

01;03

## К расчету ударно-волновых процессов в пузырьковых жидкостях

© В.С. Суров

Челябинский государственный университет,  
454021 Челябинск, Россия

(Поступило в Редакцию 25 ноября 1996 г. В окончательной редакции 10 марта 1998 г.)

Приведено полное решение задачи распада произвольного разрыва для односкоростной модели пузырьковой жидкости, с использованием которой анализируется распространение и взаимодействие ударных волн в жидкости с пузырьками газа.

### Введение

Проблемам распространения волн в двухфазных газожидкостных средах пузырьковой структуры посвящена обширная литература, обзор которой приведен в [1–3]. В данной работе при исследовании волновых явлений в пузырьковых жидкостях используется газодинамический подход, при котором не учитываются мелкомасштабные пульсации пузырей, что правомерно, если рассматриваются газожидкостные суспензии с малым содержанием газа в смеси. Обычно считается, что пузырьки газа в ударной волне (УВ) сжимаются по изотермическому закону, поэтому в расчетах, как правило, используется модель равновесной дисперсной среды Кэмпбелла–Питчера [4]. Однако, имеются опыты, в которых эта модель дает неудовлетворительные результаты. К подобным экспериментам относятся опыты, где отмечен "аномально" низкий уровень давления в отраженной от преграды УВ при добавлении в водно-пузырьковую смесь небольшого количества поверхностно-активного вещества [5]. Аналогичные результаты имеют место при разбавлении исходной смеси глицерином, а также при повышенном начальном давлении [6]. Как показано ниже, для указанных опытов более предпочтительной является адиабатическая модель пузырьковой жидкости Рахматулина [7]. Для рассмотренной в работе модели пузырьковой жидкости приведено полное решение задачи распада произвольного разрыва (РПР), с использованием которой анализируется ряд имеющих практическое значение автомодельных задач. Анализ приведенных результатов позволяет выявить условия, при которых справедлива та или иная модель пузырьковой жидкости.

### Модель пузырьковой жидкости

Рассмотрим односкоростную однодавленческую модель сплошной среды для бинарной гетерогенной смеси, состоящую из сжимаемых газовой и жидкой фракций. Одномерное течение каждой из составляющих смесь компонентов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_l \rho_l^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l^0 u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_l \rho_l^0 u}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l p + \alpha_l \rho_l^0 u^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g^0 (\varepsilon_g + 0.5u^2)}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_g \rho_g^0 u (\varepsilon_g + 0.5u^2) + \alpha_g p u]}{\partial x} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_l \rho_l^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l^0 u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_l \rho_l^0 u}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l p + \alpha_l \rho_l^0 u^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l^0 (\varepsilon_l + 0.5u^2)}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_l \rho_l^0 u (\varepsilon_l + 0.5u^2) + \alpha_l p u]}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

выражающими законы сохранения массы, импульса и энергии. Здесь приняты обозначения:  $\rho_g$  и  $\rho_l$  — приведенные плотности;  $\alpha_g = \rho_g / \rho_g^0$  и  $\alpha_l = \rho_l / \rho_l^0$  — объемные доли;  $\rho_g^0$  и  $\rho_l^0$  — истинные плотности;  $\varepsilon_g$  и  $\varepsilon_l$  — удельные внутренние энергии (индексами  $g$  и  $l$  отмечены параметры, относящиеся к газовой и жидкой составляющим);  $p$  и  $u$  — давление и скорость, общие для всех компонентов смеси. Складывая соответствующие уравнения систем (1) и (2), а также учитывая, что  $\alpha_g + \alpha_l = 1$ , получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p)u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E = \varepsilon + 0.5u^2$  — полная удельная энергия смеси;  $\rho \varepsilon = \rho_g \varepsilon_g + \rho_l \varepsilon_l$  — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу объема смеси;  $\rho = \rho_g + \rho_l = \alpha_g \rho_g^0 + \alpha_l \rho_l^0$  — плотность смеси.

Будем считать, что термодинамические параметры жидкости подчиняются двучленному уравнению состояния

$$\varepsilon_l = \frac{p - c_{l*}^2 (\rho_l^0 - \rho_{l*})}{(\gamma_l - 1) \rho_l^0}, \quad (4)$$

где  $\gamma_l$ ,  $\rho_{l*}$ ,  $c_{l*}$  — константы, определяющие ее свойства.

В частности, для воды и глицерина они имеют следующие значения:  $\gamma_l = 5.59$ ,  $\rho_{l*} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_{l*} = 1515 \text{ m/s}$  и  $\gamma_l = 7.85$ ,  $\rho_{l*} = 1260 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_{l*} = 1923 \text{ m/s}$  соответственно. Газ будем считать идеальным с показателем адиабаты  $\gamma_g$ , для которого уравнение состояния имеет вид

$$\varepsilon_g = \frac{p}{(\gamma_g - 1) \rho_g^0}.$$

Таким образом, уравнение состояния смеси принимает вид

$$\varepsilon = \frac{\alpha_g p}{(\gamma_g - 1) \rho} + \frac{\alpha_l [p - c_{l*}^2 (\rho_l^0 - \rho_{l*})]}{(\gamma_l - 1) \rho}. \quad (5)$$

Предположим, что зависимости  $\rho_g^0 = \phi_g(p)$  и  $\rho_l^0 = \phi_l(p)$  — известные функции. В частности, для двучленного уравнения состояния, в случае изоэнтропических процессов, плотность жидкой компоненты связана с давлением соотношением

$$\rho_l^0 = \phi_l(p) = \rho_{l0}^0 \left( \frac{p+p_*}{p_0+p_*} \right)^{\frac{1}{\gamma_l}}, \quad p_* = \rho_{l*} c_{l*}^2 / \gamma_l. \quad (6)$$

Для газовой компоненты имеем аналогичную зависимость

$$\rho_g^0 = \phi_g(p) = \rho_{g0}^0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_g}}. \quad (7)$$

Нижним индексом 0 отмечены значения параметров для некоторого начального состояния. Из условия сохранения массы следует соотношение

