01;05;07;08

Векторные солитоны в динамике ангармонических моноатомных решеток

© В.В. Брыксин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 9 октября 1996 г.)

Показано, что в ангармонических кристаллических решетках могут возникать три типа уединенных звуковых волн в соответствии с наличием трех ветвей акустических фононов. Получена система трех нелинейных уравнений Шредингера, описывающих эту ситуацию. При сильно различающихся групповых скоростях взаимодействие между солитонами сводится к их столкновениям. В тех случаях, когда в решетке групповые скорости различных акустических мод близки друг к другу, реализуются связанные состояния соответствующих типов уединенных волн. Такие связанные состояния представляют собой векторные солитоны, поляризация которых изменяется вдоль импульса. Если вырождены по скорости моды поперечного звука, ситуация весьма сходна с распространением импульсов в оптических волокнах.

Введение

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию динамики трехмерных ангармонических кристаллических решеток, в которых в пределе гармонического взаимодействия распространяются только акустические волны. Проблема реализации солитонных состояний в ангармонических решеточных системах изучалась во многих работах [1–8]. При размерах солитона, превышающих постоянную решетки, эта задача сводится к нелинейному уравнению Шредингера, а поэтому к этой же группе работ можно отнести исследования поляронного движения в адиабатическом приближении [9–14]. Практически во всех этих работах интерес вращается вокруг модели дискретного нелинейного уравнения Шредингера для одномерных цепочек. В наиболее интересном случае солитонных состояний большого размера (по сравнению с постоянной решетки) дискретность модели должна приводить лишь к слабому пиннингу солитонов (ср. с дискретной моделью Френкеля–Конторовой или движением джозефсоновских вихрей [15]), но слабо отражаться на форме солитонов.

С другой стороны, задача принципиально изменяется при переходе к рассмотрению трехмерных решеток. В этом случае в моноатомном кристалле распространяются продольная и две поперечные акустические моды, в то время как в одномерных цепочках присутствует только продольный звук. Поэтому в трехмерных структурах при учете ангармонизма следует ожидать появления трех типов солитонных состояний, описываемых системой трех связанных нелинейных уравнений. Эта ситуация напоминает возникновение солитонов в оптическом волокне. Однако в оптике отсутствует продольная составляющая электромагнитных колебаний, а поэтому распространение импульсов в волокне описывается системой лишь двух связанных нелинейных уравнений [16]. В нелинейной оптике двулучепреломляющего волокна, в частности, это приводит к реализации состояний векторных солитонов, поляризация которых изменяется вдоль импульса [17–22].

Ниже получена система нелинейных уравнений, описывающая акустические солитоны в трехмерных кристаллах, и показано, что при определенных условиях соответствующие солитонные состояния могут иметь векторный характер. Впрочем, тип уединенных волн в трехмерных кристаллах во многом определяется симметрией кристаллической решетки и направлением распространения относительно кристаллографических осей.

Нелинейные уравнения движения в континуальном пределе

Ниже ограничимся случаем континуального предела и для получения уравнений движения воспользуемся методами теории упругости [23]. Во избежание громоздких вычислений с самого начала предположим, что смещение среды $\mathbf{u}$ зависит только от одной координаты x, так что тензор деформаций

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(v_i + v_k + \delta_{ik} v_l^2\right),$$

где $v_i = du_i/dx$. В этом случае для кубического кристалла, если ось x (направление движения) совмещена с кристаллографической осью, энергия среды с учетом ангармонизма четвертого порядка имеет вид

$$\Omega = \rho \int dx \left(\frac{1}{2}c_l^2 v_x^2 + \frac{1}{2}c_t^2 v_t^2 + \frac{1}{4}A v_x^4 + \frac{1}{2}B v_x^2 v_t^2 + \frac{1}{4}C v_t^4\right), \quad (1)$$

где ρ — плотность среды; $v_t^2 = v_y^2 + v_z^2$, c_l и c_t — скорости продольного и поперечного звука соответственно; A, B и C — константы ангармонизма четвертого порядка.

Не учтенный в (1) ангармонизм третьего порядка, как увидим ниже, не дает вклада в исследуемые солитонные состояния.

