01;03

Задача Пуазейля для эллипсоидально-статистического уравнения и почти зеркальных граничных условий

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский педагогический университет,
Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 12 мая 1997 г.)

В широком диапазоне чисел Кнудсена для случая коэффициентов аккомодации тангенциального импульса стенок канала, много меньших единицы, получено аналитическое решение задачи Пуазейля. Выведено выражение для потока массы, справедливое для случая чисел Кнудсена, много меньших, чем обратные величины коэффициентов аккомодации. Показано, что существует новый промежуточный режим течения, когда выражение для потока массы отличается от классического (макроскопического).

Для случая коэффициентов аккомодации тангенциального импульса стенок канала много меньших единицы получено аналитическое решение в широком диапазоне чисел Кнудсена. Выведено выражение для потока массы в канале как функции градиента давления и размера канала. Это выражение справедливо для чисел Кнудсена, много меньших, чем обратные величины коэффициентов аккомодации. Таким образом, получено обобщение известной макроскопической теории течения газа в канале, справедливой для случая $\mathrm{Kn} \ll 1$, на случай $1 \ll \mathrm{Kn} \ll q$, $q = \max(q_1, q_2)$. Показано, что существует новый промежуточный режим течения при $q \ll \mathrm{Kn} \ll 1$, когда выражение для потока массы отличается от классического (макроскопического).

1. В последние годы повышенный интерес вызывают задачи о движении газа в каналах (см., например, [1–4]).При этом рассматриваются, как правило, чисто диффузные граничные условия. Исключение представляет случай аналитического решения для зеркальных граничных условий в задаче о поведении электронов в слое металла [3,4]. Однако в кинетической теории газов чисто зеркальные граничные условия обычно приводят к тривиальному результату. В то же время интерес к задачам с ограниченной геометрией в настоящее время растет. Так, в [5] рассматривалась плоская задача Пуазейля в почти непрерывном режиме с учетом скольжений первого и второго порядков. Численно решена в [6] задача Пуазейля в цилиндрической трубе. В [7] движение газа в слое рассматривалось так же, как и в [6], методом разложения в ряды Неймана. Во всех этих работах использовались чисто диффузные граничные условия. При этом остался неисследованным противоположный случай граничных условий, близких к зеркальным. Цель настоящей работы — устранить этот пробел.

Обычно для аналитического решения граничных задач используются два метода: метод Винера–Хопфа и метод Кейза [8]. Последний обладает тем преимуществом, что позволяет получить не только значения макропараметров, но и функцию распределения. В настоящей работе используется метод Кейза. В работах [3,4] подход Кейза использовался для разработки метода решения кинетических задач для слоя с зеркальными граничными условиями. В настоящей работе этот метод обобщается на случай граничных условий, близких к зеркальным. Рассматривается классическая задача Пуазейля о течении газа в плоском канале под действием градиента давления. Для случая коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул на стенках канала, много меньших единицы, получено аналитическое решение задачи в широком диапазоне чисел Кнудсена. Используется эллипсоидально-статистическая модель кинетического уравнения, дающая правильное число Прандтля.

2. Рассмотрим плоский канал шириной $L = 2d$, в котором поддерживается продольный градиент давления. Будем предполагать, что течение газа в канале носит стационарный характер. Кинетику процесса будем описывать с помощью уравнения Больцмана с эллипсоидально-статистической моделью интеграла столкновений [9]. Введем систему координат с центром в середине канала и осью x, перпендикулярной стенке. Пусть ось z направлена вдоль градиента давления. Учтем, что процесс носит изотермический характер. Будем считать, что относительный перепад давления на длине свободного пробега мал. В этом случае задача допускает линеаризацию и функцию распределения можно искать в виде $f = f_0(1+h)$. Здесь

$$f_0 = n(z)\big(m/2\mathrm{k}T\big)^{3/2}\exp\left[-mv^2/2\mathrm{k}T\right],$$

где n — концентрация молекул газа, m — масса молекулы, T — температура, $\mathbf{v}$ — молекулярная скорость, k — постоянная Больцмана, функция h — линейная поправка к локально равновесной функции f_0.

Для данной задачи эллипсоидально-статистическое уравнение можно рассматривать в виде

$$v_x\frac{\partial h}{\partial x}+v_z\frac{\partial \ln n}{\partial z}=\nu\left[\frac{m}{\mathrm{k}T}v_zU-2\Big(\frac{m}{2\mathrm{k}T}\Big)^2v_xv_zP_{xz}-h\right]. \quad (1)$$

Здесь

$$U=\Big(\frac{m}{2\pi\,\mathrm{k}T}\Big)^{3/2}\int\exp\left[-\frac{mv^2}{2\mathrm{k}T}\right]v_zhd^3v,$$

$$P_{xz}=\left(\frac{m}{2\pi\,\mathrm{k}\,T}\right)^{3/2}\int\exp\left[-\frac{mv^2}{2\mathrm{k}\,T}\right]v_xv_zhd^3v,$$

ν — постоянная, имеющая физический смысл частоты столкновений.