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\alpha_{g0} \rho_{g0}^0}{\phi_g(p)} + \frac{\alpha_{l0} \rho_{l0}^0}{\phi_l(p)}. \quad (8)$$

Подсчитаем скорость звука в смеси. После подстановки (6) и (7) в (8) получим уравнение состояния смеси

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \alpha_{l0} \left( \frac{p_0+p_*}{p+p_*} \right)^{\frac{1}{\gamma_l}} + \alpha_{g0} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma_g}}. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по плотности  $\rho$  и учитывая, что  $c^2 = dp/d\rho$ , найдем квадрат скорости звука в смеси

$$c^2 = \frac{\rho_0}{\rho^2 \left[ \frac{\alpha_{l0}}{\gamma_l(p+p_*)} \left( \frac{p_0+p_*}{p+p_*} \right)^{\frac{1}{\gamma_l}} + \frac{\alpha_{g0}}{\gamma_g p} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma_g}} \right]}. \quad (10)$$

Соответствующие инварианты Римана имеют вид

$$s = u - \sigma(p); \quad r = u + \sigma(p),$$

$$\sigma(p) = \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho c}$$

$$= \int_{p_1}^p \sqrt{\frac{\frac{\alpha_{l0}}{\gamma_l(p+p_*)} \left( \frac{p_0+p_*}{p+p_*} \right)^{\frac{1}{\gamma_l}} + \frac{\alpha_{g0}}{\gamma_g p} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma_g}}}{\rho_0}} dp. \quad (11)$$

Будем считать, что при ударном сжатии каждая компонента смеси сжимается по индивидуальной ударной адиабате. Для двучленного уравнения состояния(4) соответствующая ударная адиабата имеет вид

$$\rho_l^0 = \rho_{l0}^0 \frac{\chi_l(p+p_*) + p_0 + p_*}{\chi_l(p_0+p_*) + p + p_*}, \quad \chi_l = \frac{\gamma_l + 1}{\gamma_l - 1}. \quad (12)$$

Для газовой компоненты имеем аналогичную зависимость

$$\rho_g^0 = \rho_{g0}^0 \frac{\chi_g p + p_0}{\chi_g p_0 + p}, \quad \chi_g = \frac{\gamma_g + 1}{\gamma_g - 1}. \quad (13)$$

Таким образом, с учетом (12), (13) уравнение ударной адиабаты смеси принимает вид

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \alpha_{l0} \frac{\chi_l(p_0+p_*) + p + p_*}{\chi_l(p+p_*) + p_0 + p_*} + \alpha_{g0} \frac{\chi_g p_0 + p}{\chi_g p + p_0}. \quad (14)$$

При использовании изотермического варианта модели Рахматулина, в которой процесс сжатия газа в пузырьках при переходе через фронт УВ полагался изотермическим, соответствующее уравнение состояния смеси имеет вид

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \alpha_{l0} \frac{\chi_l(p_0+p_*) + p + p_*}{\chi_l(p+p_*) + p_0 + p_*} + \alpha_{g0} \frac{p_0}{p}. \quad (15)$$

Заметим, что в отличие от подхода Кэмпбелла–Питчера [4] в использованной модели учитывается влияние сжимаемости жидкости.

Уравнения (3) по внешнему виду совпадают с соответствующими газодинамическими для однофазной среды, поэтому при рассмотрении односкоростных газожидкостных течений оказывается возможным использование развитых в газовой динамике методов исследования. Немаловажную роль при этом играет задача РПР или задача Римана. Можно показать, что рассматриваемая пузырьковая жидкость с уравнением состояния (5) относится к типу нормальных "газов", удовлетворяя неравенствам Бете–Вейля [8]:  $\varepsilon_{VS} < 0$ ;  $\varepsilon_{VVV} < 0$ , где  $S$  — энтропия,  $V = 1/\rho$  — удельный объем. Следовательно, для рассматриваемой среды УВ устойчивы и, кроме того, решение задачи РПР единственно [9]. Отметим также, что задача РПР входит в качестве основного элемента в численные схемы типа Годунова [8]. Включение приведенного в работе алгоритма РПР в указанные схемы позволит существенно расширить круг исследуемых задач и, в частности, перейти к исследованию многомерных задач, что при использовании других моделей пузырьковых жидкостей проблематично. Полное решение задачи РПР для пузырьковой жидкости приведено в приложении.

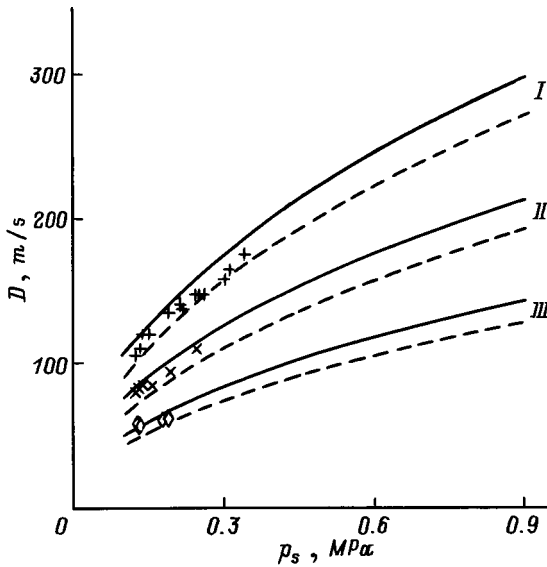
## Взаимодействие ударной волны с твердой стенкой

Пусть по покоящейся однородной газожидкостной смеси с объемной концентрацией газа  $\alpha_{g0}$  и давлением  $p_0$  движется УВ с известным давлением за ее фронтом  $p_s$ . Остальные параметры в УВ, также помеченные индексом  $s$ , вычисляются из соотношений Ренкина–Гюгонио с привлечением уравнения состояния (14)

$$\rho_s = \frac{\rho_0}{\alpha_{l0} \lambda_l + \alpha_{g0} \lambda_g}, \quad u_s = \sqrt{\frac{(p_s - p_0)(p_s - p_0)}{p_s p_0}},$$

$$D_s = \frac{\rho_s u_s}{\rho_s - \rho_0}, \quad \alpha_{ls} = \frac{\alpha_{l0} \lambda_l}{\alpha_{g0} \lambda_g + \alpha_{l0} \lambda_l},$$

$$\lambda_l = \frac{\chi_l(p_0+p_*) + p_s + p_*}{\chi_l(p_s+p_*) + p_0 + p_*}, \quad \lambda_g = \frac{\chi_g p_0 + p_s}{\chi_g p_s + p_0}. \quad (16)$$