Уравнение движения теории упругости $\rho\ddot{u}_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$, где $\sigma_{ik} = \partial\Omega/\delta u_{ik}$ — тензор напряжений, в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_l^2 v_x + A v_x^3 + B v_x v_t^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 u_{y,z}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_t^2 v_{y,z} + B v_{y,z} v_x^2 + C v_{y,z} v_t^2\right).$$

Дифференцируя эти равенства по x, получаем уравнения движения для величины v_i

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_l^2 v_x + A v_x^3 + B v_x v_t^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 v_{y,z}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_t^2 v_{y,z} + B v_{y,z} v_x^2 + C v_{y,z} v_t^2\right). \quad (2)$$

Уравнения в форме (2) недостаточны для описания устойчивых солитонных состояний. Этот факт хорошо известен в нелинейной оптике. Ангармонический вклад в уравнения движения (при $A, B, C > 0$) ответствен за сжатие импульсов. Для сохранения устойчивости необходимо учесть механизм их расплывания. В нелинейной оптике таким механизмом является частотная дисперсия диэлектрической проницаемости [16]. В акустике аналогичную роль играет пространственная дисперсия скорости звука. На языке теории упругости это означает учет вклада в энергию (1) от пространственных производных $\partial v_i/\partial x$. При таком обобщении уравнения движения (2) принимают форму

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_l^2 v_x + \alpha_l \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + A v_x^3 + B v_x v_t^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 v_{y,z}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_t^2 v_{y,z} + \alpha_t \frac{\partial^2 v_{y,z}}{\partial x^2} + B v_{y,z} v_x^2 + C v_{y,z} v_t^2\right). \quad (3)$$

Здесь α_l и α_t — константы, описывающие дисперсии скорости продольного и поперечного звука соответственно. При переходе к модели одномерной цепочки ($v_y = v_z = 0$) (3) принимает форму нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска для величины v_x [1]. Это уравнение имеет точное решение в форме солитона, распространяющегося со скоростью V, большей скорости продольного звука,

$$v_x(x,t) = \left[\frac{2(V^2 - c_l^2)}{A}\right]^{1/2} \mathrm{ch}^{-1}\left[\frac{x - Vt + x_0}{L}\right],$$

где размер солитона $L = \sqrt{\alpha_l/(V^2 - c_l^2)}$.

Поиск решений модифицированного уравнения Буссинеска в форме импульса с большой несущей частотой приводит к нелинейному уравнению Шредингера для огибающей [1]. В сущности производимые ниже вычисления представляют собой обобщение построения таких решений для уединенных волн в трехмерной ситуации.

Вид уравнений движения (3) указывает на близкую аналогию исследуемой задачи нелинейной акустики с проблемой распространения световых импульсов в оптических волокнах. Действительно, если поменять местами координату и время $x \leftrightarrow t$, а под v_i понимать проекции электрического поля $\mathbf{E}$ волны, то величинам в скобках в правой части (3) можно сопоставить электрическую индукцию $\mathbf{D}$. При этом скорости звука играют роль линейной диэлектрической проницаемости, пространственная дисперсия скорости звука — частотной дисперсии диэлектрической проницаемости, и т. д. В результате это уравнение примет форму волнового $\partial^2\mathbf{E}/\partial x^2 - c^{-2}\partial^2\mathbf{D}/\partial t^2 = 0$. Однако имеется существенное различие между задачами нелинейной акустики и оптики. Оно заключается в том, что в электромагнитной волне отсутствует продольная составляющая ($E_x = 0$), в то время как в акустике присутствуют все три составляющие "вектора" $\mathbf{v}$.

Упрощения системы уравнений (3) можно достигнуть, если принять, что переменные v_i модулированы некоторой несущей частотой ω, так что $v_i = a\exp(-i\omega t) + a^*\exp(i\omega t)$. Оставим в стороне проблемы, связанные с генерацией обертонов звуковых волн на частотах $n\omega$, и рассмотрим колебания лишь с основной несущей частотой ω. В этом приближении при переходе к комплексной форме записи $v_i = a_i\exp(-i\omega t)$ в (3) можно произвести замену $v_i^3 \to v_i|v_i|^2$, $v_i v_k^2 \to v_i|v_k|^2 + (1/2)v_i^* v_k^2$. В результате (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_l^2 v_x + \alpha_l \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + A v_x|v_x|^2 + B\left[v_x|v_t|^2 + \frac{1}{2}v_x^* v_t^2\right]\right),$$

$$\frac{\partial^2 v_{y,z}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_t^2 v_{y,z} + \alpha_t \frac{\partial^2 v_{y,z}}{\partial x^2} + B\left[v_{y,z}|v_x|^2 + \frac{1}{2}v_{y,z}^* v_x^2\right]\right.$$
$$\left. + C\left[v_{y,z}|v_t|^2 + \frac{1}{2}v_{y,z}^* v_t^2\right]\right). \quad (4)$$