Введем безразмерные переменные $\mathbf{C}=\sqrt{\beta}\mathbf{v}$, $U'=\sqrt{\beta}U$, $x'=\sqrt{\beta}\nu x$, $d'=\sqrt{\beta}d\nu$, $\beta=m/2\,\mathrm{k}T$. В дальнейшем штрихи у величин U', x', d' будем опускать. При этом уравнение (1) перепишется в виде

$$C_x\frac{\partial h}{\partial x}+h+C_zK=2\pi^{-3/2}\times\int e^{-C'^2}C_zC'_z(1-C_xC'_x)hd^3C', \quad (2)$$

где

$$K=\frac{\partial\ln n}{\partial z}.$$

Диффузно-зеркальные граничные условия на функцию h имеют следующий вид:

$$h(-d,\mathbf{C})=(1-q_1)h(-d,\mathbf{C}-2\mathbf{n}_1,\mathbf{C}),\quad C_x>0,$$

$$h(d,\mathbf{C})=(1-q_2)h(d,\mathbf{C}-2\mathbf{n}_2\mathbf{C}),\quad C_x<0. \quad (3)$$

Здесь q_1 и q_2 — коэффициенты аккомодации тангенциального импульса (коэффициенты зеркальности) для нижней и верхней поверхностей соответственно; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы нормали к нижней и верхней поверхностям, направленные внутрь канала. Из вида уравнения (2) и граничных условий (3) видно, что функцию h можно искать в виде $h=v_z\psi(x,\mu)$, $\mu=v_x$. При этом уравнение (3) можно преобразовать к уравнению

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,\mu)\ +K=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu'^2}(1-\mu\mu')\psi(x,\mu')d\mu'. \quad (4)$$

Граничные условия (3) для функции ψ перепишутся так:

$$\psi(-d,\mu)=(1-q_1)\psi(-d,-\mu),\quad \mu>0,$$

$$\psi(d,\mu)=(1-q_2)\psi(d,-\mu),\quad \mu<0. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что частным решением уравнения (4) является функция

$$\psi_0(x,\mu)=K\left[\frac{3}{2}x^2-2x\mu+2\mu^2+a_0+a_1\left(x-\frac{2}{3}\mu\right)\right],$$

где a_0 и a_1 — произвольные постоянные.

3. Будем искать решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (4), в виде

$$\psi_\eta(x,\mu)=\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)$$

с условием

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu'^2}\Phi(\eta,\mu')d\mu'\equiv 1. \quad (6)$$

Получим характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta. \quad (7)$$

При $-\infty<\eta<+\infty$ решение уравнений (6) и (7) возьмем в пространстве обобщенных функций [10]

$$\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+e^{\eta^2}\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu).$$

Здесь символ Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ — дисперсионная функция,

$$\lambda(z)=1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}z\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau^2}\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Составим общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (4), в виде разложения по собственным функциям $\Phi(\eta,\mu)$ характеристического уравнения (7)

$$\psi_c(x,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x/\eta}\Phi(\eta,\mu)a(\eta)d\eta, \quad (8)$$

где функция $a(\eta)$ называется коэффициентом непрерывного спектра.

Подставим общее решение уравнения (4) $\Psi(x,\mu)=\psi_0(x,\mu)+\psi_c(x,\mu)$ в граничные условия (5). Получаем

$$\left[\psi_c(-d,\mu)-\psi_c(-d,-\mu)\right]+q_1\psi_c(-d,-\mu)=-\left[\psi_0(-d,\mu)-\psi_0(-d,-\mu)\right]-q_1\psi_0(-d,-\mu),\quad \mu>0, \quad (9)$$

$$\left[\psi_c(d,\mu)-\psi_c(d,-\mu)\right]+q_2\psi_c(d,-\mu)=-\left[\psi_0(d,\mu)-\psi_0(d,-\mu)\right]-q_2\psi_0(d,-\mu),\quad \mu<0. \quad (10)$$

Заметим, что

$$\psi_0(d,\mu)-\psi_0(d,-\mu)=2K\left(-2d\mu-\frac{2}{3}a_1\mu\right),$$

$$\psi_c(x,\mu)-\psi_c(x,-\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta,\mu)\times\left[e^{-x/\eta}a(\eta)-e^{x/\eta}a(-\eta)\right]d\eta.$$

