

01

# Приближенная формула для распределения поверхностной плотности тока для двух идеально-диамагнитных цилиндров

© А.И. Спицын

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники,  
310726 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 3 июня 1997 г. В окончательной редакции 20 апреля 1998 г.)

Найдено приближенное соотношение для распределения поверхностной плотности тока для двух идеально-диамагнитных цилиндров с протекающими по ним токами произвольных величин. Соотношение обладает хорошей точностью и верно в широком диапазоне изменений величины зазора между цилиндрами.

При рассмотрении близко расположенных отдельных частей излучателей или нескольких излучателей [1], при диамагнитной подвеске [2], а также в случае сверхпроводящих соленоидов важным фактором является перераспределение плотности тока на отдельных элементах из-за влияния близко расположенных других частей [3]. В настоящей работе рассматривается такое влияние в системе двух параллельных идеально-диамагнитных цилиндров с равными радиусами поперечного сечения  $r_0$  и протекающими по ним токами  $I_1$  и  $I_2$ , расстояние между центрами которых примем за  $2H$  (см. рисунок).

Точное соотношение для распределения поверхностной плотности тока  $J_i(\varphi_i)$  на одном из цилиндров можно представить в виде [4]

$$J_i(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{h - \cos \theta_i}{\sqrt{h^2 - 1}} \left[ I_i + (I_1 + I_2) \times \left[ \frac{K}{\pi} \operatorname{dn} \left( \frac{K\theta_i}{\pi} \mid m \right) - \frac{1}{2} \right] \right], \quad (1)$$

$$h = \operatorname{ch} \left( \frac{\pi K'}{K} \right), \quad h = \frac{H}{r_0},$$

$$\theta_i = \arccos \frac{1 - h \cos \varphi_i}{h - \cos \varphi_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где  $0 < \varphi_i < \pi$  ( $\pi > \theta_i > 0$ ) — полярный угол одного из цилиндров, отсчитываемый от отрезка, соединяющего центры цилиндров;  $K$  и  $K'$  — полные эллиптические интегралы 1-го рода с прямым и дополнительным параметрами  $m$  и  $m_1 = 1 - m$ ;  $\operatorname{dn}$  — эллиптическая функция Якоби [5].

Значение параметра  $m$  эллиптических интегралов определяется первым уравнением (2).

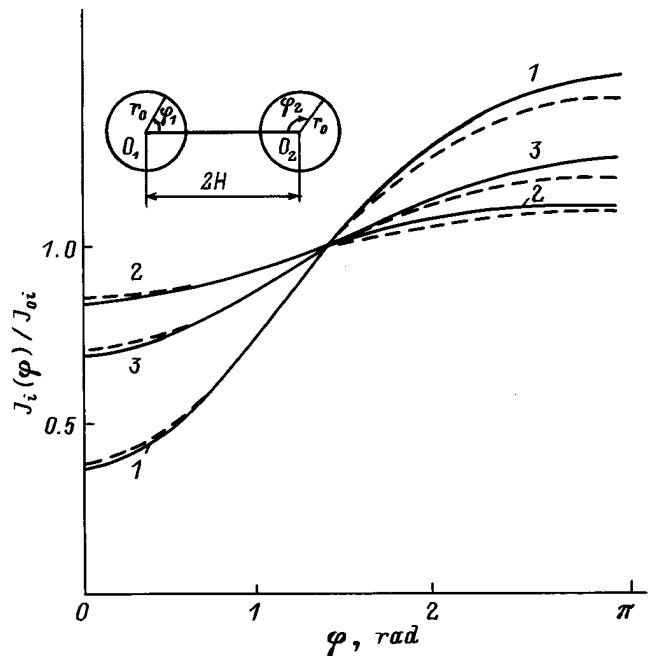
Для расчета более удобны не специальные функции, входящие в (1), а элементарные. Из соотношения (1) получим приближенную формулу для  $J_i(\varphi_i)$ , верную при близком расположении цилиндров друг от друга. При  $h \rightarrow 1$  эллиптический интеграл  $K$  стремится к  $\infty$ , а  $m \rightarrow 1$  ( $m_1 \rightarrow 0$ ). Раскладывая первое из уравнений (2) в ряд до членов четвертой степени включительно, пользуясь представлением  $m_1 \sim 0$ ,  $K' = \pi/2$ ,  $K = \ln(4/m_1^{1/2})$  и

решая полученное уравнение относительно  $m_1$  с использованием формулы для  $\operatorname{dn}(y|m)$  ( $y \leq K$ ) 16.15.3. из [5], после соответствующих преобразований распределение плотности, к примеру, на первом цилиндре представится в виде

$$\frac{J_1(\varphi_1)}{J_{01}} = \frac{h - \cos \theta_1}{\sqrt{h^2 - 1}} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_2}{I_1} \right) + \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} \right) \times \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\operatorname{ch} \left( \frac{\alpha \theta_1}{\pi} \right)} + 4e^{-2\alpha} \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha \theta_1}{\pi} \right) \right] \right\},$$

$$\alpha = \frac{\pi^2}{2\sqrt{6} \left[ \left[ 1 + \frac{2}{3}(h - 1) \right]^{1/2} - 1 \right]^{1/2}}, \quad J_{01} = \frac{I_1}{2\pi r_0}, \quad (3)$$

и с заменой индексов  $1 \leftrightarrow 2$  для второго цилиндра. На рисунке сплошными линиями представлены зависимости



Зависимости приведенных величин плотностей токов на поверхности первого (1) и второго (2) цилиндров для токов  $I_2/I_1 = 2$  и на одном из цилиндров при  $I_2/I_1 = 1$  (3).

$J_1(\varphi_1)/J_{01}$  (1),  $J_2(\varphi_2)/J_{02}$  (2), где  $J_{0i}$  поверхностная плотность тока при его равномерном распределении по поверхности  $i$ -го цилиндра, рассчитанные по соотношению (1) для токов  $I_2/I_1 = 2$ , а также зависимость  $J(\varphi)/J_0$  (3) на одном из цилиндров при  $I_2/I_1 = 1$ . Относительная величина зазора  $\xi = 2(h - 1) = 5.14$ . Штриховыми кривыми приведены соответствующие зависимости, рассчитанные по (3). При величине зазора, равной  $5r_0$ , максимальная погрешность отклонения второго члена в соотношении (3) от соответствующего члена в (1) не превосходит 4%. При меньших зазорах эта погрешность еще меньше. Таким образом, соотношение (3) обладает хорошей точностью и верно в широком диапазоне изменений величины зазора между цилиндрами. Оно без труда может быть использовано при расчете распределения плотностей токов для двух близко расположенных цилиндров.

## Список литературы

- [1] *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
- [2] *Jayawant V.V.* // Rep. Prog. Phys. 1981. Vol. 44. P. 411–477.
- [3] *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
- [4] *Спицын А.И.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 12. С. 1–11.
- [5] *Абрамовиц М., Стиган Н.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.