В связи с переходом от (3) к комплексной форме записи (4) и отбрасыванием вкладов от обертонов ясно, что опущенный ранее ангармонизм третьего порядка в исследуемые эффекты вклада не дает, так как в нем отсутствуют члены, модулированные основной несущей частотой.

Система нелинейных уравнений Шредингера

Прежде чем приступить к преобразованию уравнений (4), произведем их обобщение на случай слабой анизотропии в плоскости y, z. Допустим, что скорости c_1 для поляризаций поперечного звука вдоль осей y и z несколько различаются. Такое различие может возникнуть, например, в кубическом кристалле при наличии давления вдоль оси y. При проведении аналогии со светом это соответствует среде с двулучепреломлением. При этом, как и в задачах с двулучепреломлением, анизотропию ангармонических членов не учитываем. Такое обобщение сводится к замене в (4) $c_t \to c_y$ в уравнении для v_y и $c_t \to c_z$ в уравнении для v_z. Анизотропию будем считать слабой, так что $|c_y - c_z| \ll c_t$, где теперь $c_t = (c_y + c_z)/2$ — средняя скорость. После такого обобщения будем искать решение уравнения (4) в виде

$$v_x(x,t) = a_x(x,t)\exp\Big[i(q_l x - \omega t)\Big],$$

$$v_{y,z}(x,t) = a_{y,z}(x,t)\exp\Big[i(q_t x - \omega t)\Big]. \qquad (5)$$

Волновые векторы q_l (для продольной составляющей) и q_t (для поперечных) определяются величиной несущей частоты ω в соответствии с дисперсионными соотношениями

$$\omega^2 = c_l^2 q_l^2 - \alpha_l q_l^4; \qquad \omega^2 = c_t^2 q_t^2 - \alpha_t q_t^4. \qquad (6)$$

Амплитуды $a_i(x,t)$ считаем медленно изменяющимися в пространстве (на расстояниях порядка q^{-1}) и времени (на интервалах порядка ω^{-1}). Подставляя (5) в (4) и опуская члены, пропорциональные $\partial^4 a_i/\partial x^4$ и $\partial^3 a_i/\partial x^3$, а также все пространственные производные в ангармонических членах, получаем

$$\frac{\partial^2 a_x}{\partial t^2} - 2i\omega\frac{\partial a_x}{\partial t} = c_l^2\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + 2iq_l\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)$$
$$- \alpha_l\left(6q_l^2\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + 4iq_l^3\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) - Aq_l^2 a_x|a_x|^2$$
$$- Bq_l^2 a_x\left(|a_y|^2 + |a_z|^2\right) - \frac{B}{2}(2q_t - q_l)^2 a_x^*(a_y^2 + a_z^2)$$
$$\times \exp\big[2i(q_t - q_l)x\big],$$

$$\frac{\partial^2 a_y}{\partial t^2} - 2i\omega\frac{\partial a_y}{\partial t} = c_y^2\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + 2iq_t\frac{\partial a_y}{\partial x}\right) + q_t^2\left(c_z^2 - c_y^2\right)a_y$$
$$- \alpha_t\left(6q_t^2\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + 4iq_t^3\frac{\partial a_y}{\partial x}\right) - Cq_t^2\Big[a_y\left(|a_y|^2 + |a_z|^2\right)$$
$$+ \frac{1}{2}a_y^*\left(a_y^2 + a_z^2\right)\Big] - Bq_t^2 a_y|a_x|^2 - \frac{B}{2}(2q_l - q_t)^2 a_y^* a_x^2$$
$$\times \exp\big[2i(q_l - q_t)x\big]. \qquad (7)$$