**Рис. 1.** Зависимости  $D(p_s)$  для водно-глицеринового раствора с пузырьками воздуха, рассчитанные по адиабатической (сплошная кривая) и изотермической (штриховая кривая) моделям:  $\alpha_{g0} = 0.01$ ,  $\alpha_{g1} = 0.85$  (I);  $\alpha_{g0} = 0.02$ ,  $\alpha_{g1} = 0.85$  (II);  $\alpha_{g0} = 0.05$ ,  $\alpha_{g1} = 0.5$  (III); значки — эксперимент [10].

Здесь  $D_s$  — скорость перемещения УВ,  $u_s$  — скорость смеси за ее фронтом. Если на пути УВ расположена твердая стенка, то после ее отражения значения параметров смеси у преграды, отмеченные индексом  $r$ , также рассчитываются из соотношений Ренкина-Гюгонио

$$(\rho_s - \rho_r)D_r = \rho_s u_s, \quad \rho_s u_s D_r = p_s + p_s u_s^2 - p_r,$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_r} = \frac{\alpha_{gs}(\chi_g p_s + p_r)}{\chi_g p_r + p_s} + \frac{\alpha_{ls}(\chi_l(p_s + p_*) + p_r + p_*)}{\chi_l(p_r + p_*) + p_s + p_*}. \quad (17)$$

После исключения  $D_r$  и  $\rho_r$  система (17) приводится к кубическому уравнению относительно  $p_r$ , которое решалось численно.

Сопоставим расчеты с экспериментом. На рис. 1 приведены расчетные и экспериментальные [10] зависимости скорости распространения УВ в водно-глицериновом растворе с пузырьками воздуха от давления за ее фронтом при различной концентрации газа в смеси ( $p_0 = 0.1$  МПа). Суспензия полагалась трехкомпонентной, поэтому расчеты проводились по модифицированным соотношениям (16), учитывающим присутствие в смеси третьей компоненты — глицерина. В частности, для адиабатической модели плотность смеси за фронтом УВ рассчитывалась по соотношению

$$\rho_s = \frac{\rho_0}{\alpha_{l0}\lambda_l + \alpha'_{l0}\lambda'_l + \alpha_{g0}\lambda_g},$$

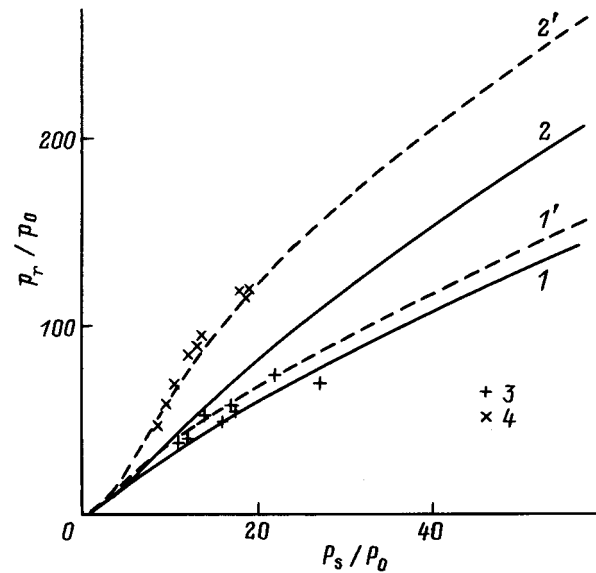
$$\lambda'_l = \frac{\chi'_l(p_0 + p'_*) + p_s + p'_*}{\chi'_l(p_s + p'_*) + p_0 + p'_*},$$

где штрихом помечены параметры, относящиеся к глицерину.

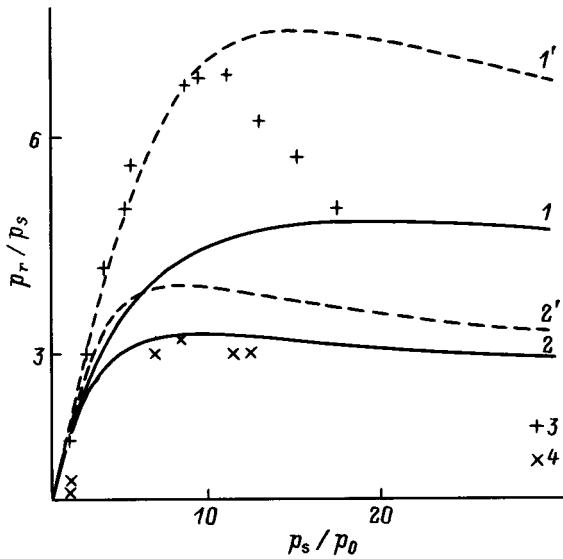
На рис. 2 сопоставлены расчетные, полученные по адиабатической и изотермической моделям, а также опытные [6] зависимости скачка давления при отражении УВ от стенки в водно-азотной суспензии ( $\gamma_g = 1.4$ ;  $\rho_{g0}^0 = 1.15$  кг/м<sup>3</sup>) от ее интенсивности при объемной концентрации газа в смеси  $\alpha_{g0} = 0.005$  и  $0.03$  ( $p_0 = 0.1$  МПа). При  $\alpha_{g0} = 0.005$  кривые, рассчитанные с использованием рассмотренных моделей, близки между собой и согласуются с экспериментом. Для варианта расчета с  $\alpha_{g0} = 0.03$  вычисления по адиабатической модели дают более низкие значения коэффициента отражения, чем наблюдается в опыте и по изотермической модели.

