а при $W > 4$ капля, имеющая форму сплюснутого сфероида, вытягивается по одному из направлений, перпендикулярных оси симметрии, переходя таким образом к форме трехосного эллипсоида и, далее, к вытянутому сфероиду, энергия которого минимальна.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Bastrukov S.I. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 2. P. 1917–1922.
- [3] Баструков С.И., Молодцова И.В. // ДАН РАН. 1996. Т. 350. № 3. С. 321–323.
- [4] Rayleigh // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [5] Ailam G., Gallily I. // Phys. Fluid. 1962. Vol. 5. N 5. P. 575–582.
- [6] Bassaran O.A., Scriven L.E. // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
- [7] Grigor'ev A.I., Firstov A.A., Shiryayeva S.O. // Proc. IX Intern. Conf. on Atmospheric Electricity. St. Petersburg, 1992. P. 450–453.
- [8] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе). М.: Наука, 1955. 299 с.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.