Уравнение для a_z можно получить из уравнения для a_y заменой $y \leftrightarrow z$. Система трех нелинейных уравнений (7) может быть упрощена. Это упрощение связано с тем, что в кристаллах кубической симметрии скорости продольных и поперечных звуковых волн резко отличаются (обычно $c_l^2 > 2c_t^2$). Поэтому импульсы, поляризованные вдоль оси x, распространяются значительно быстрее, чем поляризованные в плоскости yz. Поэтому они не могут создавать связанное состояние, так как в системе реализуются уединенные волны, поляризованные либо вдоль оси x, либо поперек нее. Можно говорить только об их взаимодействии при столкновениях. Ситуация аналогична солитонам в сильно двулучепреломляющих оптических волокнах, когда солитоны, поляризованные вдоль быстрой и медленной осей, не образуют связанных состояний, а происходит их радиационный распад при столкновениях [24] (столкновения между акустическими солитонами в одномерных цепочках исследованы в [1] численными методами). Не интересуясь такими столкновениями, которые описываются в (7) ангармонической константой B, можно в уравнении для a_x положить $a_y = a_z = 0$ (или, что то же самое, $B = 0$). В результате получаем замкнутое уравнение для амплитуды уединенной продольно поляризованной волны. Перейдем в этом уравнении к движущейся системе координат $a_x(x,t) \to a_x(\zeta,t)$, где

$$\zeta = x - \frac{d\omega}{dq_l}t.$$

Скорость распространения равна групповой скорости продольного звука, определяемой дисперсионным соотношением (6). В результате после несложных преобразований из (7) получаем

$$i\frac{\partial a_x}{\partial t} = \beta_l\frac{\partial^2 a_x}{\partial \zeta^2} + \gamma_l a_x|a_x|^2, \qquad (8)$$

где

$$\beta_t = \frac{3\alpha_l\omega}{2c_l^2}, \qquad \gamma_l = \frac{\omega A}{2c_l^2}. \qquad (9)$$

При получении (10) были, как обычно, опущены малые вклады, пропорциональные $\partial^2 a_x/\partial t^2$ и $\partial^2 a_x/\partial t\partial\zeta$.

Скалярное нелинейное уравнение Шредингера (8) описывает уединенные волны с продольной поляризацией и совпадает с аналогичным уравнением для одномерных цепочек [1]. Оно допускает интегрирование методом обратной задачи рассеяния и исследовано в многочисленных работах. Поэтому в дальнейшем мы на нем останавливаться не будем. Перейдем к акустическим уединенным волнам с поперечной поляризацией. Для этого во втором из уравнений (7) положим $a_x = 0$ и опять перейдем к системе координат, движущейся с групповой скоростью поперечного звука $a_{y,z}(x,t) \to a_{y,z}(\xi,t)$, где $\xi = x - (d\omega/dq_t)t$. В результате посредством преобразований, подобных использованным при получении (8), получим систему двух уравнений

$$i\frac{\partial a_y}{\partial t} = \kappa a_y + i(c_z - c_y)\frac{\partial a_y}{\partial \xi} + \beta_t\frac{\partial^2 a_y}{\partial \xi^2}$$
$$+ \gamma_t\left\{a_y\left(|a_y|^2 + \frac{2}{3}|a_z|^2\right) + \frac{1}{3}a_y^* a_z^2\right\},$$

$$i\frac{\partial a_z}{\partial t} = -\kappa a_y - i(c_z - c_y)\frac{\partial a_z}{\partial \xi} + \beta_t\frac{\partial^2 a_z}{\partial \xi^2}$$
$$+ \gamma_t\left\{a_z\left(|a_z|^2 + \frac{2}{3}|a_y|^2\right) + \frac{1}{3}a_z^* a_y^2\right\}. \qquad (10)$$

Здесь

$$\beta_t = \frac{3\alpha_t\omega}{2c_t^2}, \qquad \gamma_t = \frac{3\omega C}{4c_t^2},$$

$$\kappa = \frac{\omega}{2}\,\frac{c_z^2 - c_y^2}{c_z^2 + c_y^2} \cong \frac{\omega}{2}\,\frac{c_z - c_y}{c_t}. \qquad (11)$$

Ниже для определенности считаем, что $c_z > c_y$, т.е. $\kappa > 0$.

Система уравнений (10) после замены $\xi \leftrightarrow t$ внешне совпадает с уравнениями для уединенных волн в двулучепреломляющих оптических волокнах [16], а поэтому используемый дальше анализ аналогичен предложенному в [21] методу исследования векторных солитонов в нелинейной оптике.