На рис. 3 представлены зависимости коэффициентов отражения  $p_r/p_s$  от интенсивности  $p_s/p_0$  падающей УВ, полученные в расчетах с использованием адиабатической и изотермической моделей для водно-воздушной суспензии с концентрацией газа в смеси  $\alpha_{g0} = 0.05$  при  $p_0 = 0.1$  и  $1.0$  МПа. Там же приведены экспериментальные данные из [6]. Отметим близость опытных данных и рассчитанных по адиабатической модели при повышенном начальном давлении  $p_0 = 1.0$  МПа. Для  $p_0 = 0.1$  МПа коэффициент отражения при значениях  $p_s/p_0 < 10$  совпадает с рассчитанным по изотермической модели, однако при дальнейшем увеличении интенсивности падающей УВ лучшие результаты дает адиабатическая модель (рис. 3).

Полученные данные могут быть объяснены следующим образом. В экспериментах [6] использовались двухфазные смеси с достаточно крупными воздушными пузырьками, чей диаметр составлял 3–4 мм. Известно, что воздушные пузырьки размером от 2 мм разрушаются в УВ, если ее интенсивность  $p_s/p_0 > 5$  [11]. Дробление пузырей сопровождается интенсификацией теплообменных процессов между газом и жидкостью, что связано



**Рис. 2.** Зависимости  $p_r/p_0$  от  $p_s/p_0$ , рассчитанные по адиабатической (1, 2) и изотермической (1', 2') моделям при  $\alpha_{g0} = 0.005$  (1, 1', 3) и  $0.03$  (2, 2', 4); 3, 4 — эксперимент [6].



**Рис. 3.** Зависимости  $p_r/p_s$  от  $p_s/p_0$  при  $\alpha_{g0} = 0.05$ , рассчитанные по адиабатической (1, 2) и изотермической (1', 2') моделям для начальных давлений  $p_0 = 0.1$  (1, 1', 3) и 1.0 МПа (2, 2', 4); 3–4 — эксперимент [6].

как с увеличением площади контактной поверхности, так и с интенсивным перемешиванием газа внутри разрушаемых пузырей. Для этого случая близкие к эксперименту результаты дает изотермическая модель. Если исключить возможность дробления пузырей, то условия теплообмена затруднены и фиксируемый в опытах уровень давления оказывается близким к рассчитанному по адиабатической модели дисперсной среды. Известно, что с увеличением начального давления сопротивляемость дроблению даже у достаточно крупных пузырей существенно повышается [6], следовательно, с ростом  $p_0$  уровень давления в УВ должен приближаться к рассчитанному по адиабатической модели. Эту тенденцию подтверждают данные рис. 3. Аналогичного эффекта можно достичь, если добавить в исходную газожидкостную смесь поверхностно-активное вещество [5] или разбавить водно-воздушную суспензию глицерином [6]. Другим стабилизирующим фактором, затрудняющим дробление пузырей, служит замена воздуха в пузырях на более легкий (типа водорода) газ [12]. Во всех перечисленных случаях рекомендуется использовать вместо изотермической модели адиабатическую. Что же касается данных на рис. 3 и относящихся к начальному давлению  $p_0 = 0.1$  МПа, то подобные результаты, по-видимому, связаны с условиями проведения опытов. В самом деле, эксперименты в [6] проводились на ударных трубах с короткой базой. При большой амплитуде падающей УВ скорости движения волн велики, поэтому время нахождения датчика в области за фронтом отраженной УВ малое. Из-за конечной скорости межфазного теплообмена газ не успевает прогреться до температуры жидкости, поэтому коэффициент отражения ниже значения, полученного по изотермической модели. По этой причине при увеличении амплитуды падающей УВ коэффициент отражения

стремится к рассчитанному по адиабатической теории. Аналогичные результаты имеют место не только при нормальном, но и при косом отражении УВ от преграды [13].

### Взаимодействие ударной волны с расположенным вблизи преграды пузырьковым экраном

Действие короткой УВ, падающей со стороны чистой (без пузырей) жидкости на пузырьковый экран, используемый, например, для защиты от взрывных нагрузок, обсуждалось в [12]. Исследуем задачу о падении длинной с профилем в виде полубесконечной ступеньки УВ, распространяющейся по газожидкостной смеси с газосодержанием  $\alpha_{g0}$ , на экран толщиной  $L_0$ , расположенный у преграды. Объемная концентрация газа в экране  $\alpha_{g0}^{sc}$ , причем будем полагать, что  $\alpha_{g0}^{sc} > \alpha_{g0}$ .

На рис. 4 схематично представлена ударно-волновая картина, возникающая при взаимодействии. В момент времени  $t = 0$  падающая УВ достигает экрана, при этом формируется отраженная от слоя волна разрежения (ВР) и УВ<sub>1</sub>, движущаяся по экрану со скоростью  $D_1$ . Параметры этих волн рассчитывались из решения задачи РПР. УВ<sub>1</sub> к моменту времени  $t_1 = L_0/D_1$  достигает поверхности преграды и отражается от нее, формируя УВ<sub>2</sub>, которая в свою очередь в момент времени

$$t_2 = \frac{L_0 + t_1|D_2|}{u_1 + |D_2|}$$

отражается от контактной границы пузырькового экрана. Последующие отражения, также рассчитываемые с использованием соответствующих задач РПР, имеют место в моменты времени

$$t_3 = \frac{L_0 + t_2(D_3 - u_1)}{D_3}, \quad t_4 = \frac{L_0 - t_2u_1 + t_3|D_4|}{|D_4|},$$

$$t_5 = \frac{L_0 - t_2u_1 + t_4D_5}{D_5}, \quad t_6 = \frac{L_0 - t_2u_1 + t_4u_3 + t_5|D_6|}{u_3 + |D_6|},$$

$$t_7 = \frac{L_0 - t_2u_1 + t_4u_3 + t_6(D_7 - u_3)}{D_7}, \dots$$

Здесь  $D_k$  и  $u_k$  — скорости перемещения  $k$ -й отраженной волны и контактного разрыва (КР) после отражения УВ <sub>$k-1$</sub>  от свободной поверхности пузырькового слоя.