Из условий (9) и (10) получаем интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta,\mu)\left[e^{d/\eta}a(\eta) - e^{-d/\eta}a(-\eta)\right]d\eta + q_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-d/\eta}\Phi(\eta,\mu)a(-\eta)d\eta = \mu\varphi_1(d,q_1) - q_1\varphi_2(\mu,d), \quad \mu > 0, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta,\mu)\left[e^{-d/\eta}a(\eta) - e^{d/\eta}a(-\eta)\right]d\eta + q_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{d/\eta}\Phi(\eta,\mu)a(-\eta)d\eta = \mu\varphi_1(-d,q_2) - q_2\varphi_2(\mu,-d), \quad \mu < 0. \tag{12}$$

Здесь

$$\varphi_1(d,q_i) = 2K\left(2d + \frac{2}{3}a_1 + q_i d - \frac{1}{3}q_i a_1\right),$$

$$\varphi_2(\mu,d) = K\left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 - a_1 d + 2\mu^2\right).$$

Первый интеграл в левой части уравнений (11) и (12) является нечетной функцией по μ. Предположим, что величины q_1 и q_2 малы, т.е. $q_i \ll 1$; $i = 1, 2$. Для широкого канала, когда $\mathrm{Kn} = l/2d \ll 1$ (l — длина свободного пробега молекул), вторые интегралы в левых частях уравнений (11) и (12) можно опустить. В самом деле, связь между обоими интегралами осуществляется интегралом столкновений уравнения (4), из которого видно, что их отношение имеет порядок Kn. Поэтому вторые интегралы в уравнениях (11) и (12) имеют порядок $q_i\,\mathrm{Kn}$ по отношению к первым. Предположим, что выполняется соотношение $q_i\,\mathrm{Kn} \ll 1$; $i = 1, 2$. В этом случае вторыми интегралами в левых частях уравнений (11) и (12) можно, как указывалось, пренебречь. Итак, далее будем рассматривать уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta,\mu)\left[e^{d/\eta}a(\eta) - e^{-d/\eta}a(-\eta)\right]d\eta = \mu\varphi_1(d,q_1) - q_1\varphi_2(\mu,d), \quad \mu > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta,\mu)\left[e^{-d/\eta}a(\eta) - e^{d/\eta}a(-\eta)\right]d\eta = \mu\varphi_1(-d,q_2) - q_2\varphi_2(\mu,-d), \quad \mu < 0.$$

Левые части этих уравнений — нечетные функции. Распространим оба уравнения на всю числовую ось, продолжая нечетным образом их правые части. Получаем уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta,\mu)\left[e^{d/\eta}a(\eta) - e^{-d/\eta}a(-\eta)\right]d\eta = \mu\varphi_1(d,q_1) - q_1\varphi_2(\mu,d)\,\mathrm{sign}\,\mu, \quad -\infty < \mu < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta,\mu)\left[e^{-d/\eta}a(\eta) - e^{d/\eta}a(-\eta)\right]d\eta = \mu\varphi_1(-d,q_2) + q_2\varphi_2(\mu,-d)\,\mathrm{sign}\,\mu, \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

4. Подставляя в эти уравнения собственные функции $\Phi(\eta,\mu)$ и вводя две вспомогательные функции

$$N(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta\left[e^{d/\eta}a(\eta) - e^{-d/\eta}a(-\eta)\right]\frac{d\eta}{\eta - z}, \tag{13}$$

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta\left[e^{-d/\eta}a(\eta) - e^{d/\eta}a(-\eta)\right]\frac{d\eta}{\eta - z}, \tag{14}$$

приходим к двум краевым задачам Римана

$$\lambda^+(\mu)\left[N^+(\mu) - \sqrt{\pi}\varphi_1(d,q_1)\mu\right] - \lambda^-(\mu)\left[N^-(\mu) - \sqrt{\pi}\varphi_1(d,q_1)\mu\right] = -q_1\varphi_2(\mu,d)\,\mathrm{sign}\,\mu, \quad -\infty < \mu < +\infty, \tag{15}$$

$$\lambda^+(\mu)\left[M^+(\mu) - \sqrt{\pi}\varphi_1(-d,q_2)\mu\right] - \lambda^-(\mu)\left[M^-(\mu) - \sqrt{\pi}\varphi_1(-d,q_2)\mu\right] = q_2\varphi_2(\mu,-d)\,\mathrm{sign}\,\mu, \quad -\infty < \mu < +\infty. \tag{16}$$