Векторные акустические солитоны

Уравнения (10) отличаются от стандартных нелинейных уравнений Шредингера наличием слагаемых, пропорциональных $\partial a_{y,z}/\partial\xi$. Их наличие с разным знаком в уравнениях для a_y и a_z отражает тот факт, что из-за различия групповых скоростей волн, поляризованных вдоль осей x и y, с разной скоростью распространяются и соответствующие солитоны. Однако в силу малой разности этих скоростей возникает надежда на реализацию связанных состояний. Сделаем подстановку, позволяющую убрать из уравнений эти первые производные по координатам,

$$a_{y,z}(\xi, t) = b_{y,z}(\xi, t)\exp\left\{i\frac{(c_z - c_y)}{4\beta_t}\,t \mp i\Lambda\xi\right\}, \qquad (12)$$

где пространственная частота

$$\Lambda = \frac{c_z - c_y}{2\beta_t}. \qquad (13)$$

В результате уравнения (10) принимают вид

$$i\frac{\partial b_y}{\partial t} = \kappa b_y + \beta_t\frac{\partial^2 b_y}{\partial\xi^2} + \gamma_t\left\{b_y\left(|b_y|^2 + \frac{2}{3}|b_z|^2\right) + \frac{1}{3}b_y^* b_z^2\exp(4i\Lambda\xi)\right\},$$

$$i\frac{\partial b_z}{\partial t} = -\kappa b_z + \beta_t\frac{\partial^2 b_z}{\partial\xi^2} + \gamma_t\left\{b_z\left(|b_z|^2 + \frac{2}{3}|b_y|^2\right) + \frac{1}{3}b_z^* b_y^2\exp(-4i\Lambda\xi)\right\}. \qquad (14)$$

Уравнения (14) в отличие от (10) содержат в явном виде зависимость коэффициентов от координаты, которые инвариантны при замене $\xi \to \xi + \pi/2\Lambda$. Поэтому можно ожидать, что решения представляют собой набор периодически расположенных импульсов, расстояния между которыми кратны длине $\pi/2\Lambda$. Если длина импульса λ_i намного меньше этого расстояния, то соседние импульсы перекрываются слабо. Поэтому для нахождения приближенного уравнения для одиночного импульса можно воспользоваться заменой в (14) множителей $\exp(\pm 4i\Lambda\xi)$ на $\exp(\pm 4i\Lambda\xi_0)$, где ξ_0 — положение центра тяжести импульса, если, конечно, $\lambda_t\Lambda \ll 1$. После этой приближенной процедуры ищем решение в виде

$$b_{y,z}(\xi, t) = f_{y,z}(\xi)\exp(-iQt \mp i\Lambda\xi_0), \qquad (15)$$

где $f_{y,z}(\xi)$ — действительные амплитуды.

В результате (14) принимает вид

$$\beta_t\frac{d^2 f_y}{d\xi^2} = (Q - \kappa)f_y - \gamma_t f_y\left(f_y^2 + f_z^2\right),$$

$$\beta_t\frac{d^2 f_z}{d\xi^2} = (Q + \kappa)f_z - \gamma_t f_z\left(f_y^2 + f_z^2\right). \qquad (16)$$

Уравнения (15) по форме совпадают с уравнениями Ньютона для движения частицы с массой β_t в двухмерном пространстве f_y, f_z с потенциальной энергией

$$U = -\frac{1}{2}(Q-\kappa)f_y^2 - \frac{1}{2}(Q+\kappa)f_z^2 + \frac{1}{4}\gamma_t\left(f_y^2 + f_z^2\right)^2. \qquad (17)$$

Решение уравнений (16) можно искать посредством разделения переменных в эллиптической системе координат и используя формализм метода Гамильтона–Якоби. При этом необходимо найти все возможные траектории движения частицы, соответствующие уединенным волнам. Такая процедура была выполнена в [21], поэтому здесь можно прямо воспользоваться результатами этой работы.