На рис. 5 представлены зависимости давления у преграды от времени для падающей УВ с  $p_s = 1.0$  МПа ( $p_0 = 0.1$  МПа), рассчитанные в рамках использованных в работе моделей для различных концентраций газа в экране ( $L_0 = 1$  мм) и вне его. На рис. 6 приведены зависимости от времени объемной доли газа у стенки, а также относительной толщины экрана для одного из вариантов расчета.

Из анализа приведенных на рис. 5, 6 данных следует, что экран с течением времени сжимается, объемная доля

газа в нем снижается. Причем степень сжатия экрана по изотермической модели выше. Давление у преграды, рассчитанное по адиабатической модели Рахматулина, как и в [2], стремится к значению в отраженной УВ без экрана. По изотермической модели предельное давление выше, чем рассчитанное по адиабатической модели. С ростом  $p_s$  время задержки, обеспечиваемое пузырьковым экраном, снижается. Так, для УВ с давлением за фронтом  $p_s = 5$  МПа, распространяющейся по жидкости без пузырей ( $\alpha_{g0} = 0$ ,  $p_0 = 0.1$  МПа) и взаимодействующей с пузырьковым экраном при его толщине 1 м и объемным газосодержанием  $\alpha_{g0}^{sc} = 0.01$  и 0.1, временная задержка (до выхода давления на предельный уровень) составляет 3 и 18 мс. Результаты расчетов слабо за-

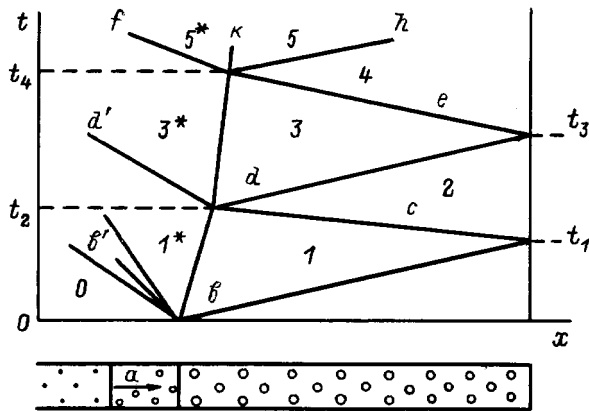


Рис. 4. Волновая диаграмма взаимодействия УВ с пузырьковым экраном:  $a$  — УВ,  $b$  — УВ<sub>1</sub>,  $b'$  — ВР,  $c$  — УВ<sub>2</sub>,  $d$  — УВ<sub>3</sub>,  $d'$  — УВ<sub>3</sub><sup>\*</sup>,  $e$  — УВ<sub>4</sub>,  $f$  — УВ<sub>5</sub><sup>\*</sup>,  $h$  — УВ<sub>6</sub>.

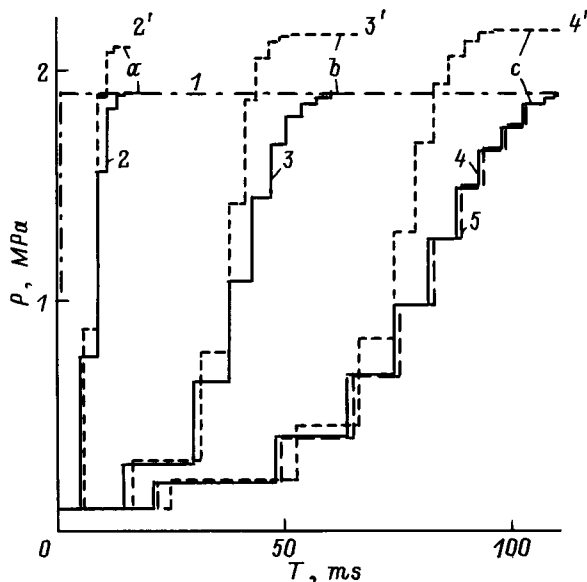


Рис. 5. Зависимости  $p(t)$  у преграды по адиабатической (2–4) и изотермической (2'–4') моделям для вариантов:  $a$  —  $\alpha_{g0} = 0$ ,  $\alpha_{g0}^{sc} = 0.01$  (2, 2');  $b$  —  $\alpha_{g0} = 0.01$ ,  $\alpha_{g0}^{sc} = 0.1$  (3, 3');  $c$  —  $\alpha_{g0} = 0$ ,  $\alpha_{g0}^{sc} = 0.1$  (4, 4'); 1 —  $p(t)$  при отсутствии экрана, 5 —  $p(t)$  для водородного экрана ( $\alpha_{g0} = 0$ ,  $\alpha_{g0}^{sc} = 0.1$ ).

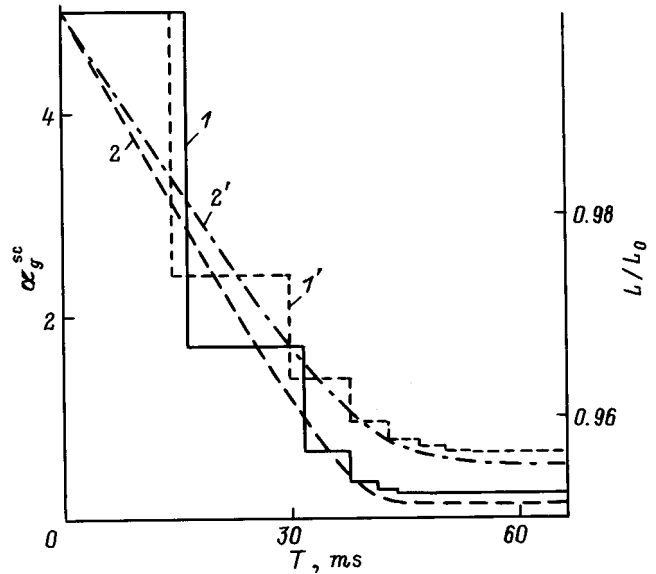


Рис. 6. Зависимости  $\alpha_{g0}^{sc}(t)$  (1, 1') у стенки и  $L/L_0(t)$  (2, 2'), полученные по адиабатической (1, 2) и изотермической (1', 2') моделям.