Учитывая поведение функций, входящих в (15) и (16), получим общие решения этих задач

$$N(z) = 2\sqrt{\pi}K\left[-2d + \frac{2}{3}a_1 + q_1\left(d - \frac{1}{3}a_1\right)\right]z - q_1K\left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 - a_1 d\right)\frac{\psi(z)}{\lambda(z)} - 2q_1K\frac{z + z^2\psi(z)}{\lambda(z)}, \tag{17}$$

$$M(z) = 2\sqrt{\pi}K\left[2d + \frac{2}{3}a_1 - q_2\left(d + \frac{1}{3}a_1\right)\right]z + q_2K\left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 - a_1 d\right)\frac{\psi(z)}{\lambda(z)} + 2q_2K\frac{z + z^2\psi(z)}{\lambda(z)}. \tag{18}$$

Здесь

$$\psi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign}\mu)\mu e^{-\mu^2}\frac{d\mu}{\mu - z}.$$

Заметим, что N, M, ψ — нечетные функции. Чтобы полученные решения (17) и (18) можно было принять в качестве вспомогательных функций N и M, введенных соответственно равенствами (13) и (14), устраним у решений (17) и (18) простой полюс в точке $z = \infty$. Это достигается выбором a_0 и a_1 из уравнений

$$\sqrt{\pi}\Big[-d(2-q_1) + \frac{a_1}{3}(2-q_1)\Big] - q_1\left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 - a_1 d + 2\right) = 0,$$

$$\sqrt{\pi}\Big[d(2-q_2) + \frac{a_1}{3}(2-q_2)\Big] + q_2\left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 + a_1 d + 2\right) = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$a_0 = -\frac{4\sqrt{\pi}d + (q_1+q_2)\left(2 + \frac{9}{2}d^2 - 2\sqrt{\pi}d\right) + q_1q_2\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}d - 1\right)\left(2 + \frac{3}{2}d^2 - \sqrt{\pi}d\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}d - 1\right)q_1q_2 + q_1 + q_2},$$

$$a_1 = -\frac{3d(q_1 - q_2)}{\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}d - 1\right)q_1q_2 + q_1 + q_2}.$$

5. Вычислим поток массы газа в канале

$$J = 2d\int\limits_{-d}^{d} j(x)dx,$$

где

$$j(x) = \int m\varphi f_0 v_y^2 d^3v = \rho\frac{1}{\sqrt{\pi\beta}}\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\psi(x,\mu)d\mu = \frac{\rho}{\sqrt{\beta}}J_1$$

есть плотность потока массы, а

$$J_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\psi(x,\mu)d\mu$$

есть безразмерная плотность потока массы газа.

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\psi(x,\mu)d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\psi_0(x,\mu)d\mu + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}d\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x/\eta}\Phi(\eta,\mu)d\eta$$
$$= \sqrt{\pi}K\left(\frac{3}{2}x^2 + 1 + a_0 + a_1x\right) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x/\eta}a(\eta)d\eta.$$

Следовательно, поток массы газа равен

$$J = \frac{2d\rho}{\sqrt{\pi}}K\left[\frac{1}{2}d^3 + (1+a_0)d\right] + \frac{2d\rho}{\sqrt{\pi\beta}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta\operatorname{sh}\frac{d}{\eta}a(\eta)d(\eta).$$

Из формул (13), (17) и (14), (18) соответственно имеем

$$2\pi i\eta\Big(e^{d/\eta}a(\eta) - e^{-d/\eta}a(-\eta)\Big) = -q_1K\left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 - a_1d + 2\eta^2\right)\times\left(\frac{\psi^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)} - \frac{\psi^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\right) - 2q_1K\eta\left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)}\right),$$

$$2\pi i\eta\Big(e^{-d/\eta}a(\eta) - e^{d/\eta}a(-\eta)\Big) = -q_2K\left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 + a_1d + 2\eta^2\right)\times\left(\frac{\psi^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)} - \frac{\psi^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\right) - 2q_2K\eta\left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)}\right).$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$4\pi i\eta\Big[a(\eta) + a(-\eta)\Big]\operatorname{sh}\frac{d}{\eta} = -2K\eta\left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)}\right)(q_1+q_2) + K\left(\frac{\psi^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)} - \frac{\psi^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\right)\times\left[a_1d(q_1-q_2) - \left(\frac{3}{2}d^2 + a_0 + 2\eta^2\right)(q_1+q_2)\right]. \quad (19)$$