Обычным "светлым" солитонам соответствуют траектории, начинающиеся и оканчивающиеся в начале координат $f_y = f_x = 0$, что соответствует обращению в нуль амплитуды импульса при $\xi \to \pm\infty$. Амплитуда светлого солитона описывается соотношением

$$f_y = \pm 2\sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_l}} \times \frac{\eta_-\,\mathrm{sh}[\eta_+(\xi - \xi_0) - \delta]}{\eta_+\,\mathrm{ch}[\eta_+(\xi - \xi_0) - \delta]\,\mathrm{ch}[\eta_-(\xi - \xi_0) - \delta] - \eta_-\,\mathrm{sh}[\eta_+(\xi - \xi_0) - \delta]\,\mathrm{sh}[\eta_-(\xi - \xi_0) - \delta]},$$

$$f_z = 2\sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_l}} \times \frac{\eta_+\,\mathrm{ch}[\eta_-(\xi - \xi_0) - \delta]}{\eta_+\,\mathrm{ch}[\eta_+(\xi - \xi_0) - \delta]\,\mathrm{ch}[\eta_-(\xi - \xi_0) - \delta] - \eta_-\,\mathrm{sh}[\eta_+(\xi - \xi_0) - \delta]\,\mathrm{sh}[\eta_-(\xi - \xi_0) - \delta]}, \qquad (18)$$

где $\eta_\pm(Q \pm \kappa)/\beta_t$; δ — произвольный параметр, определяющий набор различных векторных солитонов; ξ_0 — произвольно выбираемое начало отсчета координат.

Эти солитоны мы называем векторными в силу того, что вдоль импульса изменяется вектор их поляризации. Угол поляризации Θ солитона, согласно (18), зависит от координаты по закону

$$\mathrm{tg}\,\Theta = \frac{f_y}{f_z} = \pm\frac{\eta_-}{\eta_+}\,\frac{\mathrm{sh}(\eta_+\xi - \delta)}{\mathrm{ch}(\eta_-\xi - \delta)}. \qquad (19)$$

Здесь начало отсчета координаты $\xi_0 = 0$. Таким образом, вектор поляризации изменяется от $\mp\pi/2$ при $\xi \to -\infty$ до $\pm\pi/2$ при $\xi \to \infty$, проходя через нулевое значение в точке $\xi = \delta/\eta_+$.

Векторный солитон, согласно (18), представляет собой суперпозицию двух импульсов, поляризованных вдоль осей y и z, центры тяжести которых смещены относительно друг друга на расстояние, пропорциональное параметру δ. Этот параметр в вырожденном предельном случае, когда скорости поперечного звука $c_y = c_z(\kappa = 0,\ \eta_+ = \eta_-)$, соответствует скалярному солитону, поляризованному в плоскости yz. В изотропном пределе, конечно, солитон не носит векторный характер, так как поляризация его не меняется вдоль импульса, а его форма не зависит от угла поляризации. В частном случае, когда $\kappa = 0$, имеем $f_y = f\sin\Theta$, $f_z = f\cos\Theta$ и

$$f = \sqrt{\frac{2Q}{\gamma_t}}\ \mathrm{ch}^{-1}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{\frac{Q}{\beta_t}}\right). \tag{20}$$

Интересной особенностью полученных состояний векторных солитонов является инвариантность запасенной в них упругой энергии кристалла от параметра δ. Используя выражения (18), можно получить, что

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,\left(f_y^2 + f_z^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{4\beta_t\kappa}}{\gamma_t}\left\{\sqrt{\frac{Q}{\kappa} + 1} + \sqrt{\frac{Q}{\kappa} - 1}\right\}. \tag{21}$$

Таким образом, параметр Q, как и в случае обычных солитонов, описываемых скалярным уравнением Шредингера (8), определяет мощность в импульсе. Однако векторные солитоны могут существовать только в области достаточно больших Q, когда $Q > \kappa$. Соответственно имеется пороговое значение мощности при $Q = \kappa$ для векторных солитонов $W_{\min} = \sqrt{8\kappa\beta_t}/\gamma_t$, ниже которой эти состояния не реализуются.