висят от типа газа, используемого для формирования пузырькового экрана. Это видно из рис. 5, где приведена зависимость давления у преграды в смеси жидкости с пузырьками водорода, рассчитанная с использованием адиабатической модели. Для водорода показатель адиабаты и начальная плотность полагались равными  $\gamma_g = 1.33$  и  $\rho_{g0}^0 = 0.0148$  кг/м<sup>3</sup>. Заметим, что в зависимости от условий теплообмена между газом и жидкостью необходимо использовать ту или иную модель пузырьковой жидкости.

## Взаимодействие воздушной ударной волны со слоем пузырьковой жидкости

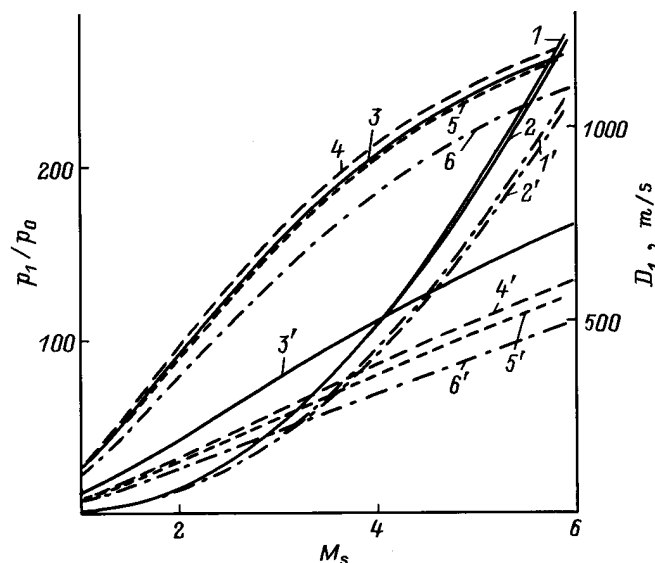
Пусть на слой однородной пузырьковой жидкости с газосодержанием  $\alpha_{g0}^{sc}$ , расположенный у твердой стенки, нормально к его поверхности падает плоская воздушная УВ, имеющая профиль в виде полубесконечной ступеньки. В качестве газа, заполняющего пузыри, рассматривались азот, водород и гелий. Для последнего  $\gamma_g = 1.67$ ,  $\rho_{g0}^0 = 0.164$  кг/м<sup>3</sup>. Необходимо рассчитать течение, возникающее в результате взаимодействия.

Параметры воздуха за фронтом падающей УВ, отмеченные индексом  $s$ , связаны с начальными перед скачком (с индексом 0) соотношениями Ренкина–Гюгонио

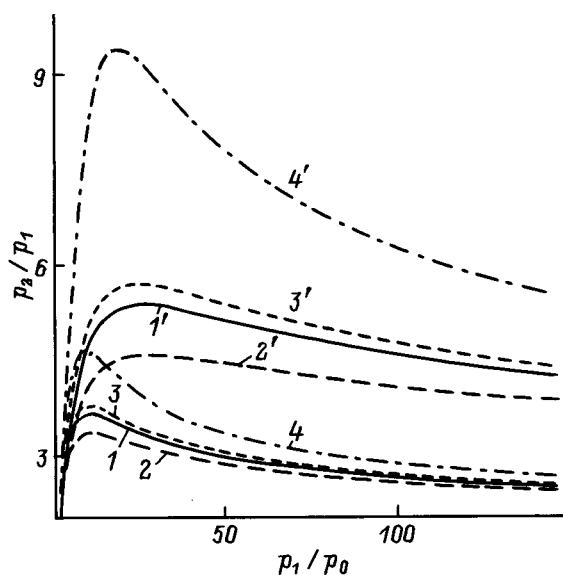
$$p_s = p_0 \left( 1 + \frac{2\gamma (M_s^2 - 1)}{(\gamma + 1)} \right), \quad u_s = \frac{2c_{g0} (M_s^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_s},$$

$$\rho_s = \rho_{g0} \left( \frac{(\gamma + 1)M_s^2}{2 + (\gamma - 1)M_s^2} \right),$$

где  $c_{g0}$ ,  $\gamma$  и  $M_s = D/c_{g0}$  — соответственно скорость звука, показатель адиабаты воздуха и число Маха ( $D$  — скорость перемещения фронта УВ).



**Рис. 7.** Зависимости  $p_1/p_0$  (1, 6) и  $D_1$  (2–5) от  $M_s$  при  $\alpha_{g0} = 0.01$  для воды с пузырьками азота (1, 2), гелия (4), водорода (5), рассчитанные по адиабатической модели; 2, 6 — по изотермической, 1'–6' — те же зависимости, но для  $\alpha_{g0} = 0.1$ .



**Рис. 8.** Зависимости  $p_2/p_1$  от  $p_1/p_0$  для воды с пузырьками азота, гелия и водорода по адиабатической (1–3) и изотермической (4) моделям при  $\alpha_{g0} = 0.01$ ; 1'–4' — при  $\alpha_{g0} = 0.1$ .

По достижению воздушной УВ контактной границы слоя формируется отраженная УВ<sup>\*</sup>, распространяющаяся по газу от слоя, и проникающая УВ<sub>1</sub>, движущаяся со скоростью  $D_1$  по пузырьковой жидкости. Параметры этих волн рассчитывались из решения задачи РПР.

На рис. 7 приведены рассчитанные по адиабатической и изотермической моделям зависимости скачка давления  $p_1/p_0$  за фронтом проникающей в жидкость с пузырьками азота УВ<sub>1</sub> от числа Маха в падающей УВ при различных концентрациях газа в смеси ( $p_0 = 0.1$  МПа). Для

жидкости с пузырьками водорода и гелия соответствующие кривые давления с точностью до графика совпали с полученными для азотной пузырьковой системы. На этом же рисунке представлены зависимости скорости распространения УВ<sub>1</sub>. Заметим, что рассчитанные по изотермической модели кривые от сорта газа в пузырях не зависят.