Заметим, что

$$\frac{\psi^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)} - \frac{\psi^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} = 2\sqrt{\pi}i\frac{|\eta|e^{-\eta^2}t(-|\eta|)}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)},$$

$$\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} = -\frac{2\sqrt{\pi}i\eta e^{-\eta^2}}{\lambda^+(\eta)\cdot\lambda^-(\eta)},$$

где

$$t(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \frac{d\tau}{\tau - \eta}. \qquad (20)$$

Обозначим

$$\gamma_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\eta|^k e^{-\eta^2} t(-|\eta|) d\eta}{|\lambda^+(\eta)|^2} \qquad (k = 1, 3),$$

$$\delta = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2 e^{-\eta^2} d\eta}{|\lambda^+(\eta)|^2}. \qquad (21)$$

Численные оценки показывают, что $\gamma_1 \approx 1/\sqrt{\pi}$, $\gamma_3 \approx 3/(2\sqrt{\pi})$, а с помощью контурного интегрирования находим, что $\delta \approx 3/\sqrt{\pi}$. Учитывая равенства (20) и обозначения (21), после интегрирования равенства (19) от $-\infty$ до $+\infty$, получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta a(\eta) \operatorname{sh} \frac{d}{\eta} d\eta = \sqrt{\pi} K \left\{ q\delta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2} d^2 + a_0 \right) \gamma_1 + 2\gamma_3 \right] q + \frac{1}{2} a_1 d p \gamma_1 \right\},$$

где $q = (q_1 + q_2)/2$, $p = (q_1 - q_2)/2$.

Следовательно, поток массы равен

$$J = \frac{2d\rho}{\sqrt{\pi}} K \left[\frac{1}{2} d^3 + (1 + a_0) d + q(\delta - \gamma_3) - q\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} d^2 + a_0 \right) \gamma_1 + \frac{1}{2} p a_1 d \gamma_1 \right]$$

или в размерном виде

$$J = 3\frac{\eta}{P} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{l} \right)^3 + (1 + a_0) \frac{d}{l} + q(\delta - \gamma_3) - \frac{1}{2} q \left(\frac{3}{2} \left(\frac{d}{l} \right)^2 + a_0 \right) \gamma_1 + \frac{1}{2} p a_1 \frac{d}{l} \gamma_1 \right] |\nabla P|, \qquad (22)$$

где P — давление газа.

Рассмотрим случай широкого канала, когда число Кнудсена $\mathrm{Kn} = l/2d \ll 1$. Будем считать, коэффициенты аккомодации q_1 и q_2 являются величинами одного порядка и будем обозначать, как и ранее, $q = (q_1 + q_2)/2$. Возможны два режима течения газа в широком канале. Первый режим соответствует случаю, когда выполняется неравенство $\mathrm{Kn} \ll q$. При этом выражение для потока массы приобретает следующий вид (при записи в размерных переменных):

$$J = -\frac{2\rho}{3\eta} d^3 L \frac{dP}{dz},$$

где L — поперечный размер канала.

Эта формула совпадает с известной формулой для потока массы в канале, полученной в гидродинамическом приближении [11].

Существует и другой режим течения газа, когда $q \ll \mathrm{Kn} \ll 1$. В этом случае выражение для потока массы газа в канале принимает вид

$$J = -\frac{8}{q_1 + q_2} \frac{\rho}{\eta} L d^2 l \frac{dP}{dz}.$$

Таким образом, для почти зеркальных граничных условий существует режим, когда, несмотря на малость числа Кнудсена, выражение для потока массы газа в канале отлично от гидродинамического. Переход к чисто гидродинамическому режиму осуществляется при более сильном условии $\mathrm{Kn} \ll q$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00333).

Список литературы

[1] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
[2] Неравновесные явления: уравнение Больцмана / Под ред. Дж.Л. Либовица, Е.У. Монтролла. М.: Мир, 1986. 272 с.
[3] *Латышев А.В., Лесскис А.Г., Юшканов А.А.* // Теор. и матем. физика. 1992. Т. 90. № 2. С. 179.
[4] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 1993. Т. 33. № 2. С. 259.
[5] *Loyalka S.K., Hickey K.A.* // Physica A. 1989. Vol. 160. N 3. P. 395.
[6] *Loyalka S.K., Hamoody S.K.* // Phys. Fluids. 1990. Vol. 2. N 11. P. 2061.
[7] *Hasegawa M., Sone Y.* // Phys. Fluids. 1991. Vol. 3. N 3. P. 466.
[8] *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
[9] *Holway L.H.* // Phys. Fluids. 1966. Vol. 9. P. 1658.
[10] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
[11] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 497 с.