При $Q < \kappa$ возникают солитонные состояния, поляризованные строго вдоль оси z. В этой области $f_y = 0$,

$$f_z = \sqrt{\frac{2(Q + \kappa)}{\gamma_t}}\ \mathrm{ch}^{-1}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{\frac{Q + \kappa}{\beta_t}}\right). \tag{22}$$

Потенциальная энергия в форме (17) допускает существование еще одной траектории, соответствующей реализации уединенной волны. Эта траектория соединяет точки $f_y = -\sqrt{(Q - \kappa)/\gamma_t}$, $f_z = 0$ и $f_y = \sqrt{(Q - \kappa)/\gamma_t}$, $f_z = 0$ и проходит через точки абсолютного равновесия $f_y = 0$, $f_z = \pm\sqrt{(Q + \kappa)/\gamma_t}$. Соответствующее решение имеет характер смешанного солитона: его проекция на ось f_z представляет собой "светлый" солитон (амплитуда обращается в нуль при $\xi \to \pm\infty$), в то время как вторая составляющая f_y является "темным" солитоном с амплитудой, отличной от нуля при $\xi \to \pm\infty$,

$$f_y = \sqrt{\frac{Q - \kappa}{\gamma_t}}\ \mathrm{th}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{\frac{\kappa}{\beta_t}}\right),$$

$$f_z = \sqrt{\frac{Q + 3\kappa}{\gamma_t}}\ \mathrm{ch}^{-1}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{\frac{\kappa}{\beta_t}}\right). \tag{23}$$

Такие смешанные векторные солитоны могут существовать лишь в области $Q > \kappa$. "Темная" составляющая солитона описывает в сущности изменение фазы поперечного звука на угол π, поляризованного вдоль оси y. Такое изменение фазы сопровождается звуковым импульсом ортогональной поляризации вдоль оси z. Заметим, что подобные смешанные солитонные состояния в нелинейной оптике были исследованы в работе [18] (см. также [21]).

Обсуждение полученных результатов

Выше показано, что в трехмерных кристаллах могут реализовываться три типа уединенных волн, описываемых тремя связанными нелинейными уравнениями Шредингера (7) в соответствии с имеющимися в гармоническом приближении тремя ветвями акустических фононов. Конкретный вид уединенных волн в значительной мере определяется типом кристаллической решетки и направлением распространения. Так, в двухосных кристаллах, где групповые скорости всех трех фононных мод резко различаются, возникновение векторных солитонов маловероятно. В таких решетках можно ожидать реализации обычных солитонных импульсов трех типов, каждый из которых поляризован вдоль одной из главных осей и движется со своей скоростью, равной групповой скорости соответствующей акустической моды. В одноосных кристаллах при распространении света вдоль оси c или в кубических кристаллах скорости поперечных звуковых мод вырождены и сильно отличаются от скорости продольных колебаний. Поэтому в таких решетках должны возникать обычные солитоны, поляризованные вдоль направления распространения, и векторные, поляризованные в перпендикулярной плоскости. Впрочем, действительно, векторный характер эти солитоны будут иметь в том случае, если каким-либо внешним воздействием слабо нарушить равенство групповых скоростей поперечного звука. Вследствие отсутствия взаимодействия между продольными и поперечными солитонами ситуация для поперечных импульсов весьма напоминает ту, которая имеется при изучении оптических солитонов при распространении в волокнах. Исключение может составить специальный случай одноосного кристалла, в котором скорости продольного и поперечного звука близки. В этом случае могут возникнуть трехмерные векторные солитоны, у которых вдоль импульса вектор поляризации вращается по двум направлениям.

Сама идея образования связанного состояния типа векторного солитона базируется на том, что небольшая разница в групповых скоростях звука при различной поляризации компенсируется различием волновых векторов Λ соответствующих несущих частот (см. (12)). В дальнейшем при приближенной замене в уравнениях (14) множителей $\exp(\pm 4i\Lambda\xi) \to \exp(\pm 4i\Lambda\xi_0)$ используется малость длины импульса λ_i по сравнению с Λ^{-1}. Как показывает анализ, учет поправок по малому параметру $\lambda_i\Lambda$ приводит к появлению излучения звуковых волн движущимся векторным солитоном (т. е. пьедестала). Это излучение приводит к постепенному распаду импульсного состояния. Стабильность системы можно восстановить, если распространяется периодическая последовательность импульсов, отстоящих друг от друга на расстоянии $\pi/2\Lambda$ и модулированных синхронизированной несущей частотой. Тогда происходит обмен энергией сопутствующего акустического фона (пьедестала) между соседними импульсами и разрушение солитонных состояний прекращается. В оптике на этом эффекте, возможно, основана пассивная синхронизация периодической последовательности импульсов в волоконных лазерах [24,25].