По достижению УВ<sub>1</sub> преграды формируется отраженная УВ<sub>2</sub>. На рис. 8 представлены зависимости коэффициентов отражения  $p_2/p_1$  от интенсивности  $p_1/p_0$  проникающей УВ<sub>1</sub>, полученные в расчетах по адиабатической и изотермической моделям Рахматулина для воды с пузырьками азота, гелия и водорода при различной объемной концентрации газа в смеси. Как видно из рис. 8, величина давления в отраженной от преграды УВ при использовании адиабатической модели существенно зависит от типа газа, заполняющего пузыри, причем различие в давлении за фронтом отраженной УВ тем больше, чем выше концентрация газа в жидкости. В противоположность этому вид кривых, рассчитанных по изотермической модели, от сорта газа в пузырях не зависит.

## Заключение

В работе показано, что при моделировании волновых явлений в пузырьковых жидкостях в условиях развитого теплообмена между газовой и жидкой фракциями, чему способствует явление дробления пузырей в УВ, необходимо использовать изотермический вариант модели дисперсной среды. В случае же затрудненного теплообмена между фракциями лучшие результаты получаются при использовании адиабатической модели. Последнюю целесообразно применять и при моделировании воздействия мощных коротких импульсов давления на пузырьковые жидкости. При очень малой концентрации газа в жидкости теплообменные процессы слабо влияют на параметры волн, поэтому результаты расчетов, полученные по обеим моделям оказываются близкими.

## Приложение

Пусть две бесконечные массы пузырьковых жидкостей с объемной концентрацией газа  $\alpha_{(1)g0}$  и  $\alpha_{(2)g0}$  в каждой расположены в начальный момент ( $t = 0$ ) вдоль плоскости  $x = 0$ . Давление, скорость и плотность в указанных средах постоянны и равны  $p_{(1)0}$ ,  $u_{(1)0}$ ,  $\rho_{(1)0}$  и  $p_{(2)0}$ ,  $u_{(2)0}$ ,  $\rho_{(2)0}$  соответственно. Без ограничения общности будем полагать, что  $p_{(1)0} \geq p_{(2)0}$ . Необходимо рассчитать течение, возникающее при  $t > 0$ .

Известно, что если произвольный разрыв не является контактным или УВ, то он распадается, формируя либо две УВ, либо ВР и УВ, либо две ВР [8]. Рассмотрим перечисленные случаи подробнее.

Две ударные волны. Система уравнений для правой УВ, выражающая законы сохранения массы и им-

пульса при переходе через фронт УВ совместно с уравнением состояния (14), имеет вид

$$\begin{aligned} (\rho_{(2)+} - \rho_{(2)0})D_{(2)+} &= \rho_{(2)+}u_{(2)+} - \rho_{(2)0}u_{(2)0}, \\ (\rho_{(2)+}u_{(2)+} - \rho_{(2)0}u_{(2)0})D_{(2)+} &= P_{(2)+} + \rho_{(2)+}u_{(2)+}^2 - P_{(2)0} - \rho_{(2)0}u_{(2)0}^2, \\ \frac{\rho_{(2)0}}{\rho_{(2)+}} &= \alpha_{(2)g0} \frac{\chi_{(2)g}P_{(2)0} + P_{(2)+}}{\chi_{(2)g}P_{(2)+} + P_{(2)0}} + \alpha_{(2)l0} \frac{\chi_{(2)l}(P_{(2)0} + P_{*(2)}) + P_{(2)+} + P_{*(2)}}{\chi_{(2)l}(P_{(2)+} + P_{*(2)}) + P_{(2)0} + P_{*(2)}}. \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Для левой УВ имеем аналогичную систему уравнений

$$\begin{aligned} (\rho_{(1)-} - \rho_{(1)0})D_{(1)-} &= \rho_{(1)-}u_{(1)-} - \rho_{(1)0}u_{(1)0}, \\ (\rho_{(1)-}u_{(1)-} - \rho_{(1)0}u_{(1)0})D_{(1)-} &= P_{(1)-} + \rho_{(1)-}u_{(1)-}^2 - P_{(1)0} - \rho_{(1)0}u_{(1)0}^2, \\ \frac{\rho_{(1)0}}{\rho_{(1)-}} &= \alpha_{(1)g0} \frac{\chi_{(1)g}P_{(1)0} + P_{(1)-}}{\chi_{(1)g}P_{(1)-} + P_{(1)0}} + \alpha_{(1)l0} \frac{\chi_{(1)l}(P_{(1)0} - P_{*(1)}) + P_{(1)-} + P_{*(1)}}{\chi_{(1)l}(P_{(1)-} + P_{*(1)}) + P_{(1)0} + P_{*(1)}}. \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

В (П1)–(П2) индексами "+" и "-" отмечены параметры смеси в области контактного разрыва, относящиеся к расположенным соответственно справа и слева от него значениям. На контактной границе давление и скорость не претерпевают изменений, таким образом, выполняются условия сопряжения

$$u_{(2)+} = u_{(1)-} = U, \quad P_{(2)+} = P_{(1)-} = P. \quad (\text{П3})$$

После преобразования соотношений (П1)–(П3) получим уравнение для вычисления  $P$

$$u_{(1)0} - u_{(2)0} = f_{(1)1}(P) + f_{(2)1}(P), \quad (\text{П4})$$

где

$$\begin{aligned} f_{(1)1}(P) &= \sqrt{\frac{(P - P_{(1)0})}{\rho_{(1)0}} \left( 1 - \frac{\alpha_{(1)g0}(\chi_{(1)g}P_{(1)0} + P)}{\chi_{(1)g}P + P_{(1)0}} - \frac{\alpha_{(1)l0}(\chi_{(1)l}(P_{(1)0} + P_{*(1)}) + P + P_{*(1)})}{\chi_{(1)l}(P + P_{*(1)}) + P_{(1)0} + P_{*(1)}} \right)}, \\ f_{(2)1}(P) &= \sqrt{\frac{(P - P_{(2)0})}{\rho_{(2)0}} \left( 1 - \frac{\alpha_{(2)g0}(\chi_{(2)g}P_{(2)0} + P)}{\chi_{(2)g}P + P_{(2)0}} - \frac{\alpha_{(2)l0}(\chi_{(2)l}(P_{(2)0} + P_{*(2)}) + P + P_{*(2)})}{\chi_{(2)l}(P + P_{*(2)}) + P_{(2)0} + P_{*(2)}} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

Искомый корень уравнения (П4) рассчитывался численно с использованием стандартной процедуры решения нелинейных уравнений. Конфигурация с двумя УВ имеет место в случае, если  $u_{(1)0} - u_{(2)0} \geq U_*$ , где  $U_* = f_{(2)1}(P_{(1)0})$ .

Для изотермической модели вместо (П5) необходимо использовать выражения

$$\begin{aligned} f_{(1)1}(P) &= \sqrt{\frac{(P - P_{(1)0})}{\rho_{(1)0}} \left( 1 - \frac{\alpha_{(1)g0}P_{(1)0}}{P} - \frac{\alpha_{(1)l0}(\chi_{(1)l}(P_{(1)0} + P_{*(1)}) + P + P_{*(1)})}{\chi_{(1)l}(P + P_{*(1)}) + P_{(1)0} + P_{*(1)}} \right)}, \\ f_{(2)1}(P) &= \sqrt{\frac{(P - P_{(2)0})}{\rho_{(2)0}} \left( 1 - \frac{\alpha_{(2)g0}P_{(2)0}}{P} - \frac{\alpha_{(2)l0}(\chi_{(2)l}(P_{(2)0} + P_{*(2)}) + P + P_{*(2)})}{\chi_{(2)l}(P + P_{*(2)}) + P_{(2)0} + P_{*(2)}} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

Волна разрежения и ударная волна. Если  $u_{(1)0} - u_{(2)0} < U_*$ , то реализуется режим течения с ВР, распространяющейся влево от контактного разрыва, и УВ, движущейся вправо. Для последней справедливо соотношение (П1). Учитывая, что в ВР  $r$ -инвариант Римана постоянен, имеем

$$u_{(1)0} - u_{(1)-} = \int_{P_{(1)0}}^{P_{(1)-}} f_{(1)2}(p) dp, \quad (\text{П7})$$

где

$$f_{(1)2}(p) = \sqrt{\frac{\frac{\alpha_{(1)l0}}{\gamma_{(1)l}(P + P_{*(1)})} \left( \frac{P_{(1)0} + P_{*(1)}}{P + P_{*(1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma_{(1)l}}} + \frac{\alpha_{(1)g0}}{\gamma_{(1)g}P} \left( \frac{P_{(1)0}}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma_{(1)g}}}}{\rho_{(1)0}}}.$$

Из приведенных соотношений (П1), (П3) и (П7) после ряда преобразований получим уравнение для вычисления давления  $P$  на контактном разрыве

$$u_{(1)0} - u_{(2)0} = \int_{P_{(1)0}}^P f_{(1)2}(p) dp + f_{(2)1}(P), \quad (\text{П8})$$

которое, как и в случае течения с двумя УВ, решается численно. Указанная конфигурация имеет место в случае, если

$$U_{**} \leq u_{(1)0} - u_{(2)0} < U_*, \quad \text{где } U_{**} = \int_{P_{(1)0}}^{P_{(2)0}} f_{(1)2}(p) dp.$$

Две волны разрежения. Если  $u_{(1)0} - u_{(2)0} < U_{**}$ , то реализуется режим течения с двумя ВР. Для левой ВР справедливо соотношение (П7). Для правой волны необходимо использовать условие сохранения  $s$ -инварианта Римана

$$u_{(2)0} - u_{(2)+} = \int_{P_{(2)+}}^{P_{(2)0}} f_{(2)2}(p) dp, \quad (\text{П9})$$

где

$$f_{(2)2}(p) = \sqrt{\frac{\frac{\alpha_{(2)l0}}{\gamma_{(2)l}(P + P_{*(2)})} \left( \frac{P_{(2)0} + P_{*(2)}}{P + P_{*(2)}} \right)^{\frac{1}{\gamma_{(2)l}}} + \frac{\alpha_{(2)g0}}{\gamma_{(2)g}P} \left( \frac{P_{(2)0}}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma_{(2)g}}}}{\rho_{(2)0}}}.$$

После преобразования соотношений (П7), (П9) с учетом (П3) уравнение для расчета  $P$  принимает вид

$$u_{(1)0} - \int_{P(1)0}^P f_{(1)2}(p)dp = u_{(2)0} + \int_{P(2)0}^P f_{(2)2}(p)dp.$$

Если в приведенных выше соотношениях положить  $\alpha_{(1)0} = \alpha_{(2)0} = 0$ , то получим классическую задачу РПР в идеальном газе. При этом интегралы, входящие в определяющие выражения, вычисляются в квадратурах и полученные соотношения в точности совпадают с приведенными в [9]. Имеется еще один класс задач, когда интегралы вычисляются в квадратурах, который соответствует РПР в газожидкостной среде, представляющей собой бинарную смесь идеального газа и несжимаемой жидкости. Этот вариант подробно исследован в [14]. В остальных случаях интегралы рассчитываются численно.

## Список литературы

- [1] Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. и др. // Итоги науки и техники. Сер. МЖГ. Т. 17. М.: ВИНТИ, 1982. С. 160–259.
- [2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
- [3] Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
- [4] Campbell I.J., Pitcher A.S. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1958. Vol. 243. N 1235. P. 534–545.
- [5] Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Козарко С.М. и др. // ИФЖ. 1976. Т. 31. № 6. С. 1080–1083.
- [6] Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Тимофеев Е.И. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 174–178.
- [7] Рахматулин Х.А. // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 4. С. 598–601.
- [8] Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [9] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.
- [10] Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. и др. // Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, 1975. С. 54–97.
- [11] Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Козарко С.М. и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 4. С. 53–56.
- [12] Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Нигматулин Р.И. и др. // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 292–294.
- [13] Eddington R.B. // AIAA J. 1970. Vol. 8. N 1. P. 65–74.
- [14] Суров В.С. ТВТ. 1996. Т. 34. № 2. С. 285–292.