В настоящее время производятся интенсивные численные исследования распространения звуковых импульсов в ангармонических решетках [1,4–8]. В частности, в работах [1,4,6] наблюдали распространение звуковых импульсов в одномерных цепочках без существенного изменения их формы, что связывалось с реализацией солитонных состояний различного типа. Однако для надежной идентификации солитонных состояний необходимы исследования долговременной эволюции импульсных состояний. Что касается исследований спонтанного формирования солитонов из шумового фона, то они и вовсе отсутствуют. Поэтому никаких данных о характерной длине формирования акустических солитонов в настоящее вермя не имеется. Ситуация осложняется еще тем обстоятельством, что в ангармонических решетках в принципе могут реализовываться уединенные волны различного типа, различающиеся между собой скоростью распространения. В настоящей работе основное внимание уделено солитонам, распространяющимся с групповой скоростью звука и описываемым нелинейным уравнением Шредингера. Однако более общее уравнение Буссинеска (см. (3)) допускает решения в виде солитонов, распространяющихся со скоростью V, превышающей звуковую, и имеющих форму импульса без модуляции несущей частотой. При приближении V к звуковой скорости уравнение Буссинеска можно редуцировать к виду уравнения Картевега-де-Вриза, которое допускает точные решения в виде уединенной волны осциллирующего типа (breathers). В трехмерных решетках ситуация еще более сложная, и такие системы к настоящему времени практически вообще не изучены даже численными методами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-02 16848-а.

Список литературы

[1] *Flytzanis N., Pnevmatikov St., Remoissenet M.* // J. Phys. C. 1985. Vol. 18. P. 4603–4629.
[2] *Kivshar Yu.S.* // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. P. 4132–4135.
[3] *Takeno S.* // Prog. Theor. Phys. 1984. Vol. 71. P. 395–398.
[4] *Zavt G.S., Wagner M., Luetze A.* // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. P. 4108–4119.
[5] *Wagner M., Zavt G., Vazquez-Marquez J.* et al. // Phil. Mag. B. 1992. Vol. 65. P. 273–287.
[6] *Lindquist B., Johansson M., Riklund R.* // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50. P. 9860.
[7] *Kalosakas G., Tsironis G.P., Economou E.N.* // J. Phys. 1994. Vol. 6. P. 7847–7856.
[8] *Varquez–Marquez J., Wagner M., Montagna M.* et al. // Phys. B. 1991. Vol. 172. P. 355–368.
[9] *Takeno S.* // J. Phys. Soc. Jap. 1990. Vol. 59. P. 3127–3141.
[10] *Wang X., Brown D.W., Lindenberg K.* // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 39. P. 5366–5386.
[11] *Kopidakis G., Soukoulis C.M., Economou E.N.* // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49. P. 7036–7039.
[12] *Braun O.M., Kivshar Yu.S.* // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50. P. 13388–13400.
[13] *Zolotaryuk A.V., Spatschek K.M., Kluth O.* // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 47. P. 7827–7839.
[14] *Chen D., Molina M.I., Tsironis G.P.* // J. Phys. 1993. Vol. 5. P. 8689–8698.
[15] *Брыксин В.В., Дороговцев С.Н.* // ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 1025–1039.
[16] *Agrawal G.P.* Nonlinear Fiber Optics. Boston: Academic Press, 1989.
[17] *Christodoulides D.N., Joseph R.I.* // Opt. Lett. 1988. Vol. 13. P. 53–55.
[18] *Christodoulides D.N.* // Phys. Lett. 1988. Vol. 132. P. 451–455.
[19] *Islam M.N., Menyuk C.R., Chen C.J., Soccolich C.E.* // Opt. Lett. 1991. Vol. 16. P. 214–217.
[20] *Брыксин В.В., Петров М.П., Киян Р.В.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. С. 6–10.
[21] *Брыксин В.В., Петров М.П., Киян Р.В.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. С. 732–740.
[22] *De Angelis C., Santagiustina M., Wabnitz S.* // Opt. Comm. 1995. Vol. 122. P. 23–27.
[23] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. Москва: Наука, 1965.
[24] *Malomed B.A.* // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 410–423.
[25] *Брыксин В.В., Петров М.П.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. С. 